MONOGRAFÍAS MATEMÁTICAS
UFRO

ALGEBRA LINEAL

Rubén A. Hidalgo

Departamento de Matemática y Estadística
Universidad de La Frontera

Rubén A. Hidalgo

ALGEBRA LINEAL

PRIMERA EDICIÓN 2015

Rubén A. Hidalgo
Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de La Frontera, Temuco, Chile.
E-mail : `ruben.hidalgo@ufrontera.cl`
Url : `http://dme.ufro.cl/rhidalgo`

Primera Edición 2015 .

ISBN XXXXXXX .

ALGEBRA LINEAL

PRIMERA EDICIÓN 2015

Rubén A. Hidalgo

A Betty, Cata y Pucky

INTRODUCCIÓN

Esta monografía está principalmente dirigida a los estudiantes de Licenciatura en Ciencias Mención Matemática, Licenciatura en Ciencias Mención Física e Ingeniería Civil Matemática, pero puede ser también de uso para estudiantes de Ingeniería y otras especialidades. El temario escogido incluye parte de lo que creemos debe ser una formación básica en el tema para estos estudiantes.

En esta monografía los números son elementos de cuerpos K de cualquier tipo, excepto donde se haga mención. Para la mayoría de los estudiantes sólo basta considerar el cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$ ó el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ ó el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$. Para aquellos estudiantes interesados en areas como la informática, pueden también pensar en cuerpos finitos, como por ejemplo $\mathbb{Z}_2$.

Hemos incluido varios tipos de problemas, siendo algunos de simple cálculo, otros de aspecto más teóricos y otros de aplicaciones. Muchos temas importantes no han podido ser incluidos en esta versión, pero esperamos poder incluirlas en una próxima.

Una lectura recomendable para la mayoría de los estudiantes es : (i) no considerar el capítulo 1 y cada vez que se mencione un cuerpo K, pensar en $K = \mathbb{Q}$ ó $K = \mathbb{R}$ ó $K = \mathbb{C}$, (ii) capítulos 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12.5, 12.6, 13, 16 y 17.

Mis agradecimientos a Betty, Cata y Pucky, a quienes quite tiempo de dedicación para escribir esta monografía, por su comprensión durante ese tiempo. También quiero agradecer a Anita Rojas por algunas correciones hechas al texto (aún quedan muchísimas que son exclisivamente de mi responsabilidad).

Valparaíso, Chile 2015 Rubén A. Hidalgo

TABLA DE MATERIAS

CAPÍTULO 1

CUERPOS

En este capítulo sólo recordaremos la definición de cuerpo y algunas propiedades básicas de ellos como así algunos ejemplos para tener a mano.

1.1. Definición de cuerpo

Primero introduciremos en generalidad el concepto de cuerpo, una estructura algebraica que se define en el curso de Estructuras Algebraicas, pero que no es pre-requisito para el curso de Algebra Lineal. La mayoría de los estudiantes sólo necesitarán los cuerpos básicos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

Los cuerpos son estructuras donde es posible tener nociones de suma, resta, multiplicación y división. La definición es la siguiente.

Definición 1.1.1. — Un cuerpo es un triple $(K, +, \cdot)$, donde K es un conjunto no vació,

$$+ : K \times K \to K : (x, y) \mapsto x + y$$

y

$$\cdot : K \times K \to K : (x, y) \mapsto x \cdot y$$

son funciones, llamadas suma y multiplicación respectivamente, tales que valen las siguientes propiedades :

1.- La suma es asociativa, es decir, para todo triple $x, y, z \in K$ vale que

$$(x + y) + z = x + (y + z);$$

2.- Existe un neutro para la suma $0 \in K$, es decir, para todo $x \in K$ vale que

$$x + 0 = x = 0 + x;$$

3.- Existen inversos para la suma, es decir, para todo $x \in K$ existe $-x \in K$ tal que

$$x + (-x) = 0 = (-x) + x;$$

4.- La suma es conmutativa, es decir, para todo par $x, y \in K$ vale que
$$x + y = y + x;$$

5.- La multiplicación es asociativa, es decir, para todo triple $x, y, z \in K$ vale que
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z);$$

6.- Existe un neutro para la multiplicación $1 \in K - \{0\}$, es decir, para todo $x \in K$ vale que
$$x \cdot 1 = x = 1 \cdot x;$$

7.- Existen inversos para la multiplicación, es decir, para todo $x \in K - \{0\}$ existe $x^{-1} \in K - \{0\}$ tal que
$$x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x;$$

8.- La multiplicación es conmutativa, es decir, para todo par $x, y \in K$ vale que
$$x \cdot y = y \cdot x;$$

9.- Vale la propiedad distributiva, es decir, para todo triple $x, y, z \in K$ vale que
$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Observación 1.1.2. — Observar de nuestra definición que un cuerpo debe tener al menos dos elementos. Si no existe confusión alguna, denotaremos un cuerpo $(K, +, \cdot)$ sólo por K. Más aún, usaremos la notación xy para denotar $x \cdot y$.

Definición 1.1.3. — Sea K un cuerpo. Un subconjunto $L \subset K$ el cual es un cuerpo con las mismas operaciones de suma y multiplicación de K es llamado un subcuerpo de K. Usaremos la notación $L \subset K$ para denotar esto.

1.2. Ejemplos de cuerpos

En esta sección daremos algunos ejemplos básicos de cuerpos, los tres primeros son los clásicos que conocemos desde el colegio. Los restantes aparecen de manera natural en cursos básicos de informática y física, por ejemplo.

1.2.1. Cuerpo de los números racionales. — Si consideramos aquellos números reales de la forma a/b, donde $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$, entonces obtenemos el conjunto de los números racionales. La suma y multiplicación usual de fracciones nos da la estructura de un cuerpo, denotado por $\mathbb{Q}$ y llamado el cuerpo de los números racionales.

1.2.2. Cuerpo de los números reales. — El conjunto de los números reales, junto a la suma y multiplicación usual forma un cuerpo, llamado el cuerpo de los números reales y denotado por $\mathbb{R}$. En este caso tenemos que $\mathbb{Q}$ es un subcuerpo de $\mathbb{R}$.

1.2.3. Cuerpo de los números complejos. — El conjunto de los números complejos, es decir, de la forma $x + iy$, donde $x, y \in \mathbb{R}$, junto a la suma y multiplicación usuales

$$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v)$$

$$(x + iy) \cdot (u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu)$$

forma un cuerpo, llamado el cuerpo de los números complejos y denotado por $\mathbb{C}$. En este caso tenemos que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son ambos subcuerpos de $\mathbb{C}$.

1.2.4. Cuerpo $\mathbb{Z}_p$, donde $p \in \mathbb{N}$ es primo. — Consideremos un número primo $p \in \mathbb{N}$ y definamos la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$:

$$x \equiv y \iff |x - y| \text{ es divisible por } p.$$

Denotemos por $\overline{x}$ a la clase de equivalencia del entero $x \in \mathbb{Z}$ y por $\mathbb{Z}_p$ al conjunto de tales clases de equivalencia. Definamos en $\mathbb{Z}_p$ las siguientes operaciones :

$$+_p : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p : (\overline{x}, \overline{y}) \mapsto \overline{x} +_p \overline{y} = \overline{x + y}$$

$$\cdot_p : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p : (\overline{x}, \overline{y}) \mapsto \overline{x} \cdot_p \overline{y} = \overline{xy}.$$

Teorema 1.2.1. — *Si p es un primo, entonces $\mathbb{Z}_p$ es un cuerpo con las operaciones binarias $+_p$ y $\cdot_p$.*

Observación 1.2.2. — Este tipo de cuerpos, en especial cuando $p = 2$, es de bastante utilidad en informática.

1.2.5. Cuerpos cuadráticos. — Consideremos $d \in \{2, 3, ...\}$ tal que $\sqrt{d} \notin \mathbb{Z}$. Consideremos los subconjunto de $\mathbb{C}$ definidos por :

$$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Q}[\sqrt{-d}] = \{a + b\sqrt{d}i : a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{Z}$$

Usando la suma y multiplicación usual de números reales y complejos tenenos que ellos son cuerpos. En este caso, $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ es subcuerpo de ambos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, pero $\mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ es sólo subcuerpo de $\mathbb{C}$.

1.2.6. Cuerpos definidos por polinomios. — Consideremos un cuerpo K y denotemos por $K[x]$ el anillo de polinomios en una variable x. Un polinomio $p(x) \in K[x] - K$ es llamado irreducible si no es posible escribirlo como producto de dos polinomios en $K[x]$, ambos de grado positivo ; en caso contrario diremos que es reducible en $K[x]$. Por ejemplo, $p(x) = x^2 + 1$ es irreducible en $\mathbb{R}[x]$ y es reducible en $\mathbb{C}[x]$.

Sea $p(x) \in K[x]$ irreducible y consideremos la relación de equivalencia en $K[x]$ dada por :

$$u(x) \equiv v(x) \iff u(x) - v(x) \text{ es divisible por } p(x)$$

Denotemos por $[u(x)]$ la clase de equivalencia de $u(x) \in K[x]$ y por $K[x]/\langle p(x)\rangle$ al conjunto de las clases de equivalencia. Las operaciones de suma y multiplicación

$$+ : K[x]/\langle p(x)\rangle \times K[x]/\langle p(x)\rangle \to K[x]/\langle p(x)\rangle : ([u(x)], [v(x)]) \mapsto [u(x)+v(x)]$$

$$\cdot : K[x]/\langle p(x)\rangle \times K[x]/\langle p(x)\rangle \to K[x]/\langle p(x)\rangle : ([u(x)], [v(x)]) \mapsto [u(x)v(x)]$$

dotan a $K[x]/\langle p(x)\rangle$ de la estructura de un cuerpo. Por ejemplo, si tomamos $K = \mathbb{R}$ y $p(x) = x^2 + 1$, entonces el cuerpo $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1\rangle$ es otra manera de ver al cuerpo $\mathbb{C}$. Usando $K = \mathbb{Q}$ y $p(x) = x^2 - d$, donde $d \in \{2, 3, ...\}$ tal que $\sqrt{d} \notin \mathbb{Z}$, entonces el cuerpo $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - d\rangle$ es otra manera de ver a $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$.

1.3. Homomorfismos de cuerpos

En el ejemplo anterior hemos dicho que un cuerpo se puede mirar de maneras diferentes. ¿Qué quiere decir esto ?

Definición 1.3.1. — Sean K_1 y K_2 cuerpos y $\phi : K_1 \to K_2$ una función.

(1) Diremos que ϕ es un homomorfismo entre los cuerpos si

$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$$

y

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$$

para todo par $x, y \in K_1$.

(2) Diremos que ϕ es un isomorfismo si ϕ es bijección y un homomorfismo. En tal caso, diremos que K_1 y K_2 son cuerpos isomorfos.

La idea es que si uno tiene información algebraica sobre un grupo K, entonces esas mismas propiedades valen para otro cuerpo que sea isomorfo a este. El usar algunas copias isomorfas de un grupo dado permite en muchos casos poder averiguar información del grupo que no son tan claras con otras copias.

1.4. Característica de un cuerpo

Sea K un cuerpo y $1 \in K$ su elemento neutro para su multiplicación. Por cada entero positivo $n \in \{2, 3, 4, ...\}$ podemos considerar el valor

$$1^{+n} = \underbrace{1 + 1 \cdots + 1}_{n-veces} \in K.$$

Definición 1.4.1. — Si existe $n \in \{2, 3, ...\}$ tal que $1^n = 0$, entonces existe un menor de tales enteros con tal propiedad ; tal entero es llamado la característica de K. En caso contrario, diremos que K tiene característica 0.

Consideremos un cuerpo K y consideremos la función

$$\phi : \mathbb{Z} \to K : n \mapsto 1^{+n}$$

donde para $n = 0$ definimos $1^{+0} = 1$ y para $n < 0$ definimos $1^{+n} = (1^{+|n|})^{-1}$. Tenemos que ϕ resulta ser un homomorfismo de anillos. El núcleo de ϕ es un subanillo de $\mathbb{Z}$, luego tiene una de las siguientes formas : (i) $\{0\}$; ó (ii) $n\mathbb{Z}$. En el caso (i) vemos, de nuestra definición de característica de cuerpo, que K tiene característica 0 y necesariamente K debe ser infinito ; de hecho debe contener una copia de $\mathbb{Q}$. En el caso (ii) se puede ver que necesariamente n es la característica de K y que K debe contener una copia de $\mathbb{Z}_n$. Pero como en un cuerpo K la ecuación $xy = 0$ obliga a tener que $x = 0$ ó $y = 0$, entonces $n = p$ es un primo.

Teorema 1.4.2. — *La característica de un cuerpo es* 0 *ó un primo.*

Observación 1.4.3. — Más adelante, cuando veamos espacios vectoriales, veremos que todo cuerpo finito de característica p debe tener cardinalidad una potencia de p.

1.5. Problemas

1.- Verificar que en un cuerpo $(K, +, \cdot)$ los neutros aditivos y multiplicativos son únicos.

2.- Sea K un cuerpo. Verificar que si $x \cdot y = 0$, entonces $x = 0$ ó bien $y = 0$.

3.- Verificar que el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, junto a la suma y multiplicación usual de números reales, no es un cuerpo.

4.- Verificar que la relación $\equiv$ definida en la definición del cuerpo $\mathbb{Z}_p$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$.

5.- Si $p > 1$ es un primo, entonces el conjunto $\{0, 1, 2, ..., p-1\}$ forma una colección maximal de elementos no-equivalentes en el cuerpo $\mathbb{Z}_p$.

6.- Verificar que las funciones $+_p$ y $\cdot_p$ definidas sobre $\mathbb{Z}_p$ están bién definidas.

7.- Verificar que $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ es un cuerpo si p es un primo. [Indicación : para buscar un inverso multiplicativo de $\overline{x}$, donde $x \in \{2, ..., p-1\}$, usar el hecho que al ser p primo debemos tener que x y p son relativamente primos, luego deben existir enteros $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $ax + bp = 1$.]

8.- Verificar que si reemplazamos p por un número entero positivo n que no es primo, entonces $+_n$ y $\cdot_n$ definen sobre $\mathbb{Z}_n$ una estructura de anillo. Este anillo no es un cuerpo ; todo funciona bién con la excepción que no todo elemento tiene un inverso multiplicativo.

9.- Considere $K = \mathbb{R}$ y $p(x) = x^2 + 1$. Verifique que el cuerpo $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1\rangle$ es isomorfo $\mathbb{C}$.

10.- Usando $K = \mathbb{Q}$ y $p(x) = x^2 - d$, donde $d \in \{2, 3, ...\}$ tal que $\sqrt{d} \notin \mathbb{Z}$, verificar que el cuerpo $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - d\rangle$ es isomorfo a $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$.

11.- ¿Puede ser $\mathbb{R}$ isomorfo a $\mathbb{Q}$? ¿Puede ser isomorfo a $\mathbb{C}$?

12.- Sean $d_1, d_2 \in \{2, 3, ...\}$ tales que $\sqrt{d_j} \notin \mathbb{Z}$. ¿Cuándo tenemos un isomorfismo entre $\mathbb{Q}[\sqrt{d_1}]$ y $\mathbb{Q}[\sqrt{d_2}]$?

13.- Ver que $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ tienen característica 0, pero para p primo el cuerpo $\mathbb{Z}_p$ tiene característica p.

14.- Si K_1 y K_2 son cuerpos isomorfos, entonces que puede decir de sus características.

CAPÍTULO 2

ALGEBRA MATRICIAL

2.1. Matrices

Definición 2.1.1. — Sea K un cuerpo y sean $p, q \in \{2, 3, 4, 5, ...\}$.

(i) Una matriz de tamaño $p \times q$ con coeficientes $a_{ij} \in K$ es un arreglo rectangular

$$A = (a_{ij})_{p\times q} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

(ii) Al conjunto de tales matrices le denotaremos por $M(p \times q; K)$.

(iii) Si $p = q$, diremos que esta es una matriz cuadrada de tamaño p.

(iv) Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = 0$, para todo i, j, es llamada la matriz cero y denotada por $0_{p\times q}$.

(v) Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$, es llamada una matriz diagonal ; la denotaremos por $diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{pp}$.

(vi) La matriz diagonal de tamaño p dada por $I_p = diag(1, 1, ..., 1)$ es llamada la matriz identidad de tamaño p.

(vii) Una matriz $A = (a_{ij})$ de tamaño $p\times q$ tal que $a_{ij} = 0$ para $i < j$ (respectivamente, $i > j$) es llamada una matriz triangular inferior (respectivamente, una matriz triangular superior).

(vii) Dos matrices $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M(p \times q; K)$ son iguales si para todo i, j vale que $a_{ij} = b_{ij}$.

2.2. Suma de matrices

Definición 2.2.1. — Sean $A = (a_{ij})\,, B = (b_{ij}) \in M(p \times q; K)$ matrices. Definimos su suma como

$$A + B = (c_{ij} = a_{ij} + b_{ij})$$

Algunas propiedades de la suma de matrices es la siguiente :

(1) Si $A, B, C \in M(p \times q; K)$, entonces

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

(2) Si $A, B \in M(p \times q; K)$, entonces

$$A+B = B+A$$

(3) Si $A \in M(p \times q; K)$, entonces

$$A+0 = A = 0+A$$

(4) Si $A = (a_{ij}) \in M(p \times q; K)$, entonces $-A = (-a_{ij}) \in M(p \times q; K)$ y además vale que

$$A+(-A) = 0 = (-A)+A$$

2.3. Amplificación de matrices

Definición 2.3.1. — Sea K un cuerpo, $\lambda \in K$ y $A = (a_{ij}) \in M(p \times q; K)$. Entonces, definimos la amplificación de A por λ como

$$\lambda A = (b_{ij} = \lambda a_{ij})$$

Algunas propiedades de la amplificación son las siguientes :

(1) si $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ y $A \in M(p \times q; K)$, entonces

$$(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$$

(2) si $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ y $A \in M(p \times q; K)$, entonces

$$(\lambda_1 \lambda_2)A = \lambda_1(\lambda_2 A)$$

(3) si $\lambda \in K$ y $A, B \in M(p \times q; K)$, entonces

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$$

(4) si $A \in M(p \times q; K)$, entonces

$$1A = A$$

Ejercicio 1. — *Verificar las igualdades*

$$0A = 0_{p \times q}$$

$$\lambda 0_{p \times q} = 0_{p \times q}$$

para todo $\lambda \in K$ y todo $A \in M(p \times q; K)$.

2.4. Multiplicación de matrices

Definición 2.4.1. — Sean K un cuerpo y matrices $A = (a_{ij}) \in M(p \times q; K)$, $B = (b_{ij}) \in M(q \times r; K)$. Definimos su producto como

$$AB = \left(c_{ij} = \sum_{n=1}^{q} a_n b_{nj} \right)$$

Definición 2.4.2. — En el caso que $A = (a_{ij})\,, B = (b_{ij}) \in M(p \times p; K)$, es decir matrices cuadradas de tamaño p, se define el corchete de Lie

$$[A, B] = AB - BA$$

Observación 2.4.3. — En el caso de matrices cuadradas, del mismo tamaño, podemos calcular tanto AB como BA. En general, para se tiene que $AB \neq BA$, es decir, $[A, B] \neq 0$.

Ejercicio 2. — *Sea $K = \mathbb{Q}$ y $p = 2$. Tenenos que para las matrices cuadradas*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{Q})$$

vale que $[A, B] \neq 0_{2\times 2}$.

Algunas propiedades del producto de matrices son las siguientes. Sea K un cuerpo, entonces (teniendo cuidado con los tamaños para que los productos tengan sentido) :

(i) $A(BC) = (AB)C$;
(ii) $A(B + C) = AB + AC$;
(iii) $(A + B)C = AC + BC$;
(iv) $A_{p\times q} I_q = A_{p\times q}$, $I_p A_{p\times q} = A_{p\times q}$;
(v) $A_{p\times q} 0_{q\times r} = 0_{p\times r}$, $0_{r\times p} A_{p\times q} = 0_{r\times q}$.

La siguiente definición de potencias de una matriz cuadrada será util para estudiar problemas de iteración de problemas lineales (por ejemplo, cadenas de Markov).

Definición 2.4.4. — Sea $A \in M(p\times p; K)$, donde K es algún cuerpo. Se definen las potencias siguientes de A :

$$A^{n+1} = AA^n,\ n \in \{1, 2, 3, ...\}$$
$$A^0 = I_p$$

2.5. Transposición de matrices

Definición 2.5.1. — Sea K un cuerpo y una matriz $A = (a_{ij}) \in M(p \times q; K)$. La transpuesta de A es definida como la matriz

$$^tA = (b_{ij} = a_{ji}) \in M(q \times p; K)$$

Ejemplo 2.5.2. —

$$^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Algunas propiedades de la transposición de matrices son las siguientes :
(i) $^t(\,^tA) = A$;
(ii) $^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$;
(iii) $^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$;
(iv) $^t(\lambda A) = \lambda\,{}^tA$, para $\lambda \in K$;
(v) $^tI_p = I_p$;
(vi) $^t0_{p\times q} = 0_{q\times p}$.

Observación 2.5.3. — Cuando $K \subset \mathbb{C}$, es decir, K es un subcuerpo del cuerpo de números complejos, podemos definir la matriz transpuesta hermitiana de $A = (a_{ij})$ por

$$^HA = (b_{ij} = \overline{a_{ji}}) = {}^t\overline{A}$$

Se tienen las mismas propiedades anteriores excepto que la propiedad (iv) es reeplazada por

$$(iv)' \quad {}^H(\lambda A) = \overline{\lambda}\,{}^HA, \text{ para } \lambda \in K$$

Definición 2.5.4. — Una matriz cuadrada A tal que $^tA = A$ es llamada una matriz simétrica. Una matriz cuadrada A tal que $^HA = A$ es llamada una matriz hermitiana.

Ejemplo 2.5.5. — La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

es una matriz simétrica y hermitiana.

La matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2+3i \\ 2-3i & 3 \end{pmatrix}$$

es una matriz hermitiana que no es simétrica.

La matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

es una matriz que no es simétrica ni hermitiana

Ejercicio 3. — *Si $K \subset \mathbb{C}$ y $A = (a_{ij}) \in M(p \times p; K)$ es una matriz hermitiana, entonces $a_{ii} \in \mathbb{R}$.*

2.6. Matrices invertibles

Definición 2.6.1. — Sea K un cuerpo. Una matriz cuadrada $A \in M(p \times p; K)$ es llamada invertible si exite una matriz cuadrada $A^{-1} \in M(p \times p; K)$ tal que

$$AA^{-1} = I_p = A^{-1}A;$$

en caso contrario diremos que A es una matriz singular. Denotamos por $GL(p; K)$ al conjunto de todas las matrices invertibles de tamaño p y coeficientes en K.

Ejercicio 4. — *Verificar que $GL(p; K)$ es un grupo con la regla de multiplicación de matrices.*

Definición 2.6.2. — Sea $A, B \in M(p \times p; K)$ donde K es un cuerpo. Diremos que A y B son conjugadas si existe una matriz invertible $C \in GL(p; K)$ tal que $B = CAC^{-1}$.

2.7. Problemas

1.- Encontrar matrices reales $A, B \in M(2 \times 2; \mathbb{R})$ tales que $[A, B] \neq 0$.

2.- *Producto Cruz*. Sea K un cuerpo y consideremos matrices

$$A = (a_1\ a_2\ a_3), B = (b_1\ b_2\ b_3) \in M(1 \times 3; K)$$

El producto cruz entre A y B se define como la siguiente matriz

$$A \times B = (a_2b_3 - a_3b_2 \quad a_3b_1 - a_1b_3 \quad a_1b_2 - a_2b_1) \in M(1 \times 3; K)$$

Verificar las siguientes propiedades :

(i) $A \times B = -B \times A$, es decir, el producto cruz no es conmutativo ;

(ii) $A \times A = 0$;

(iii) existen $A, B, C \in M(1 \times 3; K)$ tales que

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C),$$

en otras palabras, el producto cruz no es asociativo ;

(iv) no existe matriz $T \in M(1 \times 3; K)$ tal que $T \times A = A$ para toda $A \in M(1 \times 3; K)$, es decir, no hay un elemento neutro para el producto cruz.

3.- *Producto de Kronecker ó tensorial*. Sea K un cuerpo y matrices

$$A = (a_{ij}) \in M(p \times q; K)$$

$$B = (b_{ij}) \in M(r \times s; K)$$

El producto de Kronecker ó tensorial de A con B es definido como la matriz

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1q}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2q}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1}B & a_{p2}B & \cdots & a_{pq}B \end{pmatrix} \in M(pr \times qs; K)$$

Verificar las siguinetes propiedades :

(i) existen matrices A y B tales que $A \otimes B \neq B \otimes A$, es decir, el producto tensorial no es conmutativo ;

(ii) existen A, B, C tales que

$$(A \otimes B) \otimes C \neq A \otimes (B \otimes C),$$

en otras palabras, el producto cruz no es asociativo ;

(iii) la matriz $(1) \in M(1 \times 1; K)$ satisface que $(1) \otimes A = A = A \otimes (1)$ para toda $A \in M(p \times q; K)$, es decir, la matriz (1) es un elemento neutro para el producto de Kronecker.

4.- *Producto componente a componente*. El siguiente producto de matrices es de mucha utilidad en análisis discreto de Fourier. Sea K un cuerpo y matrices

$$A = (a_{ij}) \in M(p \times q; K)$$

$$B = (b_{ij}) \in M(p \times q; K)$$

El producto componente a componente entre A y B es dada por la siguiente matriz

$$A \square B = (c_{ij} = a_{ij} b_{ij}) \in M(p \times q; K)$$

Verificar las siguientes propiedades :

(i) $A \square B = B \square A$, es decir, el producto componente a componente es conmutativo ;

(ii) $(A\square B)\square C = A\square(B\square C)$, en otras palabras, el producto componente a componente es asociativo ;

(iii) la matriz

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M(p \times q; K)$$

satisface que $\mathcal{J}\square A = A = A\square\mathcal{J}$ para toda $A \in M(p \times q; K)$, es decir, la matriz $\mathcal{J}$ es un elemento neutro para el producto componente a componente.

5.- *Convolución.* Sea K un cuerpo y consideremos matrices

$$A = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_p), B = (b_1\ b_2\ \cdots\ b_p) \in M(1 \times p; K)$$

La convolución entre A y B se define como la siguiente matriz

$$A \star B = (c_1\ c_2\ \cdots\ c_p), \in M(1 \times p; K)$$

donde

$$c_k = a_1 b_k + a_2 b_{k-1} + \cdots + a_k b_1 + a_{k+1} b_p + a_{k+2} b_{p-1} + \cdots + a_p b_{k+1}$$

Verificar las siguientes propiedades :

(i) $A \star B = B \star A$, es decir, la convolución es conmutativa ;

(ii) $(A \star B) \star C = A \star (B \star C)$, en otras palabras, la convolución es asociativa ;

(iii) la matriz $e_1 = (1\ 0\ 0\ \cdots\ 0) \in M(1 \times q; K)$ satisface que $e_1 \star A = A$ para toda $A \in M(1 \times q; K)$, es decir, la matriz e_1 es un elemento neutro izquierdo para la convolución.

6.- Supongamos que tenemos tres poblaciones, digamos P_1, P_2, P_3, y supongamos que la problación P_1 tiene una cierta enfermedad. Supongamos que las personas de la población P_2 están en posible contacto con personas de la población P_1, y supongamos que las personas de la población P_3 están en posible contacto con personas de la población P_2. Si p_j es la cantidad de personas de la población P_j, entonces podemos codificar la información de contacto entre las dos poblaciones P_i y P_j por una matriz de tamaño $p_i \times p_j$, digamos $A_{ij} = (a_{uv})$, donde $a_{uv} =\in \{0, 1, 2, ...\}$ si la persona u de la población P_i se ha puesto en contacto a_{uv} veces con la persona v de la población P_j. Verifique que

$$A_{13} = A_{12} A_{23}$$

7.- Una matriz de probabilidad es una matriz cuadrada $A = (a_{ij}) \in M(p \times p; \mathbb{R})$ de manera que

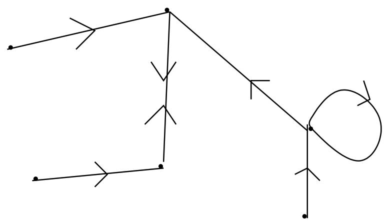

FIGURA 2.1. Un grafo dirigido

(i) $a_{ij} \in [0,1]$ y
(ii) $\sum_{j=1}^{p} a_{kj} = 1$, para todo $k = 1,..,p$.

Verificar que el producto de matrices de probabilidad es una matriz de probabilidad.

8.- En un torneo de tenis, donde participan n tenistas y todos juegan con todos, los resultados se colocan en una matriz cuadrada de tamaño n, digamos $T = (t_{ij})$, donde

$$T_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el tenista } i \text{ le gana al tenista } j \\ 0 & \text{si el tenista } i \text{ pierde con el tenista } j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

El puntaje obtenido por el tenista i es dado por

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} \left(T_{ij} + \frac{1}{2} S_{ij} \right)$$

donde $S = T^2$.

Busque un ejemplo de matriz T para $n = 4$ que es posible obtener en un torneo de tal tipo y calcule los puntajes de los tenistas.

9.- Sea $A \in M(p \times p; K)$. Verifique que ${}^tAA$ y $A\,{}^tA$ son simétricas.

10.- *Grafos*. Un grafo es un objeto que consiste en vértices y ejes, los cuales conectan pares de vértices no necesariamente diferentes. Un grafo dirigido es un grafo donde hemos escogido para cada eje una dirección, siendo posible dotarla de ambas direcciones. Grafos son de mucha utilidad en el estudio de interrelaciones entre diferentes componentes de un sistema de estudio ; por ejemplo, estudios de familias en una población, estudio de una enfermedad contagiosa, estudio de una red computacional, etc.

A cada grafo dirigido $\mathcal{G}$ le podemos asociar una matriz $A_{\mathcal{G}}$ de la siguiente manera. Primero enumeramos los vértices del grafo por los números 1, 2,...,n, donde n denota el número de vértices de tal grafo. Formamos la matriz $A_{\mathcal{G}} = (a_{ij}) \in M(n \times n; \mathbb{R})$ de manera que A_{ij} denota el número de ejes que conectan los vértices i con j. Por ejemplo, si consideramos el

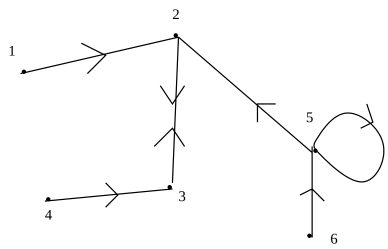

FIGURA 2.2. Un grafo dirigido con vértices numerados

grafo 2.1 con la enumeración mostrada en la figura 2.2, entonces su matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Verificar que la matriz asociada a un grafo es simétrica.

Grafos simples. Desde ahora en adelante nos preocuparemos de grafos que satisfacen las siguientes dos propiedades (el cual llamaremos un grafo simple) :

(i) No hay ejes conectando el mismo vértice consigo mismo (luego el grafo mostrado en la figura 2.1 no será admitido) ;

(ii) dos vértices tienen a lo más un eje que los conecta.

Si tenemos un grafo simple, entonces los coeficientes de $A_{\mathcal{G}}$ son 0 y 1 y los elementos de la diagonal son 0. Llamamos a la matriz de un grafo simple un amtriz de incidencia.

(b) Determine un grafo simple $\mathcal{G}$ cuya matriz de incidencia es

$$A_{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cadenas. Una cadena de ejes en un grafo es una colección finita de ejes diferentes de manera que el primer eje termina en el vértice donde empieza el segundo, el segundo termina en el vértice donde comienza el tercero, y así sucesivamente. Es claro que podemos tener dos cadenas diferentes que conectan dos vértices dados. La longitud de una cadena es el número de ejes que esta tiene.

Considere un grafo simple $\mathcal{G}$ con matriz de incidencia $A_{\mathcal{G}}$. Entonces podemos construir las matrices potencia : $A_{\mathcal{G}}^2$, $A_{\mathcal{G}}^3$,....

(c) Verifique que el coeficiete (i, j) de la matriz $A_{\mathcal{G}}^k$ es el número de cadenas diferentes de longitud k que existen entre los vértices i y j.

(d) Si el coeficiente (i, j) de la matriz $A_{\mathcal{G}}^k$ es 0 para todo $k \leq m$ y el coeficiente (i, j) de la matriz $A_{\mathcal{G}}^m$ es diferente de 0, entonces la cadena más corta que conecta los vértices i con j tiene ongitud m.

11.- Considere la siguiente información obtenida por un sociólogo acerca miembros dominantes de un grupo de personas. Hay 6 personas, denotadas por $x_1, ..., x_6$. La persona x_2 domina a x_4 y a x_5. La persona x_4 domina a x_1 y x_3. La persona x_5 domina a x_3. La persona x_3 domina a x_6. La persona x_6 no domina a nadie del grupo.

Determine un grafo que refleja la situación anterior y vea que este es un grafo simple. Calcule su matriz de incidencia A. Calcule las potencias de A para ver que A^3 detecta el miembro dominante del grupo.

CAPÍTULO 3

SISTEMAS LINEALES

Definición 3.0.1. — Consideremos un cuerpo K. Un sistema lineal es un sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q & = & b_p \end{array} \right.$$

donde $a_{ij}, b_n \in K$, para $i, n \in \{1, 2, ..., p\}$ y $j \in \{1, 2, ..., q\}$. En el caso que $b_j = 0$, para todo $j = 1, .., p$, decimos que el anterior es un sistema lineal homogéneo.

Si consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} \in M(p \times q; K)$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in M(p \times 1; K)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

entonces resolver el sistema lineal es equivalente a resolver el sistema

$$AX = B$$

En el próximo capítulo nos ocuparemos de la existencia de soluciones en K y su resolución. Por el momento, sólo nos preocuparemos del caso de sistemas lineales dos por dos.

Ejercicio 5. — *Verifique que el sistema lineal*

$$\left\{ \begin{array}{r} x - y = 7 \\ 2x - 2y = 13 \end{array} \right.$$

no tiene solución en $\mathbb{C}$. *¿Qué pasa en* $\mathbb{Z}_2$ *?*

Supongamos que tenemos un sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{array} \right.$$

el cual queremos resolver.

(i) Si $b = 0$, entonces de la primera ecuación obtenemos $x = \dfrac{e}{a}$ y la segunda ecuación permite obtener y.

(ii) Si $d = 0$, entonces de la segunda ecuación obtenemos $x = \dfrac{f}{c}$ y la primera ecuación permite obtener y.

(iii) Si $b = d = 0$, entonces el sistema tiene solución sólo si una de las ecuaciones es un múltiplo de la otra. En tal caso, obtenemos infinitas soluciones.

(iv) Si $bd \neq 0$, entonces podemos multiplicar la primera ecuación por d y la segunda por b, para obtener el sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{l} adx + bdy = ed \\ bcx + bdy = bf \end{array} \right.$$

Observemos que las soluciones de este nuevo sistema son las mismas que para nuestro sistema original. Al hacer la diferencia de las dos nuevas ecuaciones obtenemos

$$(ad - bc)x = ed - fb$$

Luego, si $ad - bc \neq 0$, obtenemos

$$x = \frac{ed - fb}{ad - bc}$$

y al usar cualquiera de las ecuaciones podemos obtener el valor de y. Si $ad - bc = 0$, entonces tenemos dos posibilidades :

(iv.1) si $ed - fb \neq 0$, entonces el sistema no tiene solución.

(iv.2) si $ed - fb \neq 0$, entonces tenemos infinitas soluciones.

Resumiendo todo lo anterior es el siguiente.

Teorema 3.0.2. — *Consideremos el sistema lineal*

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

entonces :

(i) Si $ad - bc \neq =$*, tenemos solución y es única.*

(ii) Si $ad - bc = 0$*, ó bien no hay solución ó bien hay infinitas soluciones.*

Ejercicio 6. — *Consideremos los siguientes sistemas lineales :*

$$(1) \begin{cases} ax + by = c \\ ax - by = c \end{cases}, \quad (2) \begin{cases} ax + by = c \\ bx + ay = c \end{cases}, \quad (3) \begin{cases} ax - by = c \\ bx + ay = d \end{cases}$$

(i) Encontrar condiciones para $a, b \in \mathbb{C}$ *para que el sistema lineal (1) tenga única solución.*

(ii) Encontrar condiciones para $a, b, c \in \mathbb{C}$ *para que el sistema lineal (2) tenga infinitas soluciones.*

(iii) Encontrar condiciones para $a, b, c \in \mathbb{C}$ *para que el sistema lineal (3) no tenga soluciones.*

3.1. Problemas

1.- Sea $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\} \subset \mathbb{R}^2$ una línea y $p = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 - L$. Si denotamos por $L^\perp$ la líneal que pasa por p y que es perpendicular a L y $\{q = (x_2, y_2)\} = L \cap L^\perp$, entonces definimos la distancia de p a L como

$$d(p, L) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Verificar que

$$d(p, L) = \frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Experimente con algunos ejemplos particulares.

2.- La compañia Sansanito produce libros y lápices. Un trabajador, en promedio, necesita 10 minutos para producir un lápiz mientras que necesita 20 minutos para producir un libro. La producción de un lápiz cuesta \$20 pesos y la de un libro cuesta \$500 pesos. La compañia Sansanito tiene para su producción diaria unos \$1500 pesos. Suponiendo que el trabajador trabaja 8 horas diarias y gasta todo el presupuesto diario, ¿Cuántos productos de cada clase se producen ?

3.- *Series discreta de Fourier*. Una técnica usual en ingeniería es la de aproximación de una función

$$f : [0, L] \to \mathbb{C}$$

continua a trozos, mediante una serie de Fourier

$$\widehat{f}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{2\pi i k x/L}$$

El análisis discreto de Fourier selecciona un valor entero $N > 0$ y los coeficientes c_k (coeficientes de Fourier de f) de manera que valgan las siguientes propiedades :

(i) $c_k = 0$ para $k \geq N$;

(ii) la serie finita

$$S_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2\pi i k x/L}$$

coincide con $f(x)$ para los valores $x \in \{0, L/N, 2L/N, 3L/N, ..., (N-1)L/N\}$.

Para encontrar los N valores c_0,...., c_{N-1}, debemos entonces resolver el siguiente sistema lineal, para $z = e^{2\pi i/N}$:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_{N-1} & = & f(0) \\ c_0 + c_1 z + c_2 z^2 \cdots + c_{N-1} z^{N-1} & = & f(L/N) \\ c_0 + c_1 z^2 + c_2 z^4 \cdots + c_{N-1} z^{2(N-1)} & = & f(2L/N) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_0 + c_1 z^{N-1} + c_2 z^{2(N-1)} \cdots + c_{N-1} z^{(N-1)^2} & = & f((N-1)L/N) \end{array} \right.$$

El sistema anterior, en forma matricial es dado como :

$$ZC = f_N$$

donde

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & z & z^2 & \cdots & z^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z^{N-1} & z^{2(N-1)} & \cdots & z^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \in M(N \times N; \mathbb{C})$$

$$f_N = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(L/N) \\ f(2L/N) \\ \vdots \\ f((N-1)L/N) \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix}$$

La matriz f_N es llamada la transformada discreta de Fourier de C y C es llamada la transformada discreta de Fourier de f_N.

Verificar la propiedad siguiente : Si $X, Y \in M(1 \times N; K)$, entonces

$$Z^{\,t}(X \star Y) = Z^{\,t}X \,\square\, Z^{\,t}Y$$

4.- *Una Cadena de Markov*. Consideremos una matriz cuadrada $A \in M(p \times p; \mathbb{R})$. Podemos considerar las matrices potencias de A :

$$A, A^2, A^3, ...$$

Nos podemos preguntar por el límite

$$\lim_{n \to \infty} A^n$$

el cual podría existir como no existir.

Dado un vector (que podemos considerar como un estado inicial) $x_0 \in M(p \times 1; \mathbb{R})$, podemos considerar los estados futuros $x_n = A^n x_0 = Ax_{n-1}$, $n = 1, 2, 3, 4, ...$ Aquí nos podemos preguntar sobre la tendencia de tales estados futuros.

Supongamos que tenemos un sistema de p empresas, digamos E_1,...., E_p, que producen un mismo artículo, los cuales son adquiridos mensualmente por una cierta población. Supongamos que durante el primer mes la empresa E_j tiene como clientes al $x_j^0\%$ de la población. Luego sabemos que debemos tener la igualdad :

$$x_1^0 + x_2^0 + \cdots + x_p^0 = 100$$

Consideremos la matriz

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_p^0 \end{pmatrix}$$

Supongamos que al mes siguiente la empresa E_j ha logrado mantener al $a_{jj}\%$ de sus clientes y ha atraido al $a_{jk}\%$ de los clientes de la empresa E_k.

Es claro que debemos tener que

$$a_{j1} + a_{j2} + \cdots + a_{jp} = 100$$

$$a_{ij} \in [0, 100]$$

Así, si denotamos por x_j^1 el porcentaje de población que es cliente de la empresa E_j en tal mes, entonces vale la igualdad :

$$x_j^1 = \sum_{k=1}^{p} \frac{a_{jk}}{100} x_k^0$$

De manera matricial lo anterior es expresado por

$$Ax_0 = x_1$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}/100 & a_{12}/100 & \cdots & a_{1p}/100 \\ a_{21}/100 & a_{22}/100 & \cdots & a_{2p}/100 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1}/100 & a_{p2}/100 & \cdots & a_{pp}/100 \end{pmatrix} \in M(p \times p; \mathbb{R})$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \vdots \\ x_p^1 \end{pmatrix}$$

Supongamos que el mismo fenómeno comercial se sigue en todos los siguientes meses. En tal caso, el movimientos de clientes es dado por la matriz

$$x_{r+1} = Ax_r = A^{r+1}x_0$$

donde

$$x_r = \begin{pmatrix} x_1^r \\ x_2^r \\ \vdots \\ x_p^r \end{pmatrix}$$

y x_j^r denota el porcentaje de la población que es cliente de la empresa E_j en el r-ésimo mes.

Ver que pasa al futuro con los clientes si tomamos $p = 3$,

$$x_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3; \mathbb{R})$$

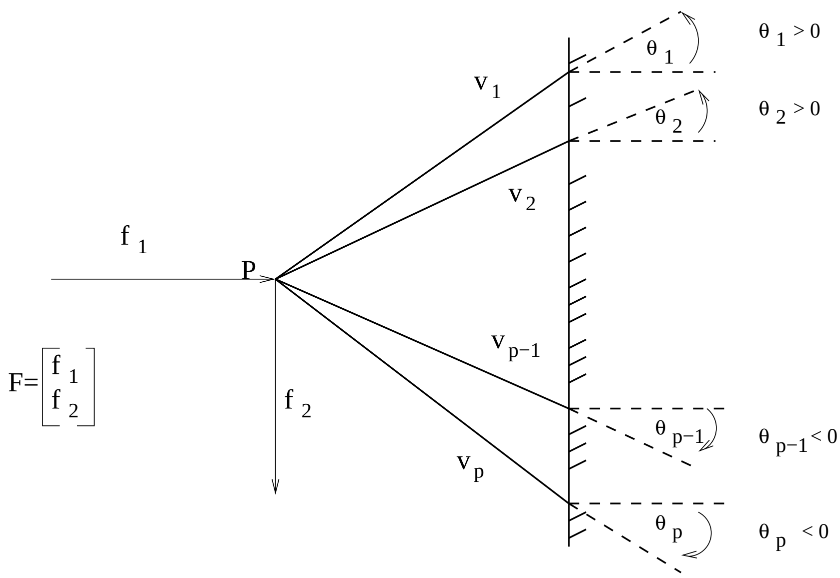

FIGURA 3.1. Una estructura articulada

5.- *Una Estructura Articulada.* Consideremos p varillas unidas en un extremo P tales que todas ellas están conectadas por el otro extremo a una pared. Para simplificar el problema, supondremos que los puntos de intersección de todas esas varillas, denotadas por v_1,..., v_p, con la pared son colineales (ver figura 3.1). Una fuerza f es aplicada sobre el punto P (que supondremos es una fuerza de dos componentes como se muestra en la misma figura). Si la componente horizontal de F la denotamos por f_1 y la componente vertical por f_2, entonces podemos escribir

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

La fuerza F induce fuerzas extensivas ó compresivas T_j en cada varilla v_j ; luego :

$$f_1 = -T_1\cos(\theta_1) - \cdots - T_p\cos(\theta_p)$$

$$f_2 = T_1\sin(\theta_1) + \cdots + T_p\sin(\theta_p)$$

Lo anterior puede escriirse de manera matricial como

$$AT = F$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} -\cos(\theta_1) & \cdots & -\cos(\theta_p) \\ \sin(\theta_1) & \cdots & \sin(\theta_p) \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_p \end{pmatrix}$$

En cada varilla v_j, la fuerza T_j causan expansiones ó compresiones en tal varilla. Si suponemos que las fuerzas son pequeñas, podemos usar la ley de Hooke : "*la deformación e_j por T_j es proporcional a T_j, con constante de proporcionalidad k_j (elasticidad de la varilla v_j).*"

Si consideramos la matriz diagonal $K = diag(k_1, k_2, ..., k_p)$ y la matriz de deformación

$$E = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_p \end{pmatrix},$$

entonces tenemos la igualdad

$$E = KT$$

Las nuevas coordenadas del punto

$$P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

por efecto de tal fuerza F serán

$$P^* = \begin{pmatrix} x_0 + d_1 \\ y_0 + d_2 \end{pmatrix}$$

Como debemos tener

$$e_j = -d_1 \cos(\theta_j) + d_2 \sin(\theta_j)$$

Si

$$D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix},$$

entonces lo anterior dice

$$E = {}^tA\ D$$

Todo lo anterior nos da el sistema lineal :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A\,T & = & F \\ K\,T & = & E \\ {}^tA\,D & = & E \end{array} \right.$$

Queremos conocer D ! !

Por ejemplo, si suponemos que $k_j \neq 0$ para todo $j = 1,..,p$, entonces K es invertible y lo anterior dice que

$$F = AT = AK^{-1}E = (AK^{-1t}A)\ D$$

Si tenemos que la matriz cuadrada de tamaño 2 dada por $AK^{-1t}A$ es invertible, entonces tenemos una única solución para D. Pero, ¿ que condiciones son necesarias para tener invertibilidad de tal matriz ?

6.- *Ajuste Lineal (Mínimos cuadrados : análisis de regresión).* Supongamos que tenemos algunos datos muestrales

$$(t,y) \in \{(t_1,y_1),....,(t_p,y_p)\}$$

Podemos graficar tal muestra en un plano Euclidiano $\overrightarrow{ty}$ (es decir, el plano con la noción usual de distancia). Queremos encontrar una recta L en tal plano que sea lo más cercano posible a nuestros datos, es decir, queremos encontrar valores reales $a, b \in \mathbb{R}$ de manera que

$$L:\ y = a + bt$$

se acerque lo más posible a la reproducción de nuestros datos. Para concretizar esto, por cada par $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ consideremos los errores

$$e_j = y_j - (a + bt_j),\ j = 1,...,p,$$

y consideremos el error total

$$\sigma(a,b) = \sum_{j=1}^{p} e_j^2 = \sum_{j=1}^{p} (y_j - a - bt_j)^2.$$

De esta manera, obtenemos una función polinomial de grado dos en a y b dada por

$$\sigma : \mathbb{R}^2 \to [0,+\infty) : (a,b) \mapsto \sigma(a,b).$$

Entonces. lo que andamos buscando es un mínimo global de la función polinomial σ de grado 2. Primero calculamos valores críticos :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial a} = -2\sum_{j=1}^{p} (y_j - a - bt_j) = 0$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial b} = -2\sum_{j=1}^{p} (y_j - a - bt_j)t_j = 0$$

Si denotamos por

$$T = \sum_{j=1}^{p} t_j, \quad Y = \sum_{j=1}^{p} y_j, \quad S = \sum_{j=1}^{p} t_j^2, \quad Q = \sum_{j=1}^{p} t_j y_j,$$

entonces las ecuaciones anteriores para encontrar los puntos críticos es equivalente a resolver el sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{rcl} pa + Tb & = & Y \\ Ta + Sb & = & Q \end{array} \right.$$

el cual es equivalente al sistema matricial

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc} p & T \\ T & S \end{array} \right)}_{A} \left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} Y \\ Q \end{array} \right)$$

La matriz $A \in M(2 \times 2; \mathbb{R})$ es simétrica. Un problema más general es el siguiente :

Dada una matriz $A \in M(p \times q; \mathbb{R})$ y una matriz $Y \in M(p \times 1; \mathbb{R})$, encontrar una matriz $X \in M(q \times 1; \mathbb{R}$ de manera que AX sea lo más próximo a Y. Si tomamos $E(X) = Y - AX$, entonces queremos minimizar $E(X)$ en términos de X, es decir, minimizar ${}^tE(X)\ E(X) = {}^t(Y - AX)\ (Y - AX)$. Derivando parcialmente en las coordenadas de X se obtiene que lo anterior nos lleva al problema de resolver ${}^tA\ AX = {}^tA\ Y$. Como $B = {}^tA\ A$ es una matriz simétrica, lo anterior es equivalente a resolver para X la ecuación $BX = Z$, donde B y Z son dadas. Más adelante estudiaremos las matrices simétricas y veremos como solucionar este problema.

CAPÍTULO 4

SOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES MEDIANTE ELIMINACIÓN DE GAUSS

En este capítulo mostraremos un método clásico para resolver sistemas lineales. Este método, llamado el método de eliminación de Gauss, el cual es de fácil programación. Por supuesto, existen métodos computacionales más rápidos, pero no los veremos en estas notas.

4.1. Sistemas lineales y matriciales

Ya vimos en el capítulo anterior que todo sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q & = & b_p \end{array}\right.$$

donde $a_{ij}, b_n \in K$, para $i, n \in \{1, 2, ..., p\}$ y $j \in \{1, 2, ..., q\}$, puede escribirse como el sistema lineal matricial

$$AX = B$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} \in M(p \times q; K)$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in M(p \times 1; K)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Ahora continuaremos con nuestra forma matricial.

Definición 4.1.1. — La matriz aumentada del sistema lineal anterior es dada por

$$(A|B)$$

La idea principal del método a presentar (y de la mayoría de los métodos existentes) es que si tenemos un sistema lineal

$$AX = B$$

y multiplicamos a la izquierda por una matriz invertible C (de tamaño p), obtenemos el sistema lineal

$$CAX = CB$$

que tiene las mismas soluciones que el anterior. La matriz aumentada del nuevo sistema lineal es dada por $(CA|CB)$.

Ahora, uno quiere que la matriz CA sea más simple que A, por ejemplo, que tenga muchos coeficientes que sean 0. En la siguiente sección veremos algunas matrices simples C que nos permitirán hacer el procedimiento de simplificación anterior.

4.2. Operaciones elementales

4.2.1. Matrices de intercambio de filas E_{ij}. — Por cada par (i, j) tales que $1 \leq i < j \leq p$, consideramos la matriz $E_{ij} = (a_{uv})$ cuyos coeficientes a_{uv} satisfacen :

$$a_{uu} = 1, \ u \notin \{i, j\}$$

$$a_{ij} = a_{ji} = 1$$

$$a_{uv} = 0, \text{para todos los otros coeficientes}$$

Multiplicar nuestro sistema por E_{ij} a la izquierda es equivalente a intercambiar las filas i con j de nuestro sistema original.

Ejercicio 7. — *Verificar que* $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$.

4.2.2. Matrices de amplificación de filas E_j^λ. — Por cada valor $\lambda \in K - \{0\}$ y $1 \leq j \leq p$, consideramos la matriz $E_j^\lambda = (a_{uv})$ cuyos coeficientes a_{uv} satisfacen :

$$a_{uu} = 1,\ u \neq j$$
$$a_{jj} = \lambda$$
$$a_{uv} = 0, \text{para todos los otros coeficientes}$$

Multiplicar nuestro sistema por E_j^λ a la izquierda es equivalente a multiplicar la fila j de nuestro sistema original por el factor λ.

Ejercicio 8. — *Verificar que* $(E_j^\lambda)^{-1} = E_j^{1/\lambda}$.

4.2.3. Matrices de amplificación y suma de filas E_{ij}^λ. — Por cada par (i, j) tales que $1 \leq i \neq j \leq p$, y cada $\lambda \in K$, consideramos la matriz $E_{ij}^\lambda = (a_{uv})$ cuyos coeficientes a_{uv} satisfacen :

$$a_{uu} = 1$$
$$a_{ji} = \lambda$$
$$a_{uv} = 0, \text{para todos los otros coeficientes}$$

Multiplicar nuestro sistema por E_{ij}^λ a la izquierda es equivalente a reemplazar la fila j por la suma de la fila j con un multiplo por λ de la fila i.

Ejercicio 9. — *Verificar que* $(E_{ij}^\lambda)^{-1} = E_{ij}^{-\lambda}$.

4.2.4. Procedimiento. — Multiplicando por la izquierda, de manera adecuada, estas matrices elementales a nuestro sistema $AX = B$, podemos obtener uno nuevo de la forma $A^*X = B^*$, donde la matriz $A^* = (a_{ij}^*)$ es tal que si $a_{ii}^* \neq 0$, entonces $a_{ki}^* = 0$ para $k \neq i$. Nuestra matriz A^* es de la forma MA, donde M es una matriz invertible de tamaño p (al ser producto de las matrices elementales que son invertibles).

Ejemplo 4.2.1. — Consideremos el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rcr} -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 & = & -4 \\ -3x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 15x_4 & = & -3 \end{array}\right.$$

De manera matricial este sistema es :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 & -6 \\ -3 & 6 & 3 & -15 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4// -3 \end{pmatrix}}_{B}$$

Si tomamos $M = E_{21}^1 E_2^{1/3} E_{12}^3 E_1^{-1/2}$, entonces

$$MA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$MB = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego obtenemos el nuevo sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + 5x_3 + x_4 & = & 3 \\ x_2 + 3x_3 - 2x_4 & = & 1 \end{array} \right.$$

el cual tiene las mismas soluciones que el original. Este es de fácil resolución, siendo estas :

$$x_1 = 3 - 5x_3 - x_4$$

$$x_2 = 1 - 3x_3 + 2x_4$$

Luego, tenemos infinitas soluciones, cada una de ellas dada por cada posible par (x_3, x_4).

Ejercicio 10. — *Considere el sistema lineal*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 4 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 & = & 14 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + 4x_4 & = & 17 \end{array} \right.$$

Proceder como en el caso anterior para ver que este sistema no tiene soluciones.

4.3. Encontrando inversas

Supongamos que tenemos una matriz cuadrada A, de tamaño p, y queremos saber si esta es invertible o no. En otras palabras, queremos saber si existe una matriz cuadrada X, también de tamaño p, satisfaciendo la ecuación

$$AX = I_p$$

Usando matrices elementales apropiadas para multiplicar a la izquierda, digamos

$$E_1, E_2, ..., E_m,$$

podemos obtener

$$\underbrace{E_m E_{m-1} \cdots E_2 E_1 A}_{N} X = E_m E_{m-1} \cdots E_2 E_1$$

donde N es una matriz triangular superior ; además, tenemos que cada vez que tenemos un elemento en la diagonal no cero, entonces todos los coeficientes restantes de esas columna son cero. En particular, si A es invertible, entonces podemos lograra $N = I$. Esta observación nos permite obtener el siguiente resultado.

Teorema 4.3.1. — *Sea A una matriz de tamaño 2. Entonces,*

$$A \text{ es invertible}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\exists X \in M(p \times p; K) \text{ solución de } AX = I$$
$$\Longleftrightarrow$$
existen matrices elementales E_1, E_2,..., E_m, tales que
$$E_m E_{m-1} \cdots E_2 E_1 = X = A^{-1}$$

4.4. Métodos iterativos

El método de eliminación de Gauss nos da una manera directa para encontrar soluciones de un sistema lineal $Ax = b$. El método de iteración permite encontrar soluciones aproximadas. Existen variados métodos, pero sólo mencionares uno de ellos, el método de Jacobi. Para este método, supondremos que A es una matriz invertible.

La idea es multiplicar nuestro sistema $Ax = b$ a la izquierda por matrices elementales de manera que ahora podamos asumir que $a_{ii} \neq 0$, para todo i. Luego, podemos escribir

$$x = (I - A)x + b$$

El método iterativo es

$$x^{(n+1)} = (I - A)x^{(n)} + b$$

donde $x^{(0)}$ es un vector de partida de nuestra elección. Si los vectores $x^{(n)}$ convergen a un vector x, entonces X es la solución buscada.

Teorema 4.4.1. — *Si nuestra matriz invertible $A = (a_{ij}) \in M(n \times n; \mathbb{R})$ satisface que*

$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + \cdots + |a_{i(i-1)}| + |a_{i(i+1)}| + \cdots + |a_{in}|, \quad \forall i = 1, ..., n,$$

entonces el método converge a la solución x del sistema lineal $Ax = b$.

4.5. Problemas

1.- Escribir un programa para el método de eliminación de Gauss (al menos describa el algoritmo).

2.- Discutir la problemática del punto flotante en un computador y las programación que usted realizó.

3.- Considere una matriz de tamaño 2 con coeficientes reales

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

y utilize el método anterior para determinar condiciones en esos coeficientes para que la matriz A sea invertible. En caso que A sea invertible, obtenga la igualdad

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

4.- Determine la forma de la inversa para una matriz invertible de tamaño 3.

5.- Resuelva los siguientes sistemas lineales :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 & = & 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 & = & 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 & = & 30 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 & = & 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 & = & 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 & = & 40 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 & = & 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 & = & 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 & = & 4 \end{array} \right.$$

6.- *Modelo de entrada-salida de Leontief* El siguiente modelo es frecuentemente usado en economía. Supongamos que tenemos una sistema económico consitente de n empresas, digamos $E_1, ..., E_n$. Existen dos tipos de demandas en cada una de esas empresas. La primera es la demanda externa de fuera del sistema (por ejemplo necesidades de importación desde otro sistema económico). La segunda demanda es interna (lo que necesita cada una de las empresas de las otras del mismo sistema económico).

Supongamos que la demanda externa de la j-ésima empresa E_j es denotada por e_j. Denotemos por a_{ij} la demanda interna de la empresa E_j hecha a la empresa E_i, es decir, la empresa E_j necesita a_{ij} unidades producidas por la empresa E_i para producir una de sus unidades.

Denotemos por x_j las unidades producidas por la empresa E_j.

Supongamos que la producción de cada empresa es igual a su demanda, es decir, todo lo que se produce se vende a las otras empresas.

Tenemos que la demanda total de cada empresa es la suma de la demandas externa e interna. Por ejemplo, calculemos la demanda de la empresa E_1. Primero, veamos la demanda interna. Para que E_j pueda producir 1 producto, ella necesita a_{1j} productos de la empresa E_1. Ahora, como E_j

produce x_j productos, tenemos que la demanda interna de la empresa E_1 hecha por E_j es $a_{1j}x_j$. De es ta manera, la demanda total hecha a la empresa E_1 es

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + e_1$$

Como estamos suponiendo que toda la producción de E_1 es usada, debemos también tener la igualdad

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + e_1 = x_1$$

De esta manera, obtenemos el sistema lineal

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + e_1 & = & x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + e_1 & = & x_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + e_1 & = & x_n \end{cases}$$

ó de manera equivalente,

$$\begin{cases} (a_{11}-1)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + e_1 & = & 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-1)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + e_1 & = & 0 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-1)x_n + e_1 & = & 0 \end{cases}$$

Considere el caso $n = 3$, $a_{11} = 0.1$, $a_{12} = 0.2$, $a_{13} = 0.3$, $a_{21} = 0.1$, $a_{22} = 0.3$, $a_{23} = 0.2$, $a_{31} = 0.1$, $a_{32} = 0.5$, $a_{33} = 0.2$, $e_1 = 1$, $e_2 = 2$ y $e_3 = 3$, y vea que pasa en este caso.

7.- *Problemas de gestión de recursos* Supongamos que tenemos una empresa con n oficinas, digamos $O_1, ..., O_n$. Una empresa externa entrega algunos productos necesarios por cada oficina, digamos P_1,...,P_m. La oficina O_i consume a_{ji} productos P_j por cada persona que trabaja en tal oficina. Si denotamos por p_j la cantidad de productos P_j entregados, y todos los productos son usados, y denotamos por x_j la cantidad de personas de la oficia O_j, entonces tenemos el siguiente sistema lineal.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & p_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & p_m \end{cases}$$

Consideremos el caso $n = m = 3$, $p_1 = 100$, $p_2 = 50$, $p_3 = 70$, $a_{ji} = 2(i+j)$. ¿Es posible distribuir 500 personas de la empresa en las tres oficinas de manera que tengamos solución a nuestro problema de distribución de productos ?

8.- Use el método iterativo de jacobi para buscar soluciones aproximadas del problema lineal $Ax = b$ para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

CAPÍTULO 5

ESPACIOS VECTORIALES

5.1. Espacios vectoriales

Definición 5.1.1. — Sea K un cuerpo. Un triple $(V, +, \cdot)$ es llamado un espacio vectorial sobre el cuerpo K si V es un conjunto no vacío,

$$+ : V \times V \to V : (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$$

y

$$\cdot : K \times V \to V : (\lambda, v) \mapsto \lambda v$$

son funciones, llamadas suma y amplificación del espacio vectorial, satisfaciendo las siguentes propiedades :

1.- la suma es asociativa, es decir, para todo triple $v_1, v_2, v_3 \in V$ vale que

$$(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$$

2.- la suma es commutativa, es decir, para todo par $v_1, v_2 \in V$ vale que

$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1$$

3.- existe un neutro $0_V \in V$ para la suma, es decir, para todo $v \in V$ vale que

$$v + 0_V = v$$

4.- existen inversos para la suma, es decir, para todo $v \in V$ existe $-v \in V$ tal que

$$v + (-v) = 0_V$$

5.- para todo par $\lambda, \mu \in K$ y $v \in V$ vale que

$$\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$$

6.- para todo par $\lambda, \mu \in K$ y $v \in V$ vale que

$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$$

7.- para todo $\lambda \in K$ y todo par $v_1, v_2 \in V$ vale que

$$\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$$

8.- para todo $v \in V$ vale que

$$1v = v$$

Los elementos de V serán llamados los vectores del espacio vectorial mientras que los elementos del cuerpo K serán llamados los escalares.

Ejercicio 11*. — Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K.*
(i) Verificar que el neutro para la suma y los inversos para la suma son únicos.
(ii) $\lambda 0_V = 0_V$ para todo escalar λ.
(iii) $0v = 0_V$ para todo vector v.
(iv) $(-1)v = -v$ para todo vector v.

5.2. Ejemplos de espacios vectoriales

5.2.1. K^n**. —** Consideremos un cuerpo K y para cada entero $n \in \{1, 2, 3, ...\}$ consideremos el producto cartesiano

$$K^n = \{(x_1, ..., x_n) : x_1, ..., x_n \in K\}$$

Con la suma

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) := (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

y la amplificación

$$\lambda(x_1, ..., x_n) := (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$$

tenemos un espacio vectorial sobre K.

5.2.2. $M(p \times q; K)$**. —** El conjunto de las matrices $M(p \times q; K)$, K un cuerpo, con las operaciones usuales de suma de matrices y amplificación, es un espacio vetorial sobre K.

5.2.3. Sucesiones. — Sea K un cuerpo y sea

$$V = K^{\mathbb{N}} = \{s : \mathbb{N} \to K : n \mapsto s(n)\}$$

el conjunto de todas las sucesiones en K. Definiendo la suma como la suma usual de funciones

$$s_1 + s_2 : \mathbb{N} \to K : n \mapsto s_1(n) + s_2(n)$$

y la amplificación usual de funciones

$$\lambda s : \mathbb{N} \to K : n \mapsto \lambda s(n)$$

obtenemos un espacio vectorial sobre K.

5.2.4. $C^r([a,b];\mathbb{R})$**. —** Sea $C^r([a,b];\mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ que son r veces derivables (decimos que son de clase C^r), donde $r\in\{0,1,2,3,...\}\cup\{\infty\}\cup\{\omega\}$. Del cálculo en una variable sabemos que tanto la suma usual de funciones de clase C^r y la amplificación de una función de clase C^r por un real siguen sinedo de clase C^r. Luego, $C^r([a,b];\mathbb{R})$ con la suma usual de funciones y amplificación usual por reales es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

5.2.5. $K[x]$**. —** Sea K un cuerpo y $K[x]$ el conjunto de todos los polinomios en la variable x y coeficientes en K. Entonces, con la suma usual de polinomios y amplificación usual por escalares tenemos que $K[x]$ es un espacio vectorial sobre K.

Si denotamos por $K_n[x]$ el subconjunto de polinomios de grado menor ó igual a n, entonces también tenemos que es un espacio vectorial sobre K.

5.2.6. Subcuerpos. — Sea K un subcuerpo del cuerpo L (decimos que L es un cuerpo extensión de K). Entonces, con las operaciones usuales de suma y producto tenemos que L es un espacio vectorial sobre K. Por ejemplo, $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ ó sobre $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ ó sobre $\mathbb{R}$.

5.2.7. Ecuaciones diferenciales. — Consideremos la ecuación diferencial lineal

$$(*) \quad a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$$

donde $a_j\in C^0[a,b]$, para $j=0,1,...,n$. Denotemos por V al conjunto de las soluciones de $(*)$ definida en el intervalo $[a,b]$. Entonces V , con la suma usual de funciones y amplificación usual de funciones por escalares, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y también sobre $\mathbb{C}$.

5.2.8. Ecuaciones integrales. — Sea $k:[0,a]\times[0,a]\to\mathbb{C}:(x,t)\mapsto k(x,t)$ una función continua y sea $\lambda\in\mathbb{C}$ dado. Sea V el conjunto de todas las funciones continual $y:[a,b]\to\mathbb{C}$ que satisfacen la ecuación integral

$$\int_0^a k(x,t)y(t)\;dt+\lambda y(x)=0,\quad x\in[0,a]$$

Entonces V , con la suma usual de funciones y amplificación usual de funciones por escalares, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

5.2.9. Suma directa de espacios vectoriales. — Sea K un cuerpo y sean V_1,...., V_n espacios vectoriales sobre K. Consideremos el producto cartesiano

$$V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n = \{(v_1, v_2, ..., v_n) : v_j \in V_j\}$$

Si definimos las suma componente a componente

$$(v_1, ..., v_n) + (w_1, ..., w_n) := (v_1 + w_1, ..., v_n + w_n)$$

y la amplificación

$$\lambda(v_1, ..., v_n) := (\lambda v_1, ..., \lambda v_n)$$

entonces obtenemos un espacio vectorial sobre K, llamado la suma directa de V_1,...., V_n, el cual es denotado por $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$.

Observe que en el caso particular $V_j = K$, obtenemos el ejemplo dado en sección 5.2.1.

5.3. Subespacios vectoriales

Definición 5.3.1. — Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Supongamos que tenemos un subconjunto $W \subset V$, $W \neq \emptyset$. En caso que

(i) para todo par $w_1, w_2 \in W$ vale que $w_1 + w_2 \in W$; y

(ii) para todo $\lambda \in K$ y todo $w \in W$ vale que $\lambda w \in W$,

diremos que W es un subespacio vectorial de V, lo cual denotaremos por el símbolo $W < V$.

Ejercicio 12. — *Sea V un espacio vectorial sobre K y $W < V$. Verificar que la suma y amplificación en V son heredadas por W para ver W como un espacio vectorial sobre K. De esta manera, un subespacio vectorial W de un espacio vectorial V sobre K no es nada más que un espacio vectorial sobre K con las mismas operaciones de suma y amplificación.*

Teorema 5.3.2. — *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Si tenemos una colección (finita ó infinita) de subespacios vectoriales $\{W_j\}_{j \in J}$, entonces la intersección*

$$W = \bigcap_{j \in J} W_j$$

es también un subespacio vectorial de V.

Demonstración. — Como $0_V \in W_j$ para todo $j \in J$, tenemnos que $0_V \in W$; es decir, $W \neq \emptyset$. Sean $u, v \in W$ y $\lambda \in K$. Como $u, v \in W_j$ para todo $j \in J$ y cada $W_j < V$, tenemos que $u + v, \lambda u \in W_j$, para todo $j \in J$; en particular $u + v, \lambda u \in W$.

□

Definición 5.3.3. — Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sean $v_1, ..., v_r \in V$ y $\lambda_1, ..., \lambda_r \in K$. Todo vector de la forma

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_r v_r$$

des llamado una combinación lineal de los vectores v_1,..., v_r.

Teorema 5.3.4. — *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sea $S \subset V$, $S \neq \emptyset$. Ver que el subconjunto de V formado de todas las posibles combinaciones lineales de los vectores en S es un subespacio vectorial de V.*

Demonstración. — Sea W_S el subconjunto de V formado de todas las posibles combinaciones lineales de los vectores en S. Ya que $S \neq \emptyset$, existe $v_0 \in S$. Luego $0_V = 0v_0 \in W_S$, es decir, $W_S \neq \emptyset$. Como la suma de dos combinaciones lineales es nuevamente una combianción lineal y la amplificación por un escalar de una combinación lineal es también una combinación lineal, entonces $W_S < V$. □

5.3.1. Algunos ejemplos de subespacios vectoriales. —

1.- $K_n[x] < K[x]$, donde K es un cuerpo.

2.- $C^s[a, b] < C^r[a, b]$, para $s \geq r$.

3.- **Subespacios generados por subconjuntos**. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sea $S \subset V$, $S \neq \emptyset$. Lo más probable es que S no sea un subespacio vectorial de V. Podemos considerar la intersección de todos los subespacios de V que contiene a S. Ya que V contiene a S, esta colección es no vacía. Denotemos tal intersección por $< S >$.El teorema 5.3.2 nos asegura que $< S >$ es un subespacio vectorial de V y, por la construcción, este resulta ser el subespacio vectorial más pequeño de V que contiene a S. Claramente toda combinación lineal de vectores en S

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_r s_r$$

donde $a_j \in K$ y $s_j \in S$, debe pertenecer a $< S >$ por la propiedad de ser subespacio de V. De esta manera, el subespacio $W_S < V$, formado de todas las posibles combinaciones lineales de los vectores en S, debe estar contenido en $< S >$. Pero ahora la minimalidade $< S >$ nos dice que

$$< S >= W_S$$

Definición 5.3.5. — El subespacio $< S >$ es llamado el subespacio generado por S.

4.- Sea K un cuerpo. Tenemos que

$$W_1 = \{A \in M(p \times q; K) : A \text{ es triangular superior}\} < M(p \times q; K)$$

$$W_2 = \{A \in M(p \times q; K) : A \text{ es triangular inferior}\} < M(p \times q; K)$$

$$W_3 = \{A \in M(p \times p; K) : trA = 0\} < M(p \times p; K)$$

donde trA denota la traza de A (la suma de todos los elementos de su diagonal).

$$W_4 = \{A \in M(p \times p; K) : {}^tA = A\} < M(p \times p; K)$$

Observemos que si $A \in M(p \times p; K)$, entonces

$$A = \frac{A + {}^tA}{2} + \frac{A - {}^tA}{2}$$

$$\frac{A + {}^tA}{2} \in W_4$$

$$\frac{A - {}^tA}{2} \in W_3$$

es decir, toda matriz cuadrada es suma de una matriz simétrica con una de traza cero.

5.- Sea K un cuerpo y $A \in M(p \times p; K)$ y consideremos el sistema lineal $AX = 0$, donde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Entonces

$$W = \{(x_1, ..., x_p) \in K^p : AX = 0,\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}\} < K^p$$

5.4. Problemas

1.- Completar los detalles de los ejemplos anteriores.

2.- Sea $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. ¿Es $Q < \mathbb{R}^2$?

3.- Sea K un cuerpo y sea

$$K(x) = \{\frac{p(x)}{q(x)} : p(x), q(x) \in K[x],\ q(x) \neq 0\}$$

¿Es $K(x)$ un espacio vectorial sobre K ?

4.- Sea
$$H = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \text{ grado de } p(x) = 2\}$$
¿Es $H < \mathbb{R}[x]$?

5.- Determine el subespacio de $M(2 \times 2; K)$ generado por
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

6.- Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sea $W < V$. Definimos en V la siguiente relación de equivalencia :
$$v_1 \equiv v_2 \iff v_1 - v_2 \in W$$
Denotemos por $[v]$ la case de $v \in V$, por V/W al conjunto de las clases de equivalencia y por $\pi : V \to V/W : v \mapsto [v]$ a la proyección natural.

Verificar que las siguientes operaciones están bién definidas :

(i) $[v_1] + [v_2] = [v_1 + v_2]$;

(ii) $\lambda[v] = [\lambda v]$.

Una vez verificado lo anterior, verificar que con estas operaciones tenemos que V/W resulta ser un espacio vectorial ; llamado el espacio vectorial cociente de V por W. Observar que valen las propiedades :

(iii) $\pi(v_1 + v_2) = \pi(v_1) + \pi(v_2)$;

(iv) $\pi(\lambda v) = \lambda\pi(v)$.

7.- Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, entonces V es también un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Más generalmente, si K es un cuerpo y $L \subset K$ es un subcuerpo de K, entonces todo espacio vectorial sobre K es también un espacio vectorial sobre L. Ver, en particular, que $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$.

8.- Dar un ejemplo de un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ que no es sobre $\mathbb{C}$.

CAPÍTULO 6

BASES

6.1. Conjuntos linealmente independientes

Definición 6.1.1. — Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Un subconjunto $S \subset V$ es llamado linealmente independiente si para cada colección finita

$$\{v_1, ..., v_m\} \subset S$$

la ecuación

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = 0_V$$

tiene como únicas soluciones en K a

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$$

En caso contrario diremos que S es un conjunto linealmente dependiente.

Consideremos un espacio vectorial V sobre un cuerpo K y $S \subset V$. De nuestra definición, vemos que si $S = \emptyset$, entonces S es trivialmente un conjunto linealmente independiente : en caso contrario, debe existir una subconjunto finito en S para el cual existe solución no trivial en K, una contradicción al hecho que S sea vacío. Por otro lado, si $S \neq \emptyset$, entonces podemos considerar el subespacio vectorial $W_S =< S >$ generado por S. Si S es un conjunto linealmente independiente, entonces tenemos que para todo $R \subset S$, $R \neq \emptyset$, $R \neq S$, vale que $< S > \neq < R >$. En efecto, si tenemos igualdad, entonces para cada $v_0 \in S - R$ tenemos que existen vectores $v_1, ..., v_n \in R$ y existen escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ tal que

$$v_0 = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

Pero en tal caso, tenemos que :

$$-v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_V$$

de donde vemos que S no es un conjunto linealmente independiente, una contradicción. Recíprocamente, supongamos que tenemos un subconjunto $S \subset V$, $S \neq$

$\emptyset$, con la propiedad que para todo $R \subset S$, $R \neq \emptyset$, $R \neq S$ vale que $< R > \neq < S >$. Entonces ocurre que S es necesariamente un conjunto linealmente independiente. En efecto, en caso contrario tendremos un subconjunto finito de S, digamos $\{v_1, ..., v_n\} \subset S$, y escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K - \{0\}$ tal que

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_V$$

Esto nos dice que

$$v_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n} v_1 - \cdots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} v_{n-1},$$

de donde vemos que si $R = S - \{v_n\}$, entonces $< R > = < S >$, una contradicción a la propiedad de S. Así, obtenemos una definición equivalente para conjuntos linealmente independientes :

Definición 6.1.2. — Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y $S \subset V$. Diremos que S es un conjunto linealmente independiente si ocurre cualquiera de las siguientes dos casos :
(i) $S = \emptyset$; ó
(ii) $S \neq \emptyset$ y para todo $R \subset S$, $R \neq \emptyset$, $R \neq S$ vale que $< R > \neq < S >$.

Ejemplo 6.1.3. — Sea K un cuerpo y $V = K[x]$. Tomemos $S = \{v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2\}$. Como S es un conjunto finito, para ver si S es un conjunto linealmente, tenemos que buscar las soluciones en K de la ecuación

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{K[x]}$$

ó equivalentemente

$$\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 = 0_{K[x]}$$

Pero por la propiedad de igualdad de polinomios tenemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, es decir S es un conjunto linelamente independiente. En este caso no es difícil ver que

$$< 1, x, x^2 > = K_2[x]$$

Por otro lado, si escogemos $R = \{w_1 = 2, w_2 = x, w_3 = x - 1\}$, entonces R resulta ser un conjunto linealmente dependiente. En efecto

$$w_1 + 2w_2 - w_3 = 0_{K[x]}$$

6.2. Bases

Definición 6.2.1. — Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y $S \subset V$. Diremos que S es una base para V si S es un conjunto linealmente independiente tal que $< S >= V$, es decir, S es un conjunto linealmente independiente que genera V.

Ejemplo 6.2.2. — Sea K un cuerpo y consideremos el espacio vectorial $K_2[x]$. Sea

$$S = \{v_1 = 1, v_2 = 2x, v_3 = x^2 - x\}$$

(i) Si, por ejemplo, $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{Q}[\sqrt{2}], \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, entonces S es una base de $K_2[x]$.
(ii) Si $K = \mathbb{Z}_2$, entonces $v_2 = 0_{K_2[x]}$, luego S no puede ser una base ya que es un conjunto linealmente dependiente (aunque S genera $K_2[x]$).

6.3. Existencia de bases

Ahora nos preocuparemos por el problema de existencia de bases para espacios vectoriales. Necesitaremos recordar algunos hechos básicos.

Definición 6.3.1. —
1.- Un conjunto parcialmente ordenado es un par $(A, \leq)$, donde A es un conjunto y $\leq$ es una relación de orden, es decir,
(i) $a \leq a$, para todo $a \in A$ (reflexividad) ;
(ii) $a \leq b$, $b \leq a$ aseguran que $a = b$ (antisimetría) ;
(iii) $a \leq b$, $b \leq c$ aseguran que $a \leq c$ (transitividad).

2.- Un elemento $m \in A$ es llamado un elemento maximal si para cada $a \in A$ tal que $m \leq a$ asegura que $a = m$.

3.- Una cadena en $(A, \leq)$ es un subconjunto de $C \subset A$ con la propiedad que para todo par $x, y \in C$ vale que $x \leq y$ ó bien $y \leq x$.

4.- Una cota superior de una cadena $C \subset A$ es un elemento $s \in A$ tal que para todo $x \in C$ vale que $x \leq s$.

***Lema 6.3.2* (Lema de Zorn)**. — *Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Si toda cadema posee una cota superior, entonces existe un elemento maximal.*

Ahora procederemos a nuestro problema de existencia de bases. De hecho, veremos como obtener bases que contegan a algún conjunto linealmente independiente dado.

***Teorema 6.3.3* (Completación de bases).** — *Sea V un espacio vectorial y $S \subset V$ un conjunto linealmente independiente. Entonces existe una base $\mathcal{B}$ de V con la propiedad que $S \subset \mathcal{B}$.*

Demonstración. — Sea $S \subset V$ un conjunto linealmente independiente. Si S ya es una base de V, entonces estaremos listos. Supongamos ahora que S no es base de V. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto formado por todos los subconjuntos linealmente independientes de V que contengan a S. En particular, tenemos que $S \in \mathcal{A}$. Consideremos la relación $\leq$ dada por inclusión, es decir, $U, V \in \mathcal{A}$ son tales que $U \leq V$ sí y sólo si $U \subseteq V$. Luego, para todo $U \in \mathcal{A}$ vale que $S \leq U$.

Consideremos una cadena $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ y formemos el subconjunto de V dado por

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{C}} U$$

Es claro que $S \subset X$. Veamos que X es un conjunto linealmente independiente. En efecto, supongamos que tenemos vectores $v_1, ..., v_n \in X$ y escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ tales que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_V$. Supongamos que $v_j \in U_j \in \mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es una cadena, tenemos que existe $U \in \mathcal{C}$ tal que $v_1, ..., v_n \in U$. Como U es un conjunto linealmente independiente, tenemos que $\lambda_j = 0$, para todo j.

De esta manera, vemos que $X \in \mathcal{A}$ y que X es una cota superior para la cadena $\mathcal{C}$. Esto nos dice que toda cadena en $(\mathcal{A}, \leq)$ posee cota superior. El lema de Zorn entonces nos asegura la existencia de un elemento maximal $\mathcal{B} \in \mathcal{A}$. Tenemos que $\mathcal{B} \subset V$ contiene a S y es un conjunto linealmente independiente. Veamos que de hecho $\mathcal{B}$ es la base buscada. Sólo nos falta ver que $\mathcal{B}$ genere V. Si no fuese así, existiría un vector $v_0 \in V - < \mathcal{B} >$. Esto nos asegurarí que $\mathcal{B} \cup \{v_0\}$ es también un conjunto linealmente independiente de V que contiene a S y contiene a $\mathcal{B}$ de manera estricta. Esto contradice la maximilidad de $\mathcal{B}$.

□

***Observación 6.3.4*.** — La demostración anterior de existencia de bases es abstracta. En la próxima sección procederemos a dar un algoritmo de completación de bases para el caso de espacios vectoriales de dimensión finita.

6.4. Dimensión

Como consecuencia de la proposición 6.3.3 tenemos que todo espacio vectorial tiene bases. Un esdpacio vectorial puede tener muchas bases diferentes. Veremos a continuación que toda base de un espacio vectorial debe contener la misma cantidad de vectores.

Teorema 6.4.1. — *Sea V un espacio vectorial que tiene una base de cardinalidad finita. Entonces, toda base de V tiene la misma cardinalidad*

Demonstración. — Sea K el cuerpo sobre el cual V es espacio vectorial. Basta verificar la siguiente situación : Sea $\mathcal{B}_1 = \{v_1, ..., v_n\}$ una base finita dada y $\mathcal{B}_2$ otra base de V que tiene cardinalidad mayor ó igual a n (incluyendo ∞), entonces tal cardinalidad debe ser n.

Procedamos por contradicción, es decir, siupongamos que $\mathcal{B}_2$ tiene cardinalidad estrictamente mayor a n. De esta manera podemos escoger un subconjunto de $\mathcal{B}_2$ de cardinalidad $n+1$, digamos

$$S = \{w_1, ..., w_{n+1}\} \subset \mathcal{B}_2$$

1.- Como $\mathcal{B}_1$ es base, existen escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ tales que

$$(*1) \quad w_1 = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

Como S es un conjunto linelamente independiente, $w_1 \neq 0_V$, luego, debe existir alguno de los escalares $\lambda_j \neq 0$. Módulo permutación de los índices, podemos suponer que $\lambda_1 \neq 0$. Luego,

$$v_1 \in < w_1, v_2, ..., v_n >$$

y en particular

$$< w_1, v_2, ..., v_n >= V$$

Veamos que $S_1 = \{w_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base de V. Sólo nos falta ver que S_1 es un conjunto linealmente independiente. Consideremos la ecuación

$$(**1) \quad \alpha_1 w_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V$$

para $\alpha_j \in K$. Luego, al reemplazar $(*1)$ en $(**1)$ obtenemos

$$(***1) \quad \alpha_1\lambda_1 v_1 + (\alpha_1\lambda_2 + \alpha_2)v_2 + \cdots + (\alpha_1\lambda_n + \alpha_n)v_n = 0_V$$

Ya que $\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente, tenemos que

$$\alpha_1\lambda_1 = 0$$

$$\alpha_1\lambda_j + \alpha_j = 0, \ j = 2, ..., n.$$

Ya que hemos supuesto $\lambda_1 \neq 0$, las ecuaciones anteriores aseguran que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, es decir, S_1 es un conjunto linealmente independiente y luego una base de V.

2.- Ahora, al ser S_1 una base de V, podemos encontrar escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ tales que

$$(*2) \quad w_2 = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

Como S es un conjunto linelamente independiente, $w_2 \neq 0_V$, luego, debe existir alguno de los escalares $\lambda_j \neq 0$. Veamos que en efecto existe $j \geq 2$ tal que $\lambda_j \neq 0$. Si no fuese así, tendríamos que $w_2 = \lambda_1 w_1$, una contradicción al hecho que S es linealmente independiente. Otra vez, módulo permutación de índices, podemos asumir $\lambda_2 \neq 0$. Luego,

$$v_2 \in < w_1, w_2, ..., v_n >$$

y en particular

$$< w_1, w_2, v_3, ..., v_n >= V$$

Veamos que $S_2 = \{w_1, w_2, v_3..., v_n\}$ es una base de V. Sólo nos falta ver que S_2 es un conjunto linealmente independiente. Consideremos la ecuación

$$(**2) \quad \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V$$

para $\alpha_j \in K$. Luego, al reemplazar $(*2)$ en $(**2)$ obtenemos

$$(***2) \quad (\lambda_1\alpha_2 + \alpha_1)w_1 + \alpha_2\lambda_2 v_2 + (\alpha_2\lambda_3 + \alpha_3)v_3 + \cdots + (\alpha_2\lambda_n + \alpha_n)v_n = 0_V$$

Ya que S_1 es un conjunto linealmente independiente, tenemos que

$$\alpha_2\lambda_2 = 0$$

$$\alpha_1\lambda_j + \alpha_j = 0, \; j = 1, 3, ..., n.$$

Ya que hemos supuesto $\lambda_2 \neq 0$, las ecuaciones anteriores aseguran que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, es decir, S_2 es un conjunto linealmente independiente y luego una base de V.

3.- Podemos proceder de manera inductiva como antes para lograr obtener que $S_n = \{w_1, ..., w_n\}$ resulta una base de V. Esto contradice el hecho que S sea un conjunto linealmente independiente.

$\square$

El teorema 6.4.1 nos permite dar la siguiente definición.

Definición 6.4.2. — Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. La dimensión de V sobre K, denotada por $dim_K V$ es dada por la cardinalidad de cualquiera de sus bases, es decir

$$dim_K V = \text{cardinalidad de una base de } V$$

La demostración hecha para el teorema 6.4.1 nos permite ver los siguientes hechos.

Corolario 6.4.3. — *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n. Entonces, todo conjunto linealmente independiente $S \subset V$ debe tener cardinalidad a lo más n, es decir, todo subconjunto de V de cardinalidad mayor a n debe ser linealmente dependiente.*

Corolario 6.4.4. — *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K de dimensión finita $dim_K V = n$. Si $W < V$, entonces $dim_K W \leq dim_K V$. Más aún, si $dim_K W = dim_K V$, entonces $W = V$.*

Ejemplo 6.4.5. —
(i) $dim_K K^n = n$. Recordar la base canónica.
(ii) $dim_K K_n[x] = n + 1$. Una base es $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$.
(iii) $dim_K M(p \times q; K) = pq$. Recordar la base $\{E_{ij} : 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq q\}$.
(iv) $dim_K K^{\mathbb{N}} = \infty$.
(v) Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, entonces V es también un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. En este caso, $dim_{\mathbb{R}} V = 2 \dim_{\mathbb{C}} V$.
(vi) Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, entonces V es también un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$. En este caso, $dim_{\mathbb{Q}} V = \infty$.
(vii) Si V es un espacio vectorial de dimensión 0, entonces $V = \{0_V\}$.

6.4.1. Un proceso algorítmico para completar bases. — Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K de dimensión finita $dim_K V = n$. Supongamos que tenemos un subconjunto linealmente independiente $S \subset V$. Sabemos que la cardinalidad de S, digamos m, debe ser menor ó igual a n y que si $m = n$, entonces S es una base de V.

(1) Si $m = n$, entonces S es una base.
(2) Si $m < n$, entonces $< S > \neq V$. En este caso, como S es linealmente independiente, existe un vector $v \in V - < S >$. En este caso $S \cup \{v\}$ sigue

siendo un subconjunto linealmente independiente de V que contiene a S de manera estricta. Ahora reemplazamos S por $S \cup \{v\}$ y volvemos a (1).

6.5. Problemas

1.- Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y $S = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$. Verificar que S es un conjunto linealmente independiente sí y sólo si la ecuación

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_V$$

tiene como únicas soluciones en K a

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

2.- Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y $S \subset V$ tal que $0_V \in S$. Verificar que S es un conjunto linealmente dependiente.

3.- Considere un cuerpo K y el espacio vectorial K^n, donde $n \in \{1, 2, 3, ...\}$. Sean

$$e_j = \underbrace{(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)}_{\text{el 1 en la posición } j\text{-ésima}} \in K^n, \; j = 1, 2, ..., n.$$

Entonces

$$\{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

es una base de K^n, llamada la base canónica de K^n.

4.- Sea K un cuerpo y el espacio vectorial $M(p \times q; K)$. Sea E_{ij} la matriz cuyo coeficiente ij es 1 y todo los demás son igual a 0. Verificar que

$$\{E_{ij} : 1 \leq i \leq p, \; 1 \leq j \leq q\}$$

es una base de $M(p \times q; K)$.

5.- Sea K un cuerpo y consideremos el espacio vectorial $K^{\mathbb{N}}$ de las sucesiones en K. Sea $S \subset K^{\mathbb{N}}$ el subconjunto cuyos vectores son

$$e_j = \underbrace{(0, ..., 0, 1, 0, ...)}_{\text{el 1 en la posición } j\text{-ésima}} \in K^{\mathbb{N}}, \; j = 1, 2, ...$$

Ver que $(1, 1, 1, ...) \notin < S >$. Concluir que S no es una base de $K^{\mathbb{N}}$.

6.- Construir un algoritmo computacional (es decir, un pseudo-programa) que permita decidir si un conjunto finito de vectores es linealmente indeprendiente ó no.

7.- Supongamos que V es un espacio vectorial de dimensión infinita pero numerable. Describir un proceso de diagonalización de Gram-Schmidt. ¿Qué pasa si quitamos la numerabilidad ?

CAPÍTULO 7

COORDENADAS

7.1. coordenadas

En este capítulo sólo nos preocuparemos de espacios vectoriales de dimensión finita. Nuestras bases estarán ordenadas. Partamos con la siguiente observación.

Teorema 7.1.1. — *Supongamos que tenemos un espacio vectorial V sobre un cuerpo K y que la dimensión de V sobre K es finita, digamos $dim_K V = n$, y sea $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base (ordenada) de V. Si $v \in V$, entonces existen únicos escalares $x_1, ..., x_n \in K$ tales que*

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$$

Estos escalares (manteniendo el orden) serán llamados las coordenadas de v en la base $\mathcal{B}$.

Demonstración. — Sabemos de la existencia de escalares $x_1, ..., x_n \in K$ tales que

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$$

por el hecho que $\mathcal{B}$ genera V. Si tenemos otros escalares $y_1, ..., y_n \in K$ tales que

$$v = y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n,$$

entonces tenemos la igualdad

$$x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n,$$

de donde obtenemos

$$(x_1 - y_1) v_1 + \cdots + (x_n - y_n) v_n = 0_V$$

Como $\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente, debemos tener $x_j = y_j$, para todo $j = 1, ..., n$. □

Definición 7.1.2. — Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K con $dim_K V = n$, y sea $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V. Si $v \in V$, entonces tenemos sus coordenadas en tal base $x_1, ..., x_n \in K$ tales que

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$$

La matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M(n \times 1; K)$$

es llamado el vector de coordenadas de v respecto a la base $\mathcal{B}$. La coordenada x_j es llamada la j-ésima coordenada de v en la base (ordenada) $\mathcal{B}$.

Ejemplo 7.1.3. — Sea K un cuerpo y consideremos el espacio vectorial $K_3[x]$. Sabemos que

$$dim_K K_3[x] = 4$$

y luego toda base de $K_3[x]$ debe tener cardinalidad cuatro.

Una base (ordenada) de $K_3[x]$ es dada por

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2, v_4 = x^3\}$$

El vector de coordenadas de un vector

$$v = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 a^4$$

en tal base $\mathcal{B}_1$ es

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

Pero si consideramos la base (ordenada)

$$\mathcal{B}_2 = \{w_1 = 1, w_2 = x, w_3 = 1 + x^2, w_4 = x + x^2 + x^3\}$$

entonces el vector de coordenadas de un vector

$$v = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 a^4$$

en tal base $\mathcal{B}_2$ es

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

donde

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4a^4 = b_0w_1 + b_1w_2 + b_2w_2 + b_3w_4,$$

es decir

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 - a_2 + a_3 \\ b_1 &= a_1 - a_3 \\ b_2 &= a_2 - a_3 \\ b_3 &= a_3 \end{aligned}$$

Ejercicio 13. — *Sea $\mathcal{B}_1 = \{v_1, ..., v_n\}$ una base ordenada de un espacio vectorial V de dimensión n. Considere la nueva base ordenada de V dada por $\mathcal{B}_2 = \{v_2, v_1, v_3..., v_n\}$. ¿Cómo se relacionan los vectores de coordenadas de un mismo vector $v \in V$?*

De manera más general, si permutamos los vectores de $\mathcal{B}_1$ para obtener una nueva base ordenada, entonces ¿Cómo se relacionan los vectores de coordenadas de un mismo vector $v \in V$?

7.2. Coordenadas y cambios de base

Hemos visto en el ejemplo anterior que el vector de coordenadas de un mismo vector puede variar si cambiamos nuestra base ordenada.

Supongamos que tenemos dos bases ordenadas del espacio vectorial V, digamos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \{v_1, ..., v_n\} \\ \mathcal{B}_2 &= \{w_1, ..., w_n\} \end{aligned}$$

Consideremos el vector de coordenadas de v_j en la base $\mathcal{B}_2$, digamos

$$\begin{pmatrix} \lambda_{1j} \\ \lambda_{2j} \\ \vdots \\ \lambda_{nj} \end{pmatrix}$$

Consideremos la matriz

$$M(I, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

Definición 7.2.1. — La matriz $M(I, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ es llamada la matriz de cambio de base de la base $\mathcal{B}_1$ a la base $\mathcal{B}_2$.

Si $v \in V$, entonces tenemos su vector de coordenadas respecto a la base $\mathcal{B}_1$, digamos

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

y su vector de coordenadas respecto a la base $\mathcal{B}_2$, digamos

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ya que

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j = \sum_{j=1}^{n} x_j(\lambda_{1j} w_1 + \cdots + \lambda_{nj} w_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\lambda_{k1} x_1 + \lambda_{k2} x_2 + \cdots + \lambda_{kn} x_n) w_k$$

obtenemos la igualdad matricial

$$M(I, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)x = y$$

que nos da la relación entre los dos vectores coordenadas del mismo vector $v \in V$.

Teorema 7.2.2. — *Sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ dos bases del mismo espacio vectorial V, de dimensión finita. Entonces, para cada $v \in V$ vale la igualdad*

$$M(I, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)x = y$$

donde x es el vector de coordenadas de v en la base $\mathcal{B}_1$ e y es el vector de coordenadas de v en la base $\mathcal{B}_2$.

Ejemplo 7.2.3. — Sea K un cuerpo y consideremos el espacio vectorial $K_3[x]$. Considremos las bases

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2, v_4 = x^3\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{w_1 = 1, w_2 = x, w_3 = 1 + x^2, w_4 = x + x^2 + x^3\}$$

Tenemos que

$$M(I, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(I, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observemos que

$$M(I, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = M(I, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)^{-1}$$

Teorema 7.2.4. — *Si $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son dos bases del mismo espacio vectorial V, de dimensión finita, entonces*

$$M(I, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = M(I, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)^{-1}$$

Demostración. — Basta con observar que para todo vector $x \in M(n \times 1; K)$, donde $n = dim_K V$, debe ocurrir que

$$M(I, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) M(I, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) x = x$$

como consecuencia del hecho que el vector coordenadas está únicamente determinado por el vector y la base ordenada. Luego

$$M(I, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) M(I, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = I_n$$

De manera similar podemos obtener que

$$M(I, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) M(I, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = I_n$$

□

Corolario 7.2.5. — *La matriz de cambio de base es una matriz invertible ; su inversa siendo la matriz de cambio de base en el orden inverso.*

7.3. Problemas

1.- Sea S un conjunto de generadores de un espacio vectorial V. Verificar que siempre es posible encontrar una base $\mathcal{B} \subset S$ de V.

2.- ¿Es posible extraer una base de $M(3 \times 1; \mathbb{R})$ del conjunto

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} ?$$

3.- Buscar una base del espacio vectorial

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$$

4.- ¿Puede ser $\mathbb{Q}^5$ ser generado por 3 vectores ?

5.- Sea $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de un espacio vectorial V. Considere la base $\mathcal{B}_2 = \{v_3, v_2, v_1\}$. Calcular $M(I, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

6.- Sea la base de $\mathbb{R}^3$ dada por $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$. Calcular el vector de coordenadas de $(1, 2, 3)$.

7.- Sean

$$\mathcal{B}_1 = \{(1, 2, 2, 1), (1, 0, 2, 0), (2, 0, 4, -3)\}$$
$$\mathcal{B}_2 = \{(0, 2, 0, 1), (2, 1, 4, -1), (1, 2, 2, 4)\}$$

Verificar que ellos son dos bases del mismo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ y calcular $M(I, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

8.- Determinar si

$$\{(1, 3, -7), (2, -1, 0), (3, -1, -1), (4, -3, 2)\}$$

y

$$\{(1, -1, 1), (1, 1, -3), (1, 2, -5)\}$$

generan el mismo subespacio de $\mathbb{R}^3$.

9.- ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\{(3 - k, -1, 0), (-1, 2 - k, -1), (0, -1, 3 - k)\}$$

genera un subespacio de dimensión 2 ?

10.- Determinar una base del suespacio de $\mathbb{R}^4$ siguiente

$$\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z + w\}$$

11.- Considere el suespacio de $M(n \times n; \mathbb{Q})$ dado por

$$W = \{A \in M(n \times n; \mathbb{Q}) : TrA = 0\}$$

donde “Tr" denota la traza. Calcular una base de W. ¿Existe alguna diferencia si cambiamos $\mathcal{Q}$ por cualquier otro cuerpo ? (Recuerde la característica de un cuerpo).

CAPÍTULO 8

TRANSFORMACIONES LINEALES

Muchos problemas de la vida cotidiana involucran transformaciones : tenemos datos de entrada, los cuales son transformados en datos de salida. Por ejemplo, datos de entrada pueden ser condiciones laborales y los datos de de salida ser productividad. En varios de estos problemas las transformaciones son “lineales" (suma de datos nos entrega suma de resultados y amplificación de datos producen amplificación de resultado por el mismo factor). Un estudiante de ingeniería civil Matemática debería intentar deducir propiedades de las transformaciones relevantes y aprender sobre las propiedades de las estructuras que se están modelando.

8.1. Transformaciones lineales

Definición 8.1.1. — Sean V y W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K. Una función

$$L : V \to W$$

es llamada una transformación lineal si se satisfacen las siguientes dos propiedades :

$$L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$$

$$L(\lambda v) = \lambda L(v)$$

para todo $v, v_1, v_2 \in V$ y todo $\lambda \in K$.

Denotaremos por $\mathcal{L}(V, W)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W.

Observación 8.1.2. — Una definición más general es la siguiente : Sean V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y W un espacio vectorial sobre un cuerpo

L. Una función $L : V \to W$ es llamada un morfismo lineal si existe un homomorfismo de cuerpos $f : K \to L$ de manera que se satisfacen las siguientes dos propiedades :

$$L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$$
$$L(\lambda v) = f(\lambda)L(v)$$

para todo $v, v_1, v_2 \in V$ y todo $\lambda \in K$. Nosotros no estaremos involucrados con estos morfismos lineales.

Observación 8.1.3. — Sea $V = \mathbb{C}$. Entonces V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y también sobre $\mathbb{C}$. Sea $J : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : a + ib \mapsto a - ib$ la conjugación. Se tiene que J es lineal cuando vemos V como espacio vectorial real, pero no es lineal cuando lo vemos como un espacio vectorial complejo. Esta observación nos dice que la noción de transformación lineal está muy ligada al cuerpo K en uso y hay que tener ciudado con esto.

Ejemplo 8.1.4. — Sea $W < V$, donde V es algún espacio vectorial sobre un cuerpo K. Anteriormente habíamos definido el espacio vectorial cociente V/W como el conjunto de las clases de equivalencia $[v]$ de vectores $v \in V$ y la proyección natural $\pi : V \to V/W : v \mapsto [v]$. Se tiene que las operaciones de suma y amplificación que dimos a V/W hacen de la proyección π una transformación lineal sobreyectiva.

Ejemplo 8.1.5. — Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y supongamos que $dim_K V = n$. Sean

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1, ..., v_n\}$$
$$\mathcal{B}_2 = \{w_1, ..., w_n\}$$

dos bases de V. La función

$$Q_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} : V \to V : v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j w_j$$

resulta ser una transformación lineal.

Ejemplo 8.1.6. — Sea $Z \in M(p \times q; K)$, donde K es algún cuerpo. La función

$$T_Z : K^q \to K^p : (x_1, ..., x_q) \mapsto (y_1, ..., y_p)$$

donde

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

es una transformación lineal.

Ejemplo 8.1.7. — Sea K un cuerpo. La función de desplazamiento

$$S : K^{\mathbb{N}} \to K^{\mathbb{N}} : (x_1, x_2, ...) \mapsto (x_2, x_3, ...)$$

es una transformación lineal.

Teorema 8.1.8. — *La composición de transformaciones lineales es una transformación lineal.*

Definición 8.1.9. — Sea $L : V \to W$ una transformación lineal. Entonces :

(i) el núcleo de L es dado por

$$Ker(L) = \{v \in V : L(v) = 0_W\}$$

(ii) la imagen de L es dado por

$$Im(L) = \{L(v) \in W : v \in V\}$$

(iii) el rango de $L : V \to W$ es

$$rango(L) = dim_K Im(L)$$

Teorema 8.1.10. — *Sea $L : V \to W$ una transformación lineal. Entonces :*

(i) $Ker(L) < V$.

(ii) $Im(L) < W$.

(iii) $Kr(L) = \{0_V\} \iff$ *L es inyectiva.*

(iv) $Im(L) = W \iff$ *L es sobreyectiva.*

(v) Si L es biyectiva, entonces $L^{-1} : W \to V$ es una transformación lineal. En este caso diremos que L es un isomorfismo y que los espacios vectoriales V y W son isomorfos lo cual denotaremos por $V \cong W$.

(vi) Sea $\pi_L : V \to V/Ker(L)$ la proyección natural al espacio cociente de V por el subespacio $Ker(L)$. Entonces existe una y sólo una transformación lineal $\widehat{L} : V/Ker(L) \to W$ tal que $\widehat{L} \circ \pi_L = L$. En particular, $Im(L) = Im(\widehat{L})$.

Ejemplo 8.1.11. — Si $W < V$ y $\pi : V \to V/W : v \mapsto [v]$, entonces

$$Ker(\pi) = W$$
$$Im(\pi) = V/W$$

Ejemplo 8.1.12. — Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y supongamos que $dim_K V = n$. Sean

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1, ..., v_n\}$$
$$\mathcal{B}_2 = \{w_1, ..., w_n\}$$

dos bases de V. La transformación lineal

$$Q_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} : V \to V : v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j w_j$$

resulta ser un isomorfismo lineal.

Definición 8.1.13. — Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Todo isomorfismo de V en si mismo es llamado un automorfismo lineal de V. El conjunto de todos los automorfismos lineales de V es denotado por $GL(V)$.

***Ejemplo 8.1.14* (Sistemas lineales)**. — Sea $Z \in M(p \times q; K)$, donde K es algún cuerpo y consideremos la transformación lineal

$$T_Z : K^q \to K^p : (x_1, ..., x_q) \mapsto (y_1, ..., y_p)$$

donde

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Entonces :

$$Ker(T_Z) = \left\{ (x_1, ..., x_n) \in K^q : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \text{ satisface la ecuación lineal } Zx = 0 \right\}$$

Así, si queremos buscar las soluciones de $Zx = b$, alguna $b \in M(p \times 1; K)$, entonces basta con encontrar una solución particular $x_0 \in M(q \times 1 : K)$ y luego sumarle a x_0 un vector cualquiera $x \in Ker(T_Z)$.

***Ejemplo 8.1.15* (Ecuaciones diferenciales lineales).** — Sea $a_0, a_1, ..., a_r \in C^{(0}[a,b]$ y consideremos la función

$$D : C^{(r)}[a,b] \to C^{(0}[a,b] : y \mapsto a_r(x)\frac{d^r y}{dx^r} + a_{r-1}(x)\frac{d^{r-1}y}{dx^{r-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y$$

La lineabilidad del operador $\frac{d}{dx}$ nos asegura que D es una transformación lineal. En este caso,

$$Ker(D) = \{ \text{ soluciones de la ecuación diferencial lineal } Dy = 0\}$$

En un curso básico de ecuaciones diferenciales lineales se ve que la dimensión de $Ker(D)$ es r (observe que la dimensión de $C^{(r)}[a,b]$ es infinita).

***Ejemplo 8.1.16* (Transformada de Laplace).** — Sea $M > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ dados. Consideremos

$$V = \{\{f : [0,+\infty) \to \mathbb{R} : f \ es \ integrable \ en \ [0,+\infty) \ y \ |f(x)| \leq Me^{\alpha x}\}$$

Entonces V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Si denotamos por $\mathcal{F}(\alpha,+\infty)$ al espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ formado de las funciones reales definidas en $(\alpha,+\infty)$, entonces la función (transformada de Laplace)

$$\mathcal{L} : V \to \mathcal{F}(\alpha,+\infty) : f(x) \mapsto \mathcal{L}[f[x]]$$

donde

$$\mathcal{L}[f[x]](\mu) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-\mu x}\, dx$$

es una transformación lineal.

***Teorema 8.1.17*.** — *Sea V y W espacios vectoriales sobre el cuerpo K y $L : V \to W$ una transformación lineal. Si $dim_K V < \infty$, entonces*

$$dim_K V = dim_K Ker(L) + dim_K Im(L)$$

Demostración. — Si $L = 0$, entonces estamos listos. Supongamos que $L \neq 0$. Como $Ker(L) < V$ y V tiene dimensión finita, digamos $dim_K V = n$, entonces $dim_K Ker(L) = m \leq n$. Como $L \neq 0$, $m < n$. Consideremos una base de $Ker(L)$, digamos

$$\mathcal{S} = \{v_1, ..., v_m\}$$

Ahora completamos $\mathcal{S}$ a una base de V, digamos

$$\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_m, v_{m+1}, ..., v_n\}$$

Es claro que $Im(L)$ es generado por el subconjunto

$$L(\mathcal{B}) = \{L(v_{m+1}), ..., L(v_n)\}$$

$L(\mathcal{B})$ es un conjunto es linealmente independiente. Supongamos que hay escalares $\lambda_{m+1}, ..., \lambda_n \in K$ tales que

$$\underbrace{\lambda_{m+1}L(v_{m+1}) + \cdots + \lambda_n L(v_n)}_{L(\lambda_{m+1}v_{m+1}+\cdots+\lambda_n v_n)} = 0_W$$

En particular

$$\lambda_{m+1}v_{m+1} + \cdots + \lambda_n v_n \in Ker(L)$$

De esta manera, como $\mathcal{S}$ es base de $Ker(L)$, existen escalares $\lambda_1, ..., \lambda_m \in K$ de manera que

$$\lambda_{m+1}v_{m+1} + \cdots + \lambda_n v_n = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m$$

equivalentemente

$$-\lambda_1 v_1 - \cdots - \lambda_m v_m + \lambda_{m+1}v_{m+1} + \cdots + \lambda_n v_n = 0_V$$

Como $\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente, debemos tener que $\lambda_j = 0$ para todo valor de j, obteniendo en particular que $L(\mathcal{B})$ es un conjunto linealmente independiente.

Ahora tenemos que $L(\mathcal{B})$ es una base de $Im(L)$, con lo cual obtenemos nuestro resultado. $\square$

Teorema 8.1.18. — *Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo K y que $dim_K V = n$. Entonces*

$$V \cong W \iff dim_K V = dim_K W$$

Demostración. — Si $V \cong W$, entonces existe un isomorfismo $L : V \to W$. En este caso tenemos que $Ker(L) = \{0_V\}$ y $Im(L) = W$. Luego el resultado es consecuencia de la proposición 8.1.17.

Recíprocamente, supongamos que tenemos que $dim_K V = dim_K W$. Sean

$$\mathcal{B}_V = \{v_1, ..., v_n\} \text{ y } \mathcal{B}_W = \{w_1, ..., w_n\}$$

bases de V y W, respectivamente. Definamos la función

$$L : V \to W : \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j w_j$$

Se tiene que L es lineal, $Ker(L) = \{0_V\}$ como consecuencia de la independencia lineal de $\mathcal{B}_W$ y $Im(L) = W$ como consecuencia del hecho que $\mathcal{B}_W$ genera W.

$\square$

Corolario 8.1.19. — *Si V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K, entonces*

$$V \cong K^{dim_K V} \cong M(dim_K V \times 1; K)$$

Observación 8.1.20. — Si V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K, entonces un isomorfismo entre V y $M(dim_K V \times 1; K)$ se puede dar de la siguiente manera. Escojamos una base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_{dim_K V}\}$. El isomorfismo buscado es dado por la función que asigna a cada vector $v \in V$ su vector de coordenadas en tal base

$$L_{\mathcal{B}} : V \to M(n \times 1; K) : v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad n = dim_K V$$

Usaremos este isomorfismo de manera frecuente en el futuro.

El siguiente concepto de subespacios invariantes será de utilidad en el futuro.

Definición 8.1.21. — Supongamos que tenemos una transformación lineal $L : V \to V$ y $W < V$ un subespacio de V. Diremos que W es invariante por L si $L(W) < W$.

8.2. El espacio $\mathcal{L}(V,W)$

Si V y W son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K, entonces tenemos el conjunto $\mathcal{L}(V,W)$, formado de todas las transformaciones lineales de V en W.

Teorema 8.2.1. — *$\mathcal{L}(V,W)$ es un espacio vectorial sobre K.*

Demonstración. — Ya que $\mathcal{L}(V,W)$ es un subconjunto no vacío del espacio vectorial de las funciones de V en W, basta verificar que este es de hecho un subespacio vectorial.

Si $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V,W)$ y $\lambda \in K$, entonces para todo par de vectores $v, w \in V$ y todo escalar $\alpha \in K$ vale que

$$(L_1 + \lambda L_2)(v + \alpha w) = L_1(v) + \alpha L_1(w) + \lambda L_2(v) + \lambda\alpha L_2(w) =$$
$$= (L_1 + \lambda L_2)(v) + \alpha(L_1 + \lambda L_2)(w)$$

de donde vemos que $L_1 + \lambda L_2 \in \mathcal{L}(V,W)$. ☐

Teorema 8.2.2. — *Si además $dim_K V < \infty$ y $dim_K W < \infty$, entonces*

$$dim_K \mathcal{L}(V,W) = (dim_K V)(dim_K W)$$

Demonstración. — Sean $\mathcal{B}_V = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V y $\mathcal{B}_W = \{w_1, ..., w_m\}$ una base W. Por cada $i \in \{1, ..., n\}$ y cada $j \in \{1, ..., m\}$, consideramos la transformación lineal

$$\pi_{ij} : V \to W : \sum_{k=1}^{n} x_k v_k \mapsto x_i w_j$$

No es dificil ver que

$$\{\pi_{ij} : 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq m\}$$

es una base de $\mathcal{L}(V,W)$.

□

8.3. Problemas

1.- Sea K un cuerpo, $q, p \in \{1, 2, 3, ...\}$. Verificar que todas las transformaciones lineales $L : K^q \to K^p$ son de la forma T_Z para alguna $Z \in M(p \times q; K)$.

2.- Demostrar el Teorema 8.1.8.

3.- Demostrar el Teorema 8.1.10.

4.- Sea V un espacio vectorial. Verificar que con la regla de composición $GL(V)$ es un grupo.

5.- Determinar todos los automorfismos lineales de K^n.

6.- Considere la función

$$L : C^{(0)}(\mathbb{R}) \to C^{(0)}(\mathbb{R}) : f(x) \mapsto L(f)(x) = \int_0^x f(t) \, dt$$

(i) Ver que L es una transformación lineal.

(ii) $Ker(L) = \{0\}$.

(iii) $Im(L) = C^{(1)}(\mathbb{R})$. Concluir que L no es un isomorfismo.

(iv) $L : C^{(0)}(\mathbb{R}) \to C^{(1)}(\mathbb{R})$ es un isomorfismo. En particular, tenemos una biyección entre las funciones reales continuas y las derivables.

7.- Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciables en el punto $p \in \Omega$, donde Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$. La diferencial

$$Df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

es una transformación lineal. Interpretar geométricamente $Ker(Df(p))$ y $Im(Df(p))$.

8.- Verificar que si K es un cuerpo finito, entonces este debe tener cardinalidad p^n para cierto p primo y cierto entero positivo n. [Indicación : Sea p la característica de K, el cual es un número primo. Se tiene que $\mathbb{Z}_p$ es un subcuerpo de K. Miremos a K como un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_p$. Sea $\{v_1, ..., v_n\}$ una base para K como espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_p$. Entonces tenemos que K es isomorfo al espacio vectorial $\mathbb{Z}_p^n$.]

9.- Sea K un cuerpo y V un espacio vectorial sobre K (que puede tener dimensión infinita). Consideremos una base (indexada) de V

$$\mathcal{B} = \{v_j\}_{j \in J}$$

Por cada vector $v \in V$ existen únicos escalares $x_j^v \in K$, de manera que sólo para un número finito de índices $j \in J$ se tiene $x_j^v \neq 0$ y vale que

$$v = \sum_{j \in J} x_j^v v_j$$

Sea K^J el espacio vectorial sobre K formado de todas las funciones $f : J \to K$. En K^J consideramos el subespacio vectorial K_0^J formado de aquellas $f \in K^J$ con la propiedad que $f(j) = 0$ con la posible excepción de un número finito de índices de J. Sea

$$F : V \to K_0^J : v = \sum_{j \in J} x_j^v v_j \mapsto f_v$$

donde

$$f_v : J \to K : j \mapsto x_j^v$$

Verificar que F es un isomorfismo de espacios vectoriales. Comparar con el caso de dimensión finita.

10.- Demostrar el Teorema 8.2.2.

CAPÍTULO 9

UNA RELACIÓN ENTRE ESPACIOS VECTORIALES REALES Y COMPLEJOS

En este capítulo veremos algumas relaciones existentes entre el mundo de los espacios vectoriales reales y el mundo de los espacios vectoriales complejos.

9.1. Estructuras complejas

Consideremos un espacio vectorial V sobre el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$. Sabemos que V es también un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$; denotemos por $V_{\mathbb{R}}$ a tal estructura real. Observemos que $V_{\mathbb{R}}$ como conjunto es igual a V y las operacionón de suma es la misma. Pero en $V_{\mathbb{R}}$ sólo amplificamos por números reales, de la misma manera como lo hacemos en V. Si $v \in V_{\mathbb{R}}$, entonces $v \in V$ y luego $iv \in V$. Denotamos el vector iv en $V_{\mathbb{R}}$ como $J(v)$. Luego, la amplificación por $i \in \mathbb{C}$ induce una función

$$J : V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}} : v \mapsto J(v) = iv$$

Teorema 9.1.1. —
(i) J es un automorfismo lineal de $V_{\mathbb{R}}$.
(ii) $J \circ J = -I$.

Definición 9.1.2. — Sea $V_{\mathbb{R}}$ un espacio vectorial real. Un automorfismo lineal $J \in GL(V_{\mathbb{R}})$ tal que $J \circ J = -I$ es llamado una estructura compleja en $V_{\mathbb{R}}$.

Como consecuencia de todo lo anterior, todo espacio vectorial complejo induce un espacio vectorial real con una estructura compleja.

Recíprocamente, supongamos que tenemos un espacio vectorial real W con una estructura compleja $J \in GL(W)$. Entonces usando la amplificación

$$(a + ib)v := av + bJ(v)$$

para todo $v \in W$ y todo $a + ib \in \mathbb{C}$ y usando la misma suma que ya tiene W permite inducir sobre W una estructura de espacio vectorial complejo, denotado por $W^{\mathbb{C}}$ de manera que $W = W^{\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}$.

Ejercicio 14. — *Detallar lo anterior.*

De esta manera, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 9.1.3. — *Trabajar con espacios vectoriales complejos es lo mismo que trabajar con espacios vectoriales reales con una estructura compleja.*

Ejemplo 9.1.4. — Consideremos el espacio vectorial real $\mathbb{R}^2$ con la estructura compleja

$$J(x, y) = (-y, x)$$

En este caso la amplificación por un número complejo será dado por

$$(a + ib)(x, y) = a(x, y) + b(-y, x) = (ax - by, ay + bx)$$

Si $(\mathbb{R}^2, J)$ es este espacio vectorial complejo y consideramos la función

$$L : (\mathbb{R}^2, J) \to \mathbb{C} : (x, y) \mapsto x + iy$$

entonces L es un isomorfismo entre espacios vectoriales complejos.

9.2. Complexificación de espacios vectoriales reales

Consideremos un espacio vectorial real V y tomemos el producto cruz

$$V \times V$$

con las siguiente operaciones de suma

$$(v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$$

y amplificación por números complejos

$$(a + ib)(v_1, v_2) = (av_1, av_2) + b(-v_2, v_1) = (av_1 - bv_2, av_2 + bv_1)$$

Teorema 9.2.1. — *La suma y amplificación por números complejos arriba definida hace de $V \times V$ de un espacio vectorial complejo $V_{\mathbb{C}}$, llamado la complexificación de V.*

Ejemplo 9.2.2. — Sea $V=\mathbb{R}$. En este caso tenemos que $V\times V=\mathbb{R}^2$. En este caso la suma es

$$(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$$

y la amplificación por números complejos es

$$(a+ib)(x,y)=(ax-by,ay+bx)$$

De esta manera, volvemos a tener que el espacio vectorial complejo obtenido como la complexificación del espacio vectorial real $\mathbb{R}$, es decir $\mathbb{R}_{\mathbb{C}}$, es isomorfo al espacio vectorial complejo $\mathbb{C}$.

9.3. Complexificación y estructuras reales

Supongamos ahora que tenemos un espacio vectorial real con estructura compleja, digamos (V,J). Ya hemos visto que la estructura compleja $J\in GL(V)$ permite dotar a V de una estructura de espacio vectorial complejo $V^{\mathbb{C}}$. Tenemos, por la sección anterior, la complexificación $V_{\mathbb{C}}$ de V. Lo que haremos es relacionar estos dos espacios vectoriales complejos. Consideremos

$$\begin{array}{rcl} V_{\mathbb{C}}^{1,0} & = & \{(u,v)\in V_{\mathbb{C}}:(J(u),J(v))=i(u,v)\}\\ & = & \{(u,v)\in V_{\mathbb{C}}:(J(u),J(v))=(-v,u)\}\\ & = & \{(u,v)\in V_{\mathbb{C}}:J(u)=-v\}\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} V_{\mathbb{C}}^{0,1} & = & \{(u,v)\in V_{\mathbb{C}}:(J(u),J(v))=-i(u,v)\}\\ & = & \{(u,v)\in V_{\mathbb{C}}:(J(u),J(v))=(v,-u)\}\\ & = & \{(u,v)\in V_{\mathbb{C}}:J(u)=v\}\end{array}$$

Por otro lado, para cada $(u,v)\in V_{\mathbb{C}}$ tenemos que

$$(u,v)=\underbrace{\frac{1}{2}((u+J(v),v-J(u))}_{\in V_{\mathbb{C}}^{1,0}}+\underbrace{\frac{1}{2}(u-J(v),v+J(u))}_{\in V_{\mathbb{C}}^{0,1}}$$

y tenemos que

$$V_{\mathbb{C}}^{1,0}\cap V_{\mathbb{C}}^{0,1}=\{0_{V_{\mathbb{C}}}\}$$

Consideremos las funciones

$$\phi_{1,0}:V^{\mathbb{C}}\to V_{\mathbb{C}}^{1,0}:u\mapsto(u,-J(u))$$

$$\phi_{0,1}:V^{\mathbb{C}}\to V_{\mathbb{C}}^{0,1}:u\mapsto(u,J(u))$$

Ahora tenemos que los espacios vectoriales complejos $V_{\mathbb{C}}^{1,0}$ y $V_{\mathbb{C}}^{0,1}$ son isomorfos como espacios vectoriales complejos al espacio vectorial complejo $(V^{\mathbb{C}}$. Esto nos dice como se relacionan $V^{\mathbb{C}}$ y $V_{\mathbb{C}}$: $V_{\mathbb{C}}$ es suma directa de dos copias isomorfas de $V^{\mathbb{C}}$.

Ejemplo 9.3.1. — Consideremos el espacio vectorial real con estructura compleja $(V = \mathbb{R}^2, J(x, y) = (-y, x))$. En este caso, la estructura compleja J induce en $V = \mathbb{R}^2$ la estructura de espacio vectorial complejo $V^{\mathbb{C}}$ isomorfa a $\mathbb{C}$; el isomorfismo dado por

$$(a, b) \in V^{\mathbb{C}} \to a + ib \in \mathbb{C}$$

La complexificación de V es en este caso

$$V_{\mathbb{C}} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

donde la amplificación por i es dada por

$$i((a, b), (c, d)) = ((-c, -d), (a, b))$$

Podemos identificar $((a, b), (c, d) \in V_{\mathbb{C}}$ con $(a + ib, c + id) \in \mathbb{C}^2$, siendo esta identificación un isomorfismo de espacios vectoriales complejos.

En este caso tenemos que

$$V_{\mathbb{C}}^{1,0} = \{((a, b), (b, -a)) : (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

y usando el isomorfismo anterior, podemos identificar este último subespacio vectorial con el subespacio vectorial de $\mathbb{C}^2$ dado por

$$V_{\mathbb{C}}^{1,0} = \{(a + ib, b - ia) : a + ib \in \mathbb{C}\}$$

También tenemos que

$$\phi_{1,0} : V^{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}^{1,0} : (a, b) \mapsto ((a, b), (b, -a))$$

ó usando los isomorfismos anteriores

$$\phi_{1,0} : \mathbb{C} \to V_{\mathbb{C}}^{1,0} : a + ib \mapsto (a + ib, b - ia)$$

9.4. Problemas

1.- Demostrar el Teorema 9.1.1.
2.- Demostrar el Teorema 9.2.1.
3.- Verificar que $\mathbb{R}^n_{\mathbb{C}}$ es isomorfo a $\mathbb{C}^n$.
4.- Verificar que $V_{\mathbb{C}}^{1,0}$ y $V_{\mathbb{C}}^{0,1}$ son ambos subespacios vectoriales complejos de $V_{\mathbb{C}}$.
5.- Verificar que existe un isomorfismo de espacios vectoriales complejos entre $V_{\mathbb{C}}$ y el espacio vectorial producto $V_{\mathbb{C}}^{1,0} \oplus V_{\mathbb{C}}^{0,1}$.
6.- Verificar que $\phi_{1,0}$ y $\phi_{0,1}$ son isomorfismos de espacios vectoriales complejos.

7.- Sea V un espacio vectorial complejo y sean $V_{\mathbb{R}}$ el espacio vectorial real subyacente y $J \in GL(V_{\mathbb{R}})$ la estructura compleja inducida por la multiplicación por i. Sea $W < V_{\mathbb{R}}$ un subespacio vectorial real y sea $W_{\mathbb{C}}$ el espacio vectorial complejo obtenido al complexificar W. Considere las inclusiones

$$j_W : W \hookrightarrow W_{\mathbb{C}} : w \mapsto (w, 0)$$
$$j^W : W_{\mathbb{C}} \hookrightarrow (V_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$$

Ahora consideremos la descomposición

$$(V_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} = (V_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}^{1,0} \oplus (V_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}^{0,1}$$

para escribir cada vector $u \in (V_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ de manera única como

$$u = u_{1,0} \oplus u_{0,1}$$

donde $u_{1,0} \in (V_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}^{1,0}$ y $u_{0,1} \in (V_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}^{0,1}$.

Sean

$$\pi_{1,0} : (V_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \to (V_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}^{1,0} : u_{1,0} \oplus u_{0,1} \mapsto u_{1,0}$$

el isomorfismo $\phi_{1,0}^{-1} : (V_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}^{1,0} \to V = (V_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$, y la transformación lineal compleja

$$\phi_W = \phi_{1,0}^{-1} \circ \pi_{1,0} \circ j^W : W_{\mathbb{C}} \to V$$

Verifique que

(i) ϕ_W es inyectiva $\iff W \cap J(W) = \{0_V\}$.

(ii) $dim_{\mathbb{R}} W = dim_{\mathbb{C}} V \implies dim_{\mathbb{C}} W_{\mathbb{C}} = dim_{\mathbb{C}} V$ y luego ϕ_W es un isomorfismo.

CAPÍTULO 10

ESPACIOS DUALES

10.1. El espacio $\mathcal{L}(V, K)$

Cada vez que tenemos un espacio vectorial V sobre un cuerpo K, tenemos el espacio vectorial $\mathcal{L}(V, K)$ formado de todas funciones lineales $f : V \to K$ (recuerde que K es un espacio vectorial sobre K).

Definición 10.1.1. — El espacio vectorial $V^* = \mathcal{L}(V, K)$ es llamado el espacio dual de V.

Si tenemos que $dim_K V = n$, entonces, por lo visto anteriormente, $dim_K V^* = dim_K V$.

Teorema 10.1.2. — *Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces $V \cong V^*$.*

En caso de espacios vectoriales de dimensión infinita la proposición anterior es falsa.

Ejercicio 15. — *Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ de las sucesiones en $\mathbb{Q}$. Sea $V < \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ el subespacio vectorial formado de aquellas sucesiones en $\mathbb{Q}$ con sólo un número finito de coordenadas diferentes de cero.*

(i) Verificar que $dim_{\mathbb{Q}} V = \infty$.

(ii) Verificar que V no es isomorfo a $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ (vea que V es numerable y que $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ no lo es). De hecho vea que una base para V es dada por $\mathcal{B} = \{e_j : j = 1, 2, 3, ...\}$, donde e_j tiene su coordenada j-ésima igual a 1 y todas las demas igual a 0.

(iii) Por cada $x = (x_1, x_2, ...) \in \mathbb{Q}^N$ verifique que la siguiente función es lineal

$$Q_x : V \to \mathbb{Q} : v = (v_1, v_2, ...) \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} x_j v_j$$

(iv) Verificar que la función

$$\Phi : V \to W^* : x \mapsto Q_x$$

es un isomorfismo (vea que toda transformación lineal en V^* es de la forma Q_x algún $x \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$).

10.2. Bases duales

Consideremos un espacio vectorial V sobre el cuerpo K de dimensión finita $dim_K V = n$. Si escogemos una base de V, digamos

$$\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$$

entonces podemos construir las transformaciones lineales

$$v_j^* : V \to K : \sum_{k=1}^{n} x_k v_k \mapsto x_j, \; j = 1, ..., n.$$

Teorema 10.2.1. — *Si V es un espacio vectorial de dimensión finita n, y $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ es una base de V, entonces el conjunto $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, ..., v_n^*\}$ es una base para V^* que satisface*

$$v_j^*(v_i) = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ 1 & j = i \end{cases}$$

Definición 10.2.2. — La base $\mathcal{B}^*$ de la proposición anterior es llamada la base dual de la base $\mathbb{B}$.

Demonstración. — El valor de $v_j^*(v_i)$ es claramente lo indicado por la definición de v_j^*. Veamos que el conjunto $\mathbb{B}^*$ es un conjunto linealmente independiente. Supongamos escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ tales que

$$\phi = \lambda_1 v_1^* + \cdots + \lambda_n v_n^* = 0_{V^*}$$

Como $0 = \phi(v_j) = \lambda_j$, para cada $j = 1, ..., n$, entonces estamos listos. Ahora necesitamos ver que $\mathcal{B}^*$ genera V^*. Sea $\psi \in V^*$. En este caso tenemos que para

$v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$, tenemos que si $\psi(v_j) = \alpha_j$, entonces

$$\psi(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j^*(v)$$

es decir que

$$\psi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j^*$$

$\square$

10.3. Espacios duales

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y $V^* = \mathcal{L}(V, K)$ su espacio dual. Consideremos el espacio vectorial $V^* \oplus V$ y la función

$$<,>: V^* \oplus V \to K : (\phi, v) \mapsto < \phi, v >= \phi(v)$$

Tenemos que la función $<,>$ es en cada coordenada una función lineal en el correspondiente espacio. Además tenemos que

$$N_{V^*} = \{\phi \in V^* :< \phi, v >= 0 \ \ \forall v \in V\} = \{0_{V^*}\}$$

Por otro lado, si además $dim_K V < \infty$, entonces la existencia de bases duales nos permite asegurar que

$$N_V = \{v \in V :< \phi, v >= 0 \ \ \forall \phi \in V^*\} = \{0_V\}$$

Ejercicio 16. — *Verificar las anteriores. Dar un ejemplo de un espacio vectorial V de dimensión infinita de manera que $N_V \neq \{0_V\}$.*

Definición 10.3.1. — Consideremos dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K, diagamos V y W. Una dualidad entre W y V es una función

$$<,>: W \oplus V \to K : (w, v) \mapsto < w, v >$$

que satisface las siguientes propiedades :

(i) $<,>$ es lineal en cada una de las dos coordenadas (es decir, $<,>$ es una función bilineal) ;

(ii) $<,>$ no es degenerada, es decir

$$N_W = \{w \in W :< w, v >= 0 \ \ \forall v \in V\} = \{0_W\}$$

$$N_V = \{v \in V :< w, v >= 0 \ \ \forall w \in W\} = \{0_V\}$$

En tal caso diremos que W y V son espacios duales.

Ejemplo 10.3.2. —

1.- Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces V^* y V son duales y la dualidad $<,>$ es la dada anteriormente.

2.- Sea K un cuerpo. Entonces
$$<,>: K \oplus K \to K : (x,y) \mapsto < x,y >= xy$$
es una dualidad.

3.- Sea $K \subset \mathbb{R}$ un subcuerpo de $\mathbb{R}$. Entonces
$$<,>: K^n \oplus K^n \to K : ((x_1,...,x_n),(y_1,....,y_n)) \mapsto < (x_1,...,x_n),(y_1,....,y_n) >= \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$
es una dualidad.

4.- La función
$$<,>: \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} : ((x_1,...,x_n),(y_1,....,y_n)) \mapsto < (x_1,...,x_n),(y_1,....,y_n) >= \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$$
no es una dualidad, pero la función
$$<,>: \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} : ((x_1,...,x_n),(y_1,....,y_n)) \mapsto < (x_1,...,x_n),(y_1,....,y_n) >= \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$
si es una dualidad.

Definición 10.3.3. — Sean V y W espacios vectoriales duales con dualidad
$$<,>: W \oplus V \to K : (w,v) \mapsto < w,v >$$

(i) Diremos que los vectores $v \in V$ y $w \in W$ son ortogonales si $< w,v >= 0$.

(ii) Si $A < W$, entonces su espacio ortogonal es
$$A^{\perp} = \{v \in V :< a,v >= 0 \ \forall a \in A\}$$

(iii) Si $B < V$, entonces su espacio ortogonales
$$B^{\perp} = \{w \in W :< w,b >= 0 \ \forall b \in B\}$$

Ejercicio 17. — *Si W y W son duales, $A < W$ y $B < V$, entonces*
$$W^{\perp} = N_V = \{0_V\}$$
$$V^{\perp} = N_W = \{0_W\}$$
$$A < (A^{\perp})^{\perp}$$
$$B < (B^{\perp})^{\perp}$$
Si $dim_K V < \infty$, entonces
$$A = (A^{\perp})^{\perp}$$

$$B = (B^{\perp})^{\perp}$$

10.4. Teorema de representación de Riez

Supongamos que tenemos una dualidad

$$<,>: W \oplus V \to K : (w, v) \mapsto < w, v >$$

entre los espacios vectoriales W y V (ambos sobre el cuerpo K). Para cada $w \in W$ tenemos la función lineal

$$L_w : V \to K : v \mapsto L_w(v) =< w, v >$$

y luego tenemos una función

$$L : W \to V^* : w \mapsto L(w) = L_w$$

El hecho que $<,>$ sea lineal en la coordenada W nos dice que L es una transformación lineal. El hecho que $N_W = \{0_W\}$ nos dice que L es inyectiva. En efecto, supongamos que existen $w_1, w_2 \in W$ tales que $L_{w_1} = L_{w_2}$. Entonces para cada $v \in V$ tenemos que

$$< w_1, v >=< w_2, v >$$

y usando la lineabilidad en la primera coordenada, esto es equivalente a tener

$$< w_1 - w_2, v >= 0 \; \forall v \in V$$

de donde vemos que $w_1 - w_2 \in N_W = \{0_W\}$. Podemos proceder de la misma manera para todo $v \in V$ definir la función lineal

$$R_v : W \to K : w \mapsto R_v(w) =< w, v >$$

y la transformación lineal inyectiva

$$R : V \to W^* : w \mapsto R(v) = R_v$$

Si tenemos que $dim_K V = n < \infty$, entonces la inyectividad de la transformación L nos dice que $dim_K W = m \leq dim_K V^* = dim_K V = n$, en particular que W tiene dimensión finita. Ahora, la inyectividad de la transformación lineal R nos dice que $dim_K V = n \leq dim_K W^* = dim_K W = m$. En conlusión $n = m$.

Teorema 10.4.1 **(Teorema de representación de Riez)**. —
Sean V y W espacios vectoriales duales con dualidad

$$<,>: W \oplus V \to K : (w, v) \mapsto < w, v >$$

Si $dim_K V < \infty$, entonces :
(i) $V \cong W$;

(ii) las transformaciones lineales

$$L : W \to V^* : w \mapsto L(w) = L_w =< w, \cdot >$$

$$R : V \to W^* : v \mapsto R(v) = R_v =< \cdot, v >$$

son isomorfismos. En particular, para toda $\phi \in V^*$ existe un único $w \in W$ tal que $\phi =< w, \cdot >$ y para toda $\psi \in W^*$ existe un único $v \in V$ tal que $\psi =< \cdot, v >$.

Observación 10.4.2. — Más adelante cuando veamos espacios vectoriales reales con productos interiores (no-degenerados) el producto interior inducirá una dualidad del espacio vectorial consigo mismo. Así, en caso de dimensión finita tendremos que el teorema de representación de Riez nos dará la manera de representar todas las funciones lineales por un vector del espacio vectorial real.

10.5. Dualidad y transformaciones lineales

Consideremos V y W espacios vectoriales duales con dualidad

$$<,>: W \oplus V \to K : (w, v) \mapsto < w, v >$$

y U y Z espacios vectoriales duales con dualidad

$$<,>_0: U \oplus Z \to K : (u, z) \mapsto < u, z >_0$$

Supongamos que tenemos una transformación lineal

$$T : V \to Z$$

Definición 10.5.1. — Una transformación lineal $T^* : U \to W$ que satisface la igualdad

$$< u, T(v) >_0 =< T^*(u), v >, \quad \forall u \in U, v \in V$$

es llamada dual de T.

Ejemplo 10.5.2. — Sean V y Z espacios vectoriales sobre el cuerpo K. Si consideramos $W = V^*$ y $U = Z^*$, entonces tenemos las dualidades

$$<,>: V^* \oplus V : (\phi, v) \mapsto < \phi, v >= \phi(v)$$

$$<,>_0: Z^* \oplus Z : (\psi, z) \mapsto < \psi, z >_0 = \psi(z)$$

Sea $T : V \to Z$ una transfortmación lineal. Entonces la función

$$T^* : Z^* \to V^* : \psi \mapsto \psi \circ T$$

No es dificil ver que T^* es una transformación lineal. Además, como

$$< \psi, T(v) >_0 = \phi \circ T(v) = < \psi \circ T, v > = < T^*(\psi), v >$$

obtenemos que T^* y G son duales.

Teorema 10.5.3. — *Sean V y W espacios vectoriales duales con dualidad*

$$<,>: W \oplus V \to K : (w, v) \mapsto < w, v >$$

y U y Z espacios vectoriales duales con dualidad

$$<,>_0: U \oplus Z \to K : (u, z) \mapsto < u, z >_0$$

y supongamos que tenemos una transformación lineal

$$T : V \to Z$$

(i) Si T_1^* y T_2^* son ambas duales a T, entonces $T_1^* = T_2^*$.
(ii) Si T y T^* son duales, entonces

$$Ker(T^*) = (Im(T))^{\perp}$$

$$Ker(T) = (Im(T^*))^{\perp}$$

(iii) Si los espacios son de dimensión finita, entonces

$$Im(T^*) = (Ker(T))^{\perp}$$

$$Im(T) = (Ker(T^*))^{\perp}$$

Demostración. — Veamos parte (i). Supongamos que tenemos transformaciones lineales T_1^* y T_2^*, ambas duales a T. Entonces,

$$< T_2^*(u), v > = < u, T(v) >_0 = < T_1^*(u), v >, \quad \forall u \in U, v \in V$$

Luego

$$< (T_1^* - T_2^*)(u), v > = 0, \quad \forall u \in U, v \in V$$

Esto nos dice que $(T_1^* - T_2^*)(u) \in N_W = \{0_W\}$ para todo $u \in U$, es decir, $T_1^* = T_2^*$.

Veamos parte (ii). Sea $u \in Ker(T^*)$. Usando la igualdad

$$< u, T(v) >_0 = < T^*(u), v > = < 0_W, v > = 0 \forall v \in V$$

nos asegura $u \in (Im(T))^{\perp}$ y luego obtenemos la contensión

$$Ker(T^*) \subseteq (Im(T))^{\perp}$$

Sea $z \in (Im(T))^{\perp}$. Si $v \in V$, entonces tenemos

$$0 = < z, T(v) >_0 = < T^*(z), v >, \ \forall v \in V$$

Esto nos dice que $T^*(z) \in N_W = \{0_W\}$, es decir, $z \in Ker(T^*)$ y, en particular,

$$(Im(T))^\perp \subseteq Ker(T^*)$$

La otra igualdad se demuestra de la misma manera intercambiando los roles de T y T^*.

Veamos (iii). Como sabemos por (ii) que

$$Ker(T^*) = (Im(T))^\perp$$

$$Ker(T) = (Im(T^*))^\perp$$

y sabemos que en dimensión finita vale que $(A^\perp)^\perp = A$, entonces estamos listos.

$\square$

10.6. Problemas

1.- Sean

$$<,>_1: W \oplus V \to K$$

$$<,>: U \oplus Z \to K$$

dualidades. Verificar que

$$<,>_3: (W \oplus U) \oplus (V \oplus Z) \to K : (w+u, v+z) \mapsto < w, v >_1 + < u, z >_2$$

es una dualidad entre $W \oplus U$ y $V \oplus Z$.

2.- Sea $<,>: W \oplus V \to K$ una dualidad. Si A, B son ambos subespacios vectoriales de V, entonces definimos

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

el cual es un subespacio de V. Verificar que

$$(A+B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$$

3.- Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y defina

$$\phi : V \to (V^*)^* : v \mapsto \phi(v)$$

donde

$$\phi(v) : V^* \to K : f \mapsto f(v)$$

Verificar que

(i) ϕ es una transformación lineal inyectiva y

(ii) ϕ es sobreyectiva sí y sólo si $dim_K V < \infty$.

4.- Sea K un cuerpo y consideremos el espacio vectorial $W = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de las sucesiones en $\mathbb{K}$. Sea $V < \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ el subespacio vectorial formado de aquellas sucesiones en $\mathbb{K}$ con sólo un número finito de coordenadas diferentes de cero. Sea

$$<,>: W \oplus V \to K : ((x_1, ...), (y_1, ...)) \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$$

(i) Verificar que $<,>$ es una dualidad ;

(ii) Verificar que $L : W \to V^* : w \mapsto < w, \cdot >$ es un isomorfismo.

5.- Sea $<,>: W \oplus V \to K$ una dualidad con $dim_K V < \infty$. Sea $A < V$ y $B < W$. Verificar la igualdad

$$dim_K(A^{\perp} \cap B) + dim_K A = dim_K(A \cap B^{\perp}) + dim_K B$$

6.- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea

$$<,>: W \oplus V \to K$$

una dualidad. Consideremos el isomorfismo $R : W \to V^* : w \mapsto R_w =< w, \cdot >$. Utilize R para definir bases duales entre bases de V y bases de W. Compare con la noción de bases duales que vimos al comienzo del capítulo.

7.- Sea $<,>: W \oplus V \to K$ una dualidad donde $dim_K V < \infty$ y sea $T : V \to W$ una transformación lineal tal que

$$T \circ \phi = (\phi^*)^{-1} \circ T, \; \forall \phi \in GL(V)$$

Verificar que $T = 0$ y concluir que no existe una transformación lineal $T : V \to W$ que lleve una base de V en su base dual de W.

CAPÍTULO 11

REPRESENTACIONES MATRICIALES DE TRANSFORMACIONES

En este capítulo todos los espacios vectoriales serán asumidos de dimensión finita. Para efectp de cálculos con transformaciones lineales es bueno obtener representaciones simples de estas para calcular. Estas representaciones serán dadas por matrices.

11.1. Matrices ssociadas a transformaciones lineales

Supongamos que tenemos una transformación lineal

$$T : V \to W$$

entre espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo K. Sean

$$n = dim_K V$$

$$m = dim_K W$$

Tomemos bases de V y W dadas respectivamente por

$$\mathcal{B}_V = \{v_1, ..., v_n\}$$

$$\mathcal{B}_W = \{w_1, ..., w_m\}$$

Tenemos los isomorfismos dados por los vectores de coordenadas en cada base

$$\phi_{\mathcal{B}_V} : V \to M(n \times 1 : K) : \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \mapsto x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\phi_{\mathcal{B}_W} : W \to M(m \times 1 : K) : \sum_{j=1}^{m} y_j w_j \mapsto y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Ya que la composición de transformaciones lineales es una transformación lineal y la inversa de un isomorfismo lineal es también una transformación lineal, tenemos que la función

$$\widehat{L} = \phi_{\mathcal{B}_W} \circ L \circ \phi_{\mathcal{B}_V}^{-1} : M(n \times 1; K) \to M(m \times 1; K) : x \mapsto y$$

es una transformación lineal. Si tenemos que

$$L(v_j) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{kj} w_k,$$

entonces vale que

$$L\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{kj} x_j\right) w_k$$

Esto nos dice que si

$$L\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right) = \sum_{k=1}^{m} y_k w_k$$

entonces

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{kj} x_j$$

Si consideramos la matriz

$$M(L, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \cdots & \lambda_{mn} \end{pmatrix}$$

lo anterior puede escribirse como

$$y = M(L, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)x$$

es decir, la transformación lineal $\widehat{L}$ no es nada más que la multiplicación a la izquierda por la matriz $M(L, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$.

Definición 11.1.1. — La matriz $M(L, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$ es llamada la matriz asociada a L en las bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$.

Ejercicio 18. — *Vea que $Ker(L)$ es dado por aquellos vectores $v \in V$ cuyos vectores coordenadas x satisfacen*

$$M(L, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)x = 0_{m \times 1}$$

Ejemplo 11.1.2. — Sea $L :\to V$ una transformación lineal, donde V es una espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K. Supongamos que podemos encontrar $W < V$, $W \neq V$, que sea un subespacio invariante por L. Si escogemos una base de W y la completamos a una base de V, entonces la representación matricial de L en tal base tendrá la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

donde A_1 es una matriz cuadrada de tamaño igual a $dim_K W$, A_3 es una matriz cuadrada de tamaño igual a $dim_K V - dim_K W$ y A_2 es una matriz de tamaño $dim_K W \times (dim_K V - dim_K W)$.

Ejemplo 11.1.3. — Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K con $dim_K V = n$. Sean

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1, ..., v_n\}$$
$$\mathcal{B}_2 = \{w_1, ..., w_n\}$$

dos bases de V. Si $I : V \to V$ denota la transformación identidad, entonces la matriz asociada $M(I, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}_2$.

Ejercicio 19. — *Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita y $L : V \to W$ una transformación lineal. Sean*

$$\mathcal{B}_V^1, \mathcal{B}_V^2$$

dos bases de V y sean

$$\mathcal{B}_W^1, \mathcal{B}_W^2$$

dos bases de W. Verificar la siguiente igualdad :

$$M(L, \mathcal{B}_V^2, \mathcal{B}_W^2) = M(I, \mathcal{B}_W^1, \mathcal{B}_W^2) M(L, \mathcal{B}_V^1, \mathcal{B}_W^1) M(I, \mathcal{B}_V^2, \mathcal{B}_V^1)$$

Ejemplo 11.1.4. — Sea K un cuerpo y consideremos la siguiente transformación lineal

$$L : K_2[x] \to K_1[x] : p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mapsto \frac{p(x) - p(0)}{x} = a_1 + a_2 x$$

Si consideramos las bases

$$\mathcal{B}_{K_2[x]} = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$$
$$\mathcal{B}_{K_1[x]} = \{1 + x, 1 - x\}$$

entonces tenemos las igualdades

$$L(1 + x) = 1 = \frac{1}{2}(1 + x) + \frac{1}{2}(1 - x)$$

$$L(x+x^2) = 1+x$$

$$L(1+x^2) = x = \frac{1}{2}(1+x) - \frac{1}{2}(1-x)$$

de donde vemos que

$$M(L, \mathcal{B}_{K_2[x]}, \mathcal{B}_{K_1[x]}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Así, por ejemplo, si queremos calcular $Ker(L)$ sólo necesitamos calcular aquellos vectores

$$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \in M(3 \times 1; K)$$

tales que

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir, aquellos para los cuales valen las igualdades

$$t_1 = -t_2 = t_3$$

en otras palabras, los vectores en $Ker(L)$ son aquellos de la forma

$$p(x) = a(1+x) - a(x+x^2) + a(1+x^2), \quad a \in K$$

es decir

$$p(x) = 2a, \quad a \in K$$

Así, si la característica de K es diferente de 2, entonces tenemos que $Ker(L) = K_0[x] \cong K$ y, en particular, $dim_K Ker(L) = 1$. Pero, si la característica de K es 2, entonces tenemos que $Ker(L) = \{0\}$ y, en particular, $dim_K Ker(L) = 0$.

Ejemplo 11.1.5 **(La matriz que representa un transformación dual)**
Consideremos espacios vectoriales sobre un cuerpo K, todos de dimensión finita, digamos V, W, U y Z y supongamos que tenemos dualidades

$$<,>: W \oplus V \to K$$

$$<,>_0: U \oplus Z \to K$$

Supongamos que $dim_K V = n$ y $dim_K Z = m$; entonces sabemos que $dim_K W = n$ y $dim_K U = m$.

Sea $T : V \to Z$ una transformación lineal. Si escogemos bases

$$\mathcal{B}_V = \{v_1, ..., v_n\}$$

$$\mathcal{B}_Z = \{z_1, ..., z_m\}$$

Podemos entonces calcular la matriz asociada a T en tales bases

$$M(T,\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_Z)=\left(\begin{array}{cccc}\lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \cdots & \lambda_{mn}\end{array}\right)$$

Sea $T^*:U\to W$ transformación dual a T. Queremos determinar bases apropiadas de U y W y la matriz asociada a T^*.

La base (ordenada) $\mathcal{B}_V$ induce una base (ordenada) en W

$$\mathcal{B}_V^*=\{w_1,...,w_n\}$$

de manera que vale la condición

$$<w_j,v_k>=\left\{\begin{array}{ll}1 & j=k\\ 0 & j\neq 0\end{array}\right.$$

llamada la base dual de $\mathcal{B}_V$. De manera similar, la base $\mathcal{B}_Z$ induce por la dualidad $<,>_0$ una base dual para U

$$\mathcal{B}_Z^*=\{u_1,...,u_m\}$$

De esta maneratenemos la matriz asociada a T^* en tales bases

$$M(T^*,\mathcal{B}_Z^*,\mathcal{B}_V^*)=\left(\begin{array}{cccc}\eta_{11} & \eta_{12} & \cdots & \eta_{1m}\\ \eta_{21} & \eta_{22} & \cdots & \eta_{2m}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \eta_{n1} & \eta_{n2} & \cdots & \eta_{nm}\end{array}\right)$$

Ahora, observemos que debe cumplirse la igualdad

$$<u_j,T(v_k)>_0=<T^*(u_j),v_k>$$

y ya que

$$T(v_k)=\lambda_{1k}z_1+\cdots+\lambda_{mk}z_m$$

$$T^*(u_j)=\eta_{1j}w_1+\cdots+\eta_{nj}w_n$$

esto nos dice que

$$M(T^*,\mathcal{B}_Z^*,\mathcal{B}_V^*)={}^tM(T,\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_Z)$$

11.2. Problemas

1.- Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo K. Considere la transformación lineal trivial

$$0:V\to W:v\mapsto 0_W$$

Calcular $M(0,\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W)$.

2.- Sea $L : V \to W$ un isomorfismo, $dim_K V < \infty$. Si $\mathcal{B}_V$ es una base de V y $\mathcal{B}_W$ es una base de W, entonces

¿Qué relación existe entre las matrices $M(L, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W)$ y $M(L^{-1}, \mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V)$?

3.- Sea

$$L : K_4[x] \to K_4[x] : p(x) \mapsto \frac{d}{dx}(xp(x))$$

Calcular

$$M(L, \{1, x, x^2, x^3, x^4\}, \{1, x, x^2, x^3, x^4\})$$

4.- Usando la base canónica $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ para K^n, calcular $M(L, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ para las siguientes transformaciones lineales :

(i) $L(x_1, ..., x_n) = (x_n, x_1, x_2, ..., x_{n-1})$.

(ii) $L(x_1, ..., x_n) = (x_2, x_1, x_3, x_4, ..., x_n)$.

5.- Sean V un espacio vectorial sobre un cuerpo K de dimensión finita y $L : V \to V$ una transformación lineal. Sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ bases de V. Verificar que

$$M(L, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2) = M(I, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)M(L, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)M(I, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)^{-1}$$

es decir, las matrices $M(L, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2)$ y $M(L, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$ son conjugadas por la matriz de cambio de base.

CAPÍTULO 12

FUNCIONES MULTILINEALES Y DETERMINANTES

12.1. Funciones multilineales

Definición 12.1.1. — Sean $V_1, ..., V_r$ espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K. Una función

$$L : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_r \to K$$

la cual es lineal en cada una de las r coordenadas es llamada una función r-lineal ó multilineal. Cuando $r = 1$ tenemos las funciones lineales y cuando $r = 2$ tenemos las funciones bilineales. Denotaremos por $M(V_1, ..., V_r; K)$ al conjunto de tales funciones r-lineales.

Ejemplo 12.1.2. — Sea la función

$$F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : ((a, b), (c, d)) \mapsto ad - bc = det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

es una función bilineal.

Ejercicio 20. — *Sean $V_1, ..., V_r$ espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K. Verificar que el conjunto $M(V_1, ..., V_r; K)$, con las operaciones usuales de suma y amplificación de funciones, es un espacio vectorial sobre K.*

Ejercicio 21. — *Sean espacios vectoriales $V_1, ..., V_r$ sobre el mismo cuerpo K. Si $L_j : V_j \to K$ es función lineal, entonces*

$$T : V_1 \times \cdots \times V_r \to K : (v_1, ..., v_r) \mapsto L_1(v_1)L_2(v_2) \cdots L_r(v_r)$$

es una función r-lineal.

Consideremos una función r-lineal

$$L : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_r \to K$$

donde cada V_j es un espacio vectorial sobre K de dimensión finita $dim_K V_j = n_j$. Escojamos una base de cada V_j, digamos

$$\mathcal{B}_j = \{v_1^j, ..., v_{n_j}^j\}$$

y su base dual de V_j^*, digamos

$$\mathcal{B}_j^* = \{f_1^j, ..., f_{n_j}^j\}$$

En este caso, tenemos que

$$L(w_1, ..., w_r) = L\left(\sum_{k_1=1}^{n_1} x_{1k_1} v_{k_1}^1, ..., \sum_{k_r=1}^{n_r} x_{rk_r} v_{k_r}^r\right) = \sum_{k_1,k_2,...,k_r} x_{1k_1} x_{2k_2} \cdots x_{rk_r} L(v_{k_1}^1, ..., v_{k_2}^2)$$

Si denotamos $L(v_{k_1}^1, ..., v_{k_2}^2) = a_{k_1,k_2,...,k_r}$, entonces tenemos que

$$L = \sum_{k_1,k_2,...,k_r} a_{k_1,k_2,...,k_r} f_{k_1}^1 \cdots f_{k_r}^r$$

De esta manera, vemos que un conjunto de generadores para el espacio $M(V_1, ..., V_r)$ es dado por

$$\mathcal{B} = \{f_{k_1}^1 \cdots f_{k_r}^r; 1 \leq k_j \leq n_j,\ j = 1, ..., r\}$$

Por otro lado, si tenemos una combinación lineal

$$0 = \sum_{k_1,k_2,...,k_r} a_{k_1,k_2,...,k_r} f_{k_1}^1 \cdots f_{k_r}^r$$

entonces al evaluar sobre

$$(v_{k_1}^1, ..., v_{k_r}^r)$$

obtenemos que

$$a_{k_1,k_2,...,k_r} = 0$$

es decir que $\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente.

Teorema 12.1.3. — *Sea V_j un espacio vectorial sobre K de dimensión finita $dim_K V_j = n_j$, para $j = 1, .., r$. Entonces*

$$dim_K M(V_1, ..., V_r; K) = n_1 n_2 \cdots n_r$$

Más aún, si tenemos bases de V_j, digamos

$$\mathcal{B}_j = \{v_1^j, ..., v_{n_j}^j\}$$

y su respectiva base dual de V_j^*, digamos

$$\mathcal{B}_j^* = \{f_1^j, ..., f_{n_j}^j\}$$

entonces

$$\mathcal{B} = \{f^1_{k_1} \cdots f^r_{k_r}; 1 \leq k_j \leq n_j,\ j = 1, ..., r\}$$

es una base de $M(V_1, ..., V_r; K)$.

Definición 12.1.4. — Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K con $dim_K V = n$. Una función r-lineal

$$L : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r\ times} \to K$$

es llamada alternada si

$$L(v_1, ..., v_r) = 0 \text{ si tenemos que } v_i = v_j \text{ para algunos } i \neq j$$

Ejercicio 22. — *Sea* V *un espacio vectorial sobre el cuerpo* K *con* $dim_K V = n$. *Un afunción* r*-lineal*

$$L : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r\ times} \to K$$

Verificar que L *es alternada sí y sólo si vale la siguiente propiedad :*

$L(v_1, ..., v_r) = 0 \iff \{v_1, ..., v_r\} \subset V$ *es un conjunto linealmente dependiente.*

Ejercicio 23. — *Sea* $L : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r\ times} \to K$ *una función* r*-lineal alternada.*

(i) El valor de $L(v_1, v_2, v_3, ..., v_r)$ *cambia de signo si permutamos dos coordenadas diferentes.*

(ii) Sea $\mathfrak{S}_r$ *el grupo de las permutaciones del conjunto* $\{1, 2, ..., r\}$. *Recuerde que el signo de una permutación* $\sigma \in \mathfrak{S}_r$*, denotado por* $sign(\sigma)$ *es* $+1$ *si ella puede escribirse como una composición par de involuciones (ciclos de longitud* 2*) y* -1 *en caso contrario. Las permutaciones de signo* $+1$ *forman el subgrupo de índice dos* $\mathfrak{A}_r$*, llamado el grupo alternante en* r *elementos. Verficar que para todo* $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ *vale la igualdad*

$$L(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(r)}) = sign(\sigma) L(v_1, ..., v_r)$$

12.2. Determinates

En el resto de este capítulo supondremos que los cuerpos son de característica 0, por ejemplo $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{Q}[\sqrt{2}], \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ y nuestros espacios vectoriales serán de dimensión finita.

Definición 12.2.1. — Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K con $dim_K V = n$. Una función determinante en V es una función n-lineal

$$\Delta : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n\ times} \to K$$

que es alternada.

Ejemplo 12.2.2. — Sea la función

$$F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : ((a,b),(c,d)) \mapsto ad - bc = det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

es una función determinante.

12.2.1. Construcción de funciones determinantes. — Ahora procederemos a construir funciones determinantes para todo espacio vectorial V de dimensión finita.

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K con $dim_K V = n$. Escojamos una base de V, digamos

$$\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$$

y su respectiva base dual de $V*$, digamos

$$\mathcal{B}^* = \{f_1, ..., f_n\}$$

Consideremos la función n-lineal

$$\Phi^{\mathcal{B}} : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n\ veces} \to K : (w_1, ..., w_r) \mapsto f_1(w_1) \cdots f_n(w_n)$$

Ejercicio 24. — *Si* $w_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kj} v_k$*, entonces vea que*

$$\Phi^{\mathcal{B}}(w_1, ..., w_n) = \lambda_{11}\lambda_{22} \cdots \lambda_{nn}$$

Deducir que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$*, entonces*

$$\Phi^{\mathcal{B}}(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(n)}) = \begin{cases} 1 & \sigma = I \\ 0 & \sigma \neq I \end{cases}$$

y concluir que no es una función determinante.

Ahora, por cada permutación $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ definamos la función

$$\Phi^{\mathcal{B}}_{\sigma} : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n\ veces} \to K$$

definida por

$$\Phi^{\mathcal{B}}_{\sigma}(w_1, ..., w_n) = \Phi^{\mathcal{B}}(w_{\sigma(1)}, ..., w_{\sigma(n)})$$

Ejercicio 25. — *Verificar que $\Phi_\sigma^{\mathcal{B}}$ es una función n-lineal y que*

$$\Phi_\sigma^{\mathcal{B}}(v_1,...,v_n) = \begin{cases} 1 & \sigma = I \\ 0 & \sigma \neq I \end{cases}$$

Tenemos que ninguna de las funciones n-lineales $\Phi_\sigma^{\mathcal{B}}$ es antisimétrica, pero podemos sumarlas apropiadamente para si obtener una. Para esto, sea

$$\Delta_{\mathcal{B}} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} sign(\sigma)\Phi_\sigma^{\mathcal{B}} : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n\ veces} \to K$$

Ya que la suma de funciones n-lineales sigue siendo una función n-lineal, entonces $\Delta_{\mathcal{B}}$ también lo es. Hemos obtenido el siguiente.

Teorema 12.2.3. — *Sea $\mathcal{B} = \{v_1,...,v_n\}$ una base de V. Entonces, la función $\Delta_{\mathcal{B}}$ es una función determinante con la propiedad que $\Delta_{\mathcal{B}}(v_1,...,v_n) = 1$, en particular, $\Delta_{\mathcal{B}} \neq 0$. Además,*

$$\Delta_{\mathcal{B}}(w_1,...,w_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} sign(\sigma)\lambda_{\sigma(1)1}\lambda_{\sigma(2)2}\cdots\lambda_{\sigma(n)n}$$

donde

$$w_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kj} v_k$$

Ejercicio 26. — *Verificar lo anterior.*

Definición 12.2.4. — La función determinante $\Delta_{\mathcal{B}}$ será llamada la asociada a la base $\mathcal{B}$.

12.3. Relación entre funciones determinantes

Como antes, sea V un espacio vectorial sobre K de dimensión finita, $\mathcal{B}$ una base V y $\Delta_{\mathcal{B}}$ la función determinante asociada a $\mathcal{B}$ construida en la sección previa. Ahora veremos como se relacionan todas las otras funciones determinantes en V con $\Delta_{\mathcal{B}}$.

Teorema 12.3.1. — *Si Δ es una función determinante sobre V, entonces existe una constante $\lambda \in K$ tal que*

$$\Delta = \lambda\Delta_{\mathcal{B}}$$

Demostración. — Sea $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ alguna base de V y $\Delta_{\mathcal{B}}$ su función determinante asociada. Entonces tenemos que

$$\Delta_{\mathcal{B}}(v_1, ..., v_n) = 1$$

Sea

$$\lambda = \Delta(v_1, ..., v_n)$$

Como antes, si escribimos

$$w_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kj} v_k$$

obtenemos que

$$\Delta_{\mathcal{B}}(w_1, ..., w_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} sign(\sigma) \lambda_{\sigma(1)1} \cdots \lambda_{\sigma(n)n}$$

Por otro lado, usando la multilineabilidad y la propiedad de alternancia de Δ, se obtiene que

$$\begin{aligned} \Delta(w_1, ..., w_n) &= \sum_{j_1, ..., j_n} \lambda_{j_1 1} \cdots \lambda_{j_n n} \Delta(v_{j_1}, ..., v_{j_n}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \lambda_{\sigma(1)1} \cdots \lambda_{\sigma(n)n} \Delta(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \lambda_{\sigma(1)1} \cdots \lambda_{\sigma(n)n} sign(\sigma) \Delta(v_1, ..., v_n) \\ &= \lambda \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \lambda_{\sigma(1)1} \cdots \lambda_{\sigma(n)n} sign(\sigma) \\ &= \lambda \Delta_{\mathcal{B}}(w_1, ..., w_n) \end{aligned}$$

□

Corolario 12.3.2. — *Si $\Delta \neq 0$ es una función determinante, entonces existe una base $\mathcal{B}_{\Delta}$ de manera que*

$$\Delta = \Delta_{\mathcal{B}_{\Delta}}$$

Demostración. — Sea $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ alguna base de V. El teorema anterior nos dice que existe $\lambda \in K$ de manera que $\Delta = \lambda \Delta_{\mathcal{B}}$. Como estamos asumiendo que $\Delta \neq 0$, tenemos que $\lambda \neq 0$. Si consideramos la base

$$\mathcal{B}_{\Delta} = \{\lambda^{-1} v_1, v_2, ..., v_n\}$$

podemos ver que

$$\Delta_{\mathbb{B}}(\lambda^{-1} v_1, v_2, ..., v_n) = \lambda^{-1} = \lambda^{-1} \Delta_{\mathbb{B}_{\Delta}}(\lambda^{-1} v_1, v_2, ..., v_n)$$

es decir

$$\Delta = \lambda \Delta_{\mathcal{B}} = \Delta_{\mathbb{B}_{\Delta}}$$

□

Corolario 12.3.3. — *Sean* $\Delta_1 \neq 0$ *y* Δ_2 *funciones determinantes para* V. *Entonces existe* $\lambda \in K$ *de manera que*

$$\Delta_2 = \lambda \Delta_1$$

12.4. Determinantes de transformaciones lineales

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K y sea

$$L : V \to V$$

una transformación lineal. Sea $\Delta \neq 0$ una función determinante para V. Consideremos la función n-lineal

$$\Delta_L : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n\ veces} \to K$$

definida por

$$\Delta_L(w_1, ..., w_n) = \Delta(L(w_1), ..., L(w_n))$$

No es difícil darse cuenta que Δ_L es una función determinante para V. Luego, existe una constante $det(L) \in K$ tal que

$$\Delta_L = det(L)\Delta$$

Teorema 12.4.1. — *El valor* $det(L)$ *no depende de la función determinante* $\Delta \neq 0$ *para* V.

Demostración. — Sean $\Delta_1 \neq 0$ y $\Delta_2 \neq 0$ funciones determinantes para V y sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda \in K$ tales que

$$\Delta_{1L} = \lambda_1 \Delta_1$$
$$\Delta_{2L} = \lambda_2 \Delta_2$$
$$\Delta_2 = \lambda \Delta_1$$

Esto nos dice que :

$$\lambda_2 \Delta_2 = \Delta_{2L} = (\lambda \Delta_1)_L = \lambda \Delta_{1L} = \lambda(\lambda_1 \Delta_1) = \lambda_1(\lambda \Delta_1) = \lambda_1 \Delta_2$$

de donde obtenemos que $\lambda_1 = \lambda_2$. □

Definición 12.4.2. — El valor $det(L)$ obtenido anteriormente es llamado el determinante de L.

Ejemplo 12.4.3. — Sea V espacio vectorial sobre el cuerpo K de dimensión finita $dim_K V = n$. Para cada $\alpha \in K$ podemos considerar la transformación lineal

$$L_\alpha : V \to V : v \mapsto \alpha v$$

Sea $\Delta \neq 0$ una función determinante sobre V asociada al la base $\{v_1, ..., v_n\}$. Entonces,

$$\Delta_{L_\alpha}(v_1, ..., v_n) = \Delta(\alpha v_1, ..., \alpha v_n) = \alpha^n \Delta(v_1, ..., v_n) = \alpha^n$$

luego

$$det(L_\alpha) = \alpha^n$$

12.5. Determinantes de matrices

Ahora usaremos las funciones determinantes para definir el determinante de una matriz cuadrada. Consideremos el espacio vectorial

$$M(n \times n; K)$$

de todas las matrices cuadradas de tamaño n con coeficientes en K. Si $A \in M(n \times n; K)$, entonces tenemos la transformación lineal

$$T_A : M(n \times 1; K) \to M(n \times 1; K) : x \mapsto Ax$$

Definición 12.5.1. — Se define como el determinante de A, $det(A)$, como el determinante de T_A, es decir,

$$det(A) = det(T_A)$$

Escojamos la base canónica de $M(n \times 1; k)$,

$$\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$$

donde e_j tiene todas sus coordenadas igual a 0 excepto la j-ésima coordenada que vale 1, y consideramos la función determinante $\Delta = \Delta_{\mathcal{B}}$ asociada a ella.

Si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces, usando el hecho que

$$\Delta_{T_A} = det(A)\ \Delta$$

obtenemos, al evaluar $\Delta_{T_A}(e_1, ..., e_n)$, la igualdad

$$det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} sig(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

En particular, tenemos que

$$det(I) = 1$$

Ejercicio 27. — *Sea V un espacio vectorial sobre K de dimensión finita y sea $L : V \to V$ una transformación lineal. Sea $\mathcal{B}$ una base de V y $\Delta_{\mathcal{B}}$ su función determinante asociada. Usar la igualdad*

$$\Delta_L = det(L)\Delta$$

para obtener que

$$det(L) = detM(L, \mathcal{B}, \mathcal{B})$$

Observación 12.5.2. — Una manera equivalente de obtener el determinante de una matriz $A \in M(n \times n; K)$ es la siguiente. Sea K^n y $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de K^n junto a su función determinante asociada $\Delta_{\mathcal{B}}$. Tenemos el isomorfismo dado por la asignación de vectores coordenadas

$$\phi_{\mathcal{B}} : K^n \to M(n \times 1; K) : \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \mapsto {}^t(x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n)$$

Considere la función

$$\phi : \underbrace{K^n \times \cdots \times K^n}_{n \; veces} \to M(n \times n; K) : (w_1, ..., w_n) \mapsto \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

donde

$$w_j = (x_{1j}, x_{2j}, ..., x_{nj})$$

Entonces ϕ resulta ser un isomorfismo. En este caso obtenemos que

$$det(A) = \Delta_{\mathcal{B}}(\phi^{-1}(A))$$

Hemos visto que dada una matriz $A = (a_{ij}) \in M(n \times n; K)$, tenemos a ella asociado un número $det(A) \in K$, el determinante de A :

$$det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} sig(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

Esta sumatoria puede ordenarse de manera adecuada para obtener una fórmula inductiva para calcular $det(A)$. Para esto, definimos el cofactor (i, j) de A como

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij})$$

donde $A_{ij} \in M((n-1) \times (n-1); K)$ se obtiene de A al eliminar la fila i-ésima y columna j-ésima de A.

Entonces, para cada $r \in \{1, ..., n\}$ vale la igualdad :

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{rj} c_{rj} = \sum_{j=1}^{n} a_{jr} c_{jr}$$

Definición 12.5.3. — La matriz $C_A = (c_{ij}) \in M(n \times n; K)$, donde c_{ij} es el cofactor (i, j) de $A \in M(n \times n; K)$ es llamada la matriz de cofactores de A.

Ejercicio 28. — *Usar inducción para verificar lo anterior.*

Ejemplo 12.5.4. — Si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2; K)$$

entonces su matriz de cofactores es

$$C_A = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \in M(2 \times 2; K)$$

y

$$det(A) = ad - bc$$

Ejercicio 29. — *Calcular*

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

12.6. Propiedades de determinantes

En toda esta sección suponemos que tenemos un espacio vectorial V de dimensión finita $dim_K V = n$ sobre el cuerpo K.

Teorema 12.6.1. — *Sea $L : V \to V$ una transformación lineal. Entonces, L es un isomorfismo sí y sólo si $det(L) \neq 0$.*

Demonstración. — Supongamos que L es un isomorfismo. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V. Entonces $\mathcal{B}_L = \{L(v_1), ..., L(v_n)\}$ es una base de V. Si $\Delta = \Delta_{\mathcal{B}}$ es la función determinante asociada a $\mathcal{B}$, entonces como sabemos que $\Delta \neq 0$, debemos tener que

$$0 \neq \Delta(L(v_1), ..., L(v_n)) = \Delta_L(v_1, ..., v_n) = det(L)\Delta(v_1, ..., v_n) = det(L)$$

Recíprocamente, supongamos que $det(L) \neq 0$. Si $dim_K Ker(L) \neq 0$, entonces podemos tomar una base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ de V que contiene vectores de $Ker(L)$, digamos que $v_1 \in Ker(l)$. Ahora, si $\Delta = \Delta_{\mathcal{B}}$ es la función determinante asociada a $\mathcal{B}$, entonces tenemos la igualdad

$$\Delta_L(v_1, ..., v_n) = det(L)\Delta(v_1, ..., v_n) = det(L)$$
$$\Delta_L(v_1, ..., v_n) = \Delta(0, L(v_2), ..., L(v_n)) = 0$$

es decir, $det(L) = 0$, una contradicción.

□

Teorema 12.6.2. — *Si $L, N : V \to V$ son transformaciones lineales, entonces*

$$det(L \circ N) = det(L)det(N)$$

Demostración. — Sea $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V y $\Delta = \Delta_{\mathcal{B}}$ la función determinante asociada a $\mathcal{B}$. Tenemos que :

$$\Delta(L \circ N(v_1), ..., L \circ N(v_n)) = det(L \circ N)\Delta(v_1, ..., v_n) = det(L \circ N)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \Delta(L \circ N(v_1), ..., L \circ N(v_n)) &= \Delta(L(N(v_1)), ..., L(N(v_n))) \\ &= det(L)\Delta(N(v_1), ..., N(v_n)) \\ &= det(L)det(N)\Delta(v_1, ..., v_n) \\ &= det(L)det(N) \end{aligned}$$

□

Usando el hecho que $det(I) = 1$, el resultado anterior nos da el siguiente.

Corolario 12.6.3. —

(i) Si $L : V \to V$ es un isomorfismo, entonces

$$det(L^{-1}) = \frac{1}{det(L)}$$

(ii) Sea $A \in GL(n; K)$, entonces

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

(iii) Sea $T : V \to V$ una transformación lineal y sean $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ dos bases de V. Entonces,

$$det(M(L, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)) = det(M(L, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2))$$

12.7. Problemas

1.- Usar la fórmula de determinante de matrices por cofactores para verificar las siguientes :

(i) $det(^tA) = det(A)$.

(ii) Si A tiene columnas linealmente dependientes, entonces $det(A) = 0$.

(iii) $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$.

(iv) Sea $A = (a_{ij})$ una matriz triangular (inferior ó superior), entonces $det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

(v) Calcular el determinante de las matrices elementales (usadas en el método de Gauss).

(vi) Sean matrices $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) \in M(n \times n; K)$ y fijemos un valor $k \in \{1, ..., n\}$. Supongamos que

(a) $a_{ij} = b_{ij}$ para $j \neq k$;

(b) $c_{ij} = a_{ij}$ para $j \neq k$;

(c) $c_{kj} = a_{kj} + b_{kj}, j = 1, ..., n$.

Verificar que $detC = detA + detB$.

(vii) Si $^tA = -A$, entonces $det(A) = (-1)^n det(A)$. Concluir que si n es par, entonces $det(A) = 0$.

2.- Considere tres rectas en el plano K^2, digamos

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \\ a_3x + b_3y &= c_3 \end{aligned}$$

Verificar que estas tienen un punto en común sí y sólo si

$$det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0$$

Ind : Considere la transformación lineal $T : M(3 \times 1; K) \to M(3 \times 1; K) : x \mapsto Ax$, donde A es la matriz anterior. Vea que $(x, y) \in K^2$ es solución al problema sí y sólo si $^t(x \ y \ -1) \in M(3 \times 1; K)$ pertenece a $Ker(T)$.

3.- Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ dos vectores diferentes. Verificar que la ecuación de la única recta determinada por esos puntos es dada por

$$det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

4.- Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2,), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ tres vectores no colineales. Verificar que la ecuación del único círculo determinado por esos puntos es dada por

$$det \begin{pmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Ind : recuerde que la ecuación del círculo es de la forma : $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$.

5.- $det(A^k) = det(A)^k$.

6.- Sea $A \in M(n \times n; K)$ y $\lambda \in K$. Verificar que existe $x \in M(n \times 1; K)$, $x \neq 0_{M(n\times 1;K)}$, resolviendo la ecuación lineal $Ax = \lambda x$ sí y sólo si $det(A - \lambda I) = 0$.

Ind : Mire la matriz $A - I \in M(n \times n; K)$ como una transformación lineal de $M(n \times 1; K)$ en si mismo y observe que una solución x de la ecuación anterior debe pertenecer al núcleo de esta transformación lineal.

Cuando $\lambda = 1$, esto nos da los estados en equilibrio de modelos de evolución $x_{n+1} = Ax_n$ estudiados anteriormente.]

7.- Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in M(n \times n; K)$ y su matriz de cofactores C_A, se define la matriz adjunta de A como

$$adjA := {}^tC_A$$

Usando la fórmula de cofactores para el determinante de una matriz, verificar que

$$A\; adjA = det(A) \cdot I$$

Ind : Para $i \neq j$ defina $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})$ como la matriz que se obtiene de A al reemplazar la fila j-ésima de ella por la i-ésima fila. Así, A y $\widetilde{A}$ sólo difieren en la fila j-ésima, en donde se encuentra una copia de la fila i-ésima. De esta manera, $det(\widetilde{A}) = 0$. Usar la formula por cofactores desarrollando para la fila j-ésima. Ver que los cofactores (j,k) de A, c_{ij}, y de $\widetilde{A}$, $\widetilde{c}_{ij}$, coinciden y concluir que, para $i \neq j$,

$$0 = det(\widetilde{A}) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{a}_{jk}(-1)^{j+k}\widetilde{c}_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(-1)^{j+k}c_{jk}$$

y para $i = j$ vale que

$$det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}c_{ik}$$

Ahora verificar que estos son los coeficientes de la matriz $A\; adjA$.

8.- Deducir de 7.- que si $A \in GL(n;K)$, entonces
$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} AdjA$$

9.- Calcular A^{-1} si
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

10.- Ahora tenemos dos métodos para calcular las matrices inversas, el método de Gauss y el método dado en 8.- Determine en términos de n la cantidad de pasos usados en cada método e indique cual de los dos métodos es computacionalmente más barato.

11.- *Regla de Kramer*. Considere el sistema lineal $Ax = b$, donde $A \in GL(n;K)$. Use el problema 8.- para describir la forma de las coordenadas x_j de la solución $x = {}^t(x_1\ x_2\ \cdots x_n)$ en términos de A y b.

Ind : Si $Ax = b$, como A es invertible, $x = A^{-1}b$. Luego,
$$x = \frac{1}{det(A)} adjA\ b = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Observar que el coeficiente j-ésimo del vector $adjA\ b$ es dado por
$$(d_{1j}\ \cdots\ d_{jn}) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} d_{kj} b_j$$

Sea A_j la matriz obtenida de A al reemplazar su columna j-ésima por b. Calcule el determinante de A_j usando la f'ormula de cofactores por la j-ésima columna, es decir
$$det(A_j) = b_1 c_{1j} + b_2 c_{2j} + \cdots + b_n c_{nj}$$

Para calcular el cofactor c_{kj} uno elimina de A_j la fila k y la columna j, luego el cofactor c_{kj} es el igual al cofactor (k, j) de la matriz A, es decir,
$$c_{kj} = d_{kj}$$

De esta manera
$$det(A_j) = \sum_{k=1}^{n} d_{kj} b_j$$
de donde vemos que el coeficiente j-ésimo de $adjA\ b$ es dado por $det(A_j)$, y como consecuencia,
$$x_j = \frac{det(A_j)}{det(A)}$$

CAPÍTULO 13

ESPACIOS VECTORIALES CON PRODUCTO INTERIOR

En este capítulo todos los cuerpos K serán asumidos ser un subcuerpo del cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$ (ejemplos particulares son $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$).

13.1. Productos interiores

Definición 13.1.1. — Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{C}$.

1.- Un producto interior en V es una función

$$<,>: V \oplus V \to K : (u,v) \mapsto < u,v >$$

que satisface las siguientes propiedades :

(1.1.-) para todo $\lambda \in K$ y todo triple $u, v, w \in V$ vale que

$$< \lambda v + u, w >= \lambda < v, w > + < u, w >$$

es decir, $<,>$ es lineal en la primera coordenada ;

(1.2.-) para todo $v, w \in V$ vale que

$$< v, w >= \overline{< w, v >}$$

El par $(V, <,>)$ es llamado un espacio vectorial con producto interior.

2.- El producto interior $<,>$ en V es llamado no-degenerado si este satisface :

(2.1.-) para todo $v \in V - \{0_V\}$ existe $w \in V$ (necesariamente $w \neq 0_V$) tal que

$$< v, w >\neq 0$$

3.- El producto interior $<,>$ sobre V es llamado un producto interior positivo definido si este satisface :

3.1.- para todo $v \in V$ vale que

$$< v, v >\geq 0$$

3.2.- para todo $v \in V$ vale que

$$< v, v >= 0 \iff v = 0_V$$

En este caso, si $K = \mathbb{R}$, entonces diremos que $<,>$ es un producto interior Euclidiano y si $K = \mathbb{C}$ entonces que este es un producto interior Hermitiano positivo.

Observación 13.1.2. — Observemos que todo producto interior positivo definido es necesariamente no-degenerado. Pero el siguiente ejemplo muestra que el recíproco no es verdad, es decir, existen productos interiores no-degenerados que no son positivos definido.

Ejemplo 13.1.3. — Consideremos enteros positivos $n, m \in \{1, 2, ...\}$ y el espacio vectorial real $\mathbb{R}^{n+m}$. La función

$$<,>: \mathbb{R}^{n+m} \oplus \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$$

definido por la regla

$$< (x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m}), (y_1, ..., y_n, y_{n+1}, ..., y_{n+m}) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j - \sum_{k=1}^{m} x_{n+k} y_{n+k}$$

resulta ser un producto interior no-degenerado el cual no es positivo definido.

Ejercicio 30. — *Verificar los detalles del ejemplo anterior.*

Definición 13.1.4. — Sea $(V, <,>)$ un espacio vectorial con producto interior positivo definido. Si $v \in V$, entonces la norma de v se define como

$$\|v\| = +\sqrt{< v, v >}$$

La distancia entre dos vectores $v, w \in V$ se define como

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

Ejemplo 13.1.5. — Sea $K \subset \mathbb{C}$ y consideremos sobre el espacio vectorial K^n la función

$$<,>: K^n \oplus K^n \to K$$

definida por

$$< (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$$

Tenemos que $<,>$ resulta ser un producto interior positivo definido. La norma de un vector es dada por

$$\|(x_1, ..., x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

y la distancia es dada por

$$d((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

Ejemplo 13.1.6. — Sea $V = C^{(0)}[a, b]$ el espacio vectorial real de todas las funciones reales continuas sobre el intervalo cerrado $[a, b]$. La función

$$<,>: C^{(0)}[a, b] \oplus C^{(0)}[a, b] \to \mathbb{R}$$

definida por

$$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)\ dx$$

es un producto interior Euclidiano sobre V. De la misma manera, Sea $W = C_{\mathbb{C}}^{(0)}[a, b]$ el espacio vectorial complejo de todas las funciones complejas continuas sobre el intervalo cerrado $[a, b]$. La función

$$<,>: C_{\mathbb{C}}^{(0)}[a, b] \oplus C_{\mathbb{C}}^{(0)}[a, b] \to \mathbb{C}$$

definida por

$$< f, g >= \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\ dx$$

es un producto interior Hermitiano positivo sobre W.

En ambos casos, la norma de una función f es dada por

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\ dx}$$

Ejercicio 31. — *Sea $A \in M(n \times n; \mathbb{C})$ una matriz diagonal,*

$$A = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

Considere $V = K^n$, donde $K \subset \mathbb{C}$ y defina la función

$$<,>_A: V \oplus V \to \mathbb{C}$$

por

$$< (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) >_A = (x_1\ \cdots x_n)\, A \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}$$

¿Qué condiciones debe tener A para que $<,>_A$ sea un producto interior sobre V?

¿Qué condiciones debe tener A para que $<,>_A$ sea un producto interior positivo dfinido sobre V?

13.2. Propiedades de la norma y la distancia

Cada vez que tenemos un espacio vectorial V (sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{C}$) con un producto interior positivo definido $<,>$, tenemos que cada vector $v \in V$ tiene definida una norma $\|v\|$.

Teorema 13.2.1. — *La norma $\|\|$ tiene las siguientes propiedades :*
(i) $\|v\| \geq 0$, para todo $v \in V$;
(ii) $\|v\| = 0 \iff v = 0_V$;
(iii) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$, para todo $v \in V$ y todo $\lambda \in K$.
(iv) (Desigualdad triangular) para todo par $v, w \in V$ vale que

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Las propiedades (i), (ii) y (iii) son claras de la definición de producto interior. Más adelante veremos como verificar la desigualdad triangular. Una consecuencia directa del anterior es la siguiente lista de propiedades de la distancia.

Teorema 13.2.2. — *La distancia $d(,)$ tiene las siguientes propiedades :*
(i) $d(v, w) \geq 0$, para todo $v, w \in V$;
(ii) $d(v, w) = 0 \iff v = w$;
(iii) $d(\lambda v, \lambda w) = |\lambda| d(v, w)$, para todo $v \in V$ y todo $\lambda \in K$.
(iv) (Desigualdad triangular) para todo triple $v, w, u \in V$ vale que

$$d(u, v) \leq d(u, w) + d(v, w)$$

Demostración. — Todo esto sale del hechos que $d(v, w) = \|v - w\|$. Veamos sólo la desigualdad triangular.

$$d(u, v) = \|u-v\| = \|(u-w)+(w-v)\| \leq \|u-w\|+\|w-v\| = d(u, w)+\underbrace{d(w, v)}_{d(v,w)}$$

$\square$

13.3. Como Recuperar $<,>$ a partir de $\|\|$

Supongamos que tenemos que $<,>$ es un producto interior positivo definido con $K \subset \mathbb{R}$. En este caso tenemos la igualdad :

$$\|v+w\|^2 =< v+w, v+w >= \|v\|^2 + 2 < v, w > +\|w\|^2$$

es decir,

$$< v, w >= \frac{1}{2}(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$$

Supongamos que tenemos que $<,>$ es un producto interior positivo positivo y $K \subset \mathbb{C}$ contiene números complejos. En este caso La igualdad

$$\|v+w\|^2 =< v+w, v+w >= \|v\|^2 + 2Re(< v, w >) + \|w\|^2$$

nos dice que

$$Re(< v, w >) = \frac{1}{2}(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$$

El hecho que

$$< v, iw >= -i < v, w >$$

nos asegura que

$$Im(< v, w >) = \frac{1}{2}(v+iw\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$$

De esta manera, podemos siempre recuperar el producto interior positivo definido $<,>$ a partir de su norma $\|\|$.

Observación 13.3.1. — Hemos visto que todo producto interior positivo definido sobre un espacio vectorial V define una norma y que tal producto puede obtenerse de tal norma. Pero hay normas que no provienen de tales productos interiores. Por ejemplo, consideremos en el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ la norma

$$\|(x,y)\| = \text{Máximo}\{|x|, |y|\}$$

Si existiese un producto interior positivo definido $<,>$ que le produce, entonces debe ocurrir que

$$< v, w >= \frac{1}{2}(v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$$

Luego,

$$< (1,0), (1,0) >= 1 =< (0,1), (0,1) >$$
$$< (1,0), (0,1) >= -1/2$$

De esta manera,

$$< (x,y), (u,v) >=< x(1,0)_y(0,1), u(1,0) + v(0,1) >=$$
$$= xu - \frac{1}{2}xv - \frac{1}{2}yu + yv$$

Así,

$$< (x,y),(x,y) >= x^2 + y^2 - xy$$

Pero en tal caso vemos que

$$< (2,3),(2,3) >= 7 \neq 9 = \|(2,3)\|^2$$

13.4. La desigualdad de Schwarz

Consideremos un espacio vectorial V (sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{C}$) con un producto interior positivo definido $<,>$. Sean $v, w \in V$.

(i) Si $\{v, w\}$ es un conjunto linealmente dependiente, entonces uno de esos vectores es un múltiplo del otro, de donde obtenemos que

$$| < v,w > | = \|v\|\|w\|$$

(ii) Si $< v, w >= 0$, entonces tenemos

$$| < v,w > | \leq \|v\|\|w\|$$

(iii) Si $\{v, w\}$ es un conjunto linealmente independiente y $< v, w >\neq 0$, entonces para todo $\lambda \in K$ vale que

$$0 < \|w + \lambda w\|^2 = \|v\|^2 + \overline{\lambda} < v,w > + \lambda\overline{v,w >} + |\lambda|^2\|w\|^2$$

Si tomamos

$$\lambda = \frac{-\|v\|^2}{\overline{< v,w >}}$$

entonces lo anterior asegura

$$| < v,w > | < \|v\|\|w\|$$

Todo lo anterior nos da :

***Teorema 13.4.1* (Desigualdad de Schwarz).** — *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{C}$, con un producto interior positivo definido $<,>$. Si $v, w \in V$, entonces*

$$| < v,w > | \leq \|v\|\|w\|$$

donde la igualdad vale sí y sólo si $\{v, w\}$ e un conjunto linealmente dependiente.

Ahora podemos verificar la desigualdad triangular de $\|\|$ que estábamos debiendo.

Corolario 13.4.2. — *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{C}$, con un producto interior positivo definido $<,>$. Si $v, w \in V$, entonces*

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Demonstración. — Si $v, w \in V$, entonces

$$0 \leq \|v + w\|^2 = \|v\|^2 + 2Re(< v, w >) + \|w\|^2$$

$$\leq \|v\|^2 + 2| < v, w > | + \|w\|^2$$

$$\leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$$

Como $\|v\| + \|w\| \geq 0$, lo anterior asegura que

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

□

Observemos que si v y w son ortogonales, entonces obtenemos del cálculo anterior el siguiente hecho.

Corolario 13.4.3. — *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{C}$, con un producto interior positivo definido $<,>$. Si $v, w \in V$ son vectores ortogonales, entonces*

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$$

13.5. Angulos

13.5.1. Caso real. — Consideremos un espacio vectorial real V con un producto interior Euclidiano $<,>$. La desigualdad de Schwarz nos asegura que para todo par $v, w \in V - \{)_V\}$ debe existir un (y sólo uno) número $\theta_{v,w} \in [0, \pi]$ de manera que

$$< v, w >= \|v\|\|w\| \cos(\theta_{v,w})$$

Definición 13.5.1. — El número $\theta_{v,w}$ es llamado el ángulo de v y w en el producto interior Euclidiano $<,>$.

13.5.2. Caso complejo. — Ahora supongamos que tenemos un espacio vectorial V sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ y con un producto interior Hermitiano positivo $<,>$. La desigualdad de Schwarz nos asegura que para todo par $v, w \in V - \{)_V\}$ tenemos que $< v, w >$ es un número complejo de valor absoluto menor que uno y diferente de cer. Luego, existen únicos números $\theta_{v,w} \in [0, \pi]$ y $\eta_{v,w} \in [0, \pi)$ de manera que

$$< v, w >= \|v\|\|w\|e^{i\eta_{v,w}} \cos(\theta_{v,w})$$

Definición 13.5.2. — El par de números $(\theta_{v,w}, \eta_{v,w})$ es llamado el ángulo complejo de v y w en el producto interior Hermitiano positivo $<,>$.

13.6. Ortogonalidad

Definición 13.6.1. — Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{C}$, con un producto interior $<,>$. Dos vectores $v, w \in V$ se dirán ortogonales si $< v, w >= 0$

Si $W < V$, entonces definimos su ortogonal en V como

$$W^\perp = \{v \in V :< v, w >= 0, \ \forall w \in W\}$$

Ejemplo 13.6.2. — Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{C}$ con un producto interior $<,>$, entonces

$$V^\perp = \{0_V\}$$
$$\{0_V\}^\perp = V$$

Ejemplo 13.6.3. — Consideremos $V = \mathbb{R}^2$ (espacio vectorial real 2-dimensional) y el producto interior

$$\langle (a, b), (c, d) \rangle = ac - bd.$$

En este caso, el anterior define un producto interior no-degenerado. Además,

$$\langle (1, 1) \rangle^\perp = \langle (1, 1) \rangle$$

Ejercicio 32. — *Sea V un espacio vectorial real con producto interior Euclidiano $<,>$. Verificar que dos vectores $v, w \in V - \{0_V\}$ son perpendiculares sí y sólo si $\theta_{v,w} = \pi/2$.*

Ejercicio 33. —

(i) Sea $W < V$ y $<,>$ un producto interior. Verificar que $W^\perp < V$.

(ii) Si además $<,>$ es producto interior positivo definido, entonces $W \cap W^{\perp} = \{0_V\}$.

(iii) Dar un ejemplo de un espacio con producto interior que no es positivo definido para el cual (ii) falla.

Observación 13.6.4. — Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{C}$, con un producto interior positivo definido $<,>$. No es dificil verificar (ver el proceso de Gram-Schmidt más abajo), que si V tiene dimensión finita, entonces para cada subespacio propio U de V vale que $U^{\perp} \neq \{0_V\}$. Pero si la dimensión de V no es finita, esta propiedad puede fallar. Por ejemplo, consideremos $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}[x]$ (el espacio vectorial real de los polinomios en una variable x y coeficientes reales) y el producto interior positivo definido

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\; dx$$

Si tomamos $U = \langle x, x^2, x^3, ... \rangle = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(0) = 0\}$, entonces $U \neq V$ y $U^{\perp} = \{0_V\}$.

Teorema 13.6.5. — *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{C}$, con un producto interior positivo definido $<,>$. Supongamos que para cada subespacio propio U de V vale que $U^{\perp} \neq \{0_V\}$. Entonces, para cada subespacio W de V vale que todo vector $v \in V$ puede escribirse de manera única como*

$$v = w + u, \quad w \in W,\; u \in W^{\perp}$$

Demonstración. — Observemos que si W y $W^{\perp}$ no generan todo V, entonces $H =< W, W^{\perp} >^{\perp} \neq \{0_V\}$. Pero un vector $h \in H$, $h \neq 0_V$ debe entonces ser ortogonal a ambos W y $W^{\perp}$, es decir $h \in W \cap W^{\perp}$, una contradicción al hecho que $W \cap W^{\perp} = \{0_V\}$. Esta observación nos asegura la existencia de vectores $w \in W$ y $u \in W^{\perp}$ de manera que $v = w + u$. Veamos ahora la unicidad. Supongamos que tenemos $w_1 \in W$ y $u_1 \in W^{\perp}$ tales que

$$w + u = w_1 + u_1$$

Esto nos dice que

$$w - w_1 = u_1 - u \in W \cap W^{\perp} = \{0_V\}$$

□

Corolario 13.6.6. — *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{C}$, con un producto interior positivo definido $<,>$. Supongamos que para cada subespacio propio U de V vale que $U^{\perp} \neq \{0_V\}$. Entonces, para cada $W < V$ tenemos un isomorfismo natural*

$$W \oplus W^{\perp} \to V : (w,u) \mapsto w+u$$

es decir, V es la suma directa de W con $W^{\perp}$. Denotaremos esto por

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

Corolario 13.6.7. — *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{C}$ de dimensión finita, con un producto interior positivo definido $<,>$, y sea $W < V$. Entonces*

$$dim_K V = dim_K W + dim_K W^{\perp}$$

13.7. Proyecciones ortogonales

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{C}$, con un producto interior positivo definido $<,>$. Supongamos que para cada subespacio propio U de V vale que $U^{\perp} \neq \{0_V\}$ (por ejemplo, cuando V tiene dimensión finita).

Dado cualquier subespacio $W < V$ tenemos que

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

De esta manera, todo vector $v \in V$ tiene un única descomposición

$$v = w_v + u_v, \quad w_v \in W,\ u_v \in W^{\perp}$$

Definición 13.7.1. — La función

$$\pi_W : V \to W : v \mapsto \pi_W(v) = v_w$$

es llamada la proyección ortogonal en W.

Ejercicio 34. — *Verificar las siguientes propiedades de π_W.*

(i) π_W *es una transformación lineal ;*
(ii) para $w \in W$ *vale que* $\pi_W(w) = w$ *;*
(iii) $\pi_W \circ \pi_W = \pi_W$ *;*
(iv) para todo $v \in V$ *se tiene que* $v - \pi_W(v) \in W^{\perp}$

Teorema 13.7.2. — *El vector $\pi_W(v)$ es el vector en W más próximo a v respecto la distancia inducida por $<,>$.*

Demonstración. — Sea $v \in V$ y $w \in W$. Entonces la distancia entre ellos es dada por $\|v - w\|$. Pero,

$$\|v-w\|^2 =< v-w, v-w >=< (v-\pi_W(v))+(\pi_W(v)-w), (v-\pi_W(v))+(\pi_W(v)-w) >$$

$$= \|v - \pi_W(v)\|^2 + \|\pi_W(v) - w\|^2 \geq \|v - \pi_W(v)\|^2$$

donde la igualdad vale sí y sólo si $\pi_W(v) = w$. $\square$

Teorema 13.7.3. — *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{C}$, con un producto interior positivo definido $<,>$, y sea $W < V$. Entonces, para todo $v \in V$ vale que*

$$\|\pi_W(v)\| \leq \|v\|$$

Demonstración. — Tenemos que $\pi_W(v)$ y $v - \pi_W(v)$ son vectores ortogonales, luego

$$\|\pi_W(v)\|^2 + \|v - \pi_W(v)\|^2 = \|v\|^2$$

$\square$

13.7.1. Caso de dimensión finita. — Supongamos primero el caso donde $dim_K W = m$. Escojamos una base ortonormal de W, digamos

$$\{v_1, ..., v_m\}$$

De esta manera,

$$\pi_W(v) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j$$

Luego, como sabemos que $v - \pi_W(v) \in W^{\perp}$, tenemos que

$$0 =< v - \pi_W(v) \in W^{\perp}, v_j >=< v, v_j > -\lambda_j$$

es decir

$$\lambda_j =< v, v_j >$$

y, en particular,

$$\pi_W(v) = \sum_{j=1}^{m} < v, v_j > v_j$$

13.7.2. Caso de dimensión infinita. — Supongamos ahora el caso donde $dim_K W = \infty$. Escojamos una base ortonormal de W, digamos

$$\{v_j,\}_J$$

De esta manera,

$$\pi_W(v) = \sum_{j\in J_0} \lambda_j v_j$$

donde $J_0 \subset J$ es finito.

Luego, como sabemos que $v - \pi_W(v) \in W^\perp$, tenemos que

$$0 =< v - \pi_W(v) \in W^\perp, v_j >=< v, v_j > -\lambda_j$$

es decir

$$\lambda_j =< v, v_j >$$

y, en particular,

$$\pi_W(v) = \sum_{j\in J_0} < v, v_j > v_j$$

13.8. Existencia de bases ortonormales

Definición 13.8.1. — Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{C}$, con un producto interior positivo definido $<,>$. Una base $\mathcal{B}$ de V es llamada ortogonal si cada par de vectores diferentes de $\mathcal{B}$ son ortogonales. Si además cada vector tiene norma 1, entonces decimos que $\mathcal{B}$ es una base ortonormal.

Observación 13.8.2. — Sea $\mathcal{B} = \{v_j\}_{j\in J}$ una base ortogonal de V, entonces $\{w_j = v_j/\|v_j\|\}_{j\in J}$ define una base ortonormal de V.

Definición 13.8.3. — Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{C}$, con un producto interior positivo definido $<,>$. Un subconjunto $S \subset V$ es llamado ortogonal si todo par de vectores son ortogonales entre si. Si además cada uno uno de ellos tiene norma uno, entonces decimos que es un conjunto ortonormal.

Teorema 13.8.4. — *Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{C}$, con un producto interior positivo definido $<,>$. Supongamos que para cada subespacio propio U de V vale que $U^\perp \neq \{0_V\}$. Entonces V tiene una base ortonormal.*

Demostración. — Sea $\mathcal{A}$ el conjunto formado por todos los subconjuntos ortonormales de V. Consideremos la relación $\leq$ dada por inclusión, es decir, $U, V \in \mathcal{A}$ son tales que $U \leq V$ sí y sólo si $U \subseteq V$.

Consideremos una cadena $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ y formemos el subconjunto de V dado por

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{C}} U$$

Veamos que X es un conjunto ortonormal. En efecto, supongamos que tenemos vectores $v_1, v_2 \in X$. Entonces debe existir un elemento $U \in \mathcal{C}$ tal que $v_1, v_2 \in U$. Como U es ortonormal, tenemos que $\{v_1, v_2\}$ es un conjunto ortonormal.

De esta manera, vemos que $X \in \mathcal{A}$ y que X es una cota superior para la cadena $\mathcal{C}$. Esto nos dice que toda cadena en $(\mathcal{A}, \leq)$ posee cota superior. El lema de Zorn entonces nos asegura la existencia de un elemento maximal $\mathcal{B} \in \mathcal{A}$. Luego, $\mathcal{B} \subset V$ es un conjunto ortonormal.

Veamos ahora $\mathcal{B}$ es una base. Ya que todo conjunto ortonormal es necesariamente un conjunto linealmente independiente, lo único que nos falta verificar es que $\mathcal{B}$ genera V. Si esto no fuese así, entonces existe un vector $v \in < \mathcal{B} >^{\perp}$, $v \neq 0_V$. Pero en este caso, $\mathcal{B}^* = \mathcal{B} \cup \{v\} \in \mathcal{A}$, $\mathcal{B} \leq \mathcal{B}^*$ y $\mathcal{B}^* \neq \mathcal{B}$, una contradicción a la maximilidad de $\mathcal{B}$.

□

13.8.1. Proceso de ortoginalización de Gramm-Schmidt. — En el caso de dimensión finita, la hipótesis del Teorema 13.8.4 es trivial. En este caso podemos ser aún más concretos con respecto a la existencia de bases ortonormales.

Teorema 13.8.5 **(Proceso de Gram-Schmidt)**. — *Si $dim_K V = n$ y $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ es una base de V, entonces existe una base ortonormal $\mathcal{M} = \{w_1, ..., w_n\}$ de manera que el subespacio generado por $\{v_1, ..., v_j\}$ es también generado por $\{w_1, ..., w_j\}$, para todo $j = 1, ..., n$.*

Demostración. — Si definimos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_1 & = & v_1 \\ & & \\ u_j & = & v_j - \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} \frac{< v_j, u_k >}{\|u_k\|^2} u_k, \quad j \geq 2 \end{array} \right.$$

entonces $\mathcal{M} = \{w_1 = u_1/\|u_1\|, ..., w_n = u_n/\|u_n\|\}$ es nuestra base ortogonal buscada. □

La construcción hecha para el caso de dimensión finita funciona funciona perfectamente bien para el caso de dimensión infinita numerable.

***Teorema 13.8.6* (Proceso de Gram-Schmidt).** — *Si V tienen dimensión infinita pero numerable y $\mathcal{B} = \{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una base de V, entonces existe una base ortonormal $\mathcal{M} = \{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ de manera que el subespacio generado por $\{v_1, ..., v_j\}$ es también generado por $\{w_1, ..., w_j\}$, para todo $j = 1, 2, ...$.*

Observación 13.8.7. — Este proceso es muy usado cuando estudiamos series de Fourier.

Ejemplo 13.8.8. — Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $K \subset \mathbb{C}$ de dimensión finita $dim_K V = n$ que admite un producto interior positivo definido $<, >$. El proceso de Gram-Schmidt nos asegura la existencia de una base ortonormal

$$\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$$

Si escribimos

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$$

$$w = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j$$

entonces

$$< v, w >= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overline{\beta_j} = (\alpha_1 \ \cdots \alpha_n) \begin{pmatrix} \overline{\beta_1} \\ \vdots \\ \overline{\beta_n} \end{pmatrix}$$

Luego, si usamos el isomorfismo de vectores coordenadas

$$\phi_{\mathcal{B}} : V \to M(n \times 1; K) : \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

entonces

$$< v, w >=< \phi_{\mathcal{B}}(v), \phi_{\mathcal{B}}(w) >_0,$$

donde

$$< x, y >_0 = {}^t x \ y$$

es el producto interior positivo definido usual en $M(n \times 1; K)$.

Escojamos ahora una base cualquiera de V, digamos

$$\mathcal{B}_1 = \{w_1, ..., w_n\}$$

entonces tenemos que si escribimos

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j$$

$$w = \sum_{j=1}^{n} \beta_j w_j$$

entonces

$$< v, w >= \sum_{j=1}^{n \sum_{i=1}^{n}} \alpha_j \overline{\beta_i} < w_j, w_i >=$$

$$= (\alpha_1 \ \cdots \alpha_n) \underbrace{\begin{pmatrix} < w_1, w_1 > & \cdots & < w_1, w_n > \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ < w_n, w_1 > & \cdots & < w_n, w_n > \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \overline{\beta_1} \\ \vdots \\ \overline{\beta_n} \end{pmatrix}$$

Las propiedades de producto interior positivo definido de $<,>$ permiten asegurar las siguientes propiedades de la matriz $A \in M(n \times n; K)$:

(i) ${}^t A = \overline{A}$;

(ii) A es positiva definida, es decir, para todo $x \in M(n \times 1; K) - \{0\}$ vale que

$${}^t x A \overline{x} > 0$$

Ejercicio 35. — *Verifique que si $A \in M(n \times n; K)$ satisface que*

(i) ${}^t A = \overline{A}$; y

(ii) A es positiva definida,

entonces

$$< x, y >= {}^t x A \overline{y}$$

define un producto interior positivo definido en $M(n \times 1; K)$.

Ya que dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K son isomorfos cuando ellos tienen la misma dimensión, obtenemos el siguiente hecho.

Teorema 13.8.9. — *Si V es un espacio vectorial sobre el cuerpo $K \subset \mathbb{C}$ de dimensión finita, entonces existe un producto interior positivo definido en V.*

Ejercicio 36. — *Verificar que el proceso de Gram-Schmidt puede usarse para ortogonalizar cualquier subconjunto de vectores de V (no necesariamente linealmente independiente).*

13.9. Teorema de representación de Riez

Supongamos que tenemos un espacio vectorial V, sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{C}$, con un producto interior positivo definido $<,>$, con $dim_K V = n$.

Si $K \subset \mathbb{R}$, entonces no es difícil ver que $<,>$ resulta ser una dualidad entre V y si mismo. En particular, el teorema de Riez (ver el capítulo de dualidad) nos dice que si $dim_{\mathbb{R}} V < \infty$, entonces para toda función lineal $L : V \to \mathbb{R}$ existe un y sólo un vector $v_L \in V$ de manera que $L(w) =< w, v_L >$, para todo $w \in V$.

Pero en el caso que el cuerpo K contenga vectores complejos no reales, el prpducto $<,>$ no define una dualidad en V. De todas maneras, es claro que para todo $v \in V$ la función

$$L_v : V \to K : w \mapsto l_v(w) =< w, v >$$

resulta ser una función lineal, es decir, $L_v \in V^*$. Además, si tenemos que $L_{v_1} = L_{v_2}$, entonces

$$< w, v_1 - v_2 >= 0, \forall w \in V$$

de donde obtenemos que $v_1 = v_2$.

Recíprocamente, supongamos que tenemos una función lineal $L \in V^*$. Escojamos una base ortonormal $\{v_1, ..., v_n\}$. Luego,

$$L\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j L(v_j)$$

Sea $\alpha_j = L(v_j)$ y sea $v = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j} v_j$. Entonces

$$< \sum_{j=1}^{n} x_j v_j, v >= \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_j = L\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right)$$

de donde obtenemos que para toda $L \in V^*$ existe $v \in V$ tal que $L = L_v$.

Teorema 13.9.1 **(Teorema de representación de Riez)**. — *Sea V un espacio vectorial, sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{C}$, con un producto interior positivo definido $<,>$ y de dimensión finita. Entonces la función*

$$L : V \to V^* : v \mapsto L_v =< \cdot, v >$$

es una biyección. Si además $K \subset \mathbb{R}$, entonces L es un isomorfismo. En la situación general, tenemos que

$$L(v_1 + v_2) = L_{v_1} + L_{v_2}$$

$$L(\lambda v) = \overline{\lambda} L_v$$

13.10. Problemas

1.- Considere en $\mathbb{R}^4$ la función

$$< (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) >= x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + 4x_4y_4$$

y verifique que esta es un producto interior Euclidiano.

2.- En $\mathbb{R}_2[x]$ considere la función

$$< a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 >= a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

y verifique que esta es un producto interior Euclidiano. Calcule el ángulo entre los vectores $x + x^2$ y $x + 1$.

3.- En $\mathbb{R}_2[x]$ considere la función

$$< p(x), q(x) >= \int_0^1 p(x)q(x)\ dx$$

y verifique que esta es un producto interior Euclidiano. Calcule el ángulo entre los vectores $x + x^2$ y $x + 1$.

4.- Escriba como queda la desigualdad de Schwarz para $C^{(0)}[a, b]$ respecto al producto interior Euclidiano

$$< f(x), g(x) >= \int_a^b f(x)g(x)\ dx$$

5.- Sea V un espacio vectorial con un producto interior positivo definido $<, >$.

(i) Si $L \in GL(V)$, entonces defina

$$< v, w >_L =< L^{-1}(v), L^{-1}(w) >$$

y verifique que $<, >_L$ es un producto interior positivo definido en V.

(ii) Concluir que si existe $m \in \{1, 2, 3, ...\}$ tal que $L^m = I$, entonces existe un producto interior positivo definido $<, >^L$ sobre V de manera que valga la identidad

$$< L(v), L(w) >^L =< v, w >^L$$

(iii) Verifique que si $G < GL(V)$ es un grupo finito, entonces existe un un producto interior positivo definido $<, >^G$ sobre V de manera que valga la identidad

$$< L(v), L(w) >^G =< v, w >^G, \quad \forall L \in G$$

6.- Sea V un espacio vectorial con un producto interior positivo definido $<, >$. Si $\{v_1, ..., v_n\}$ es un conjunto de vectores ortogonales, entonces verificar la igualdad

$$\|\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n\|^2 = |\lambda_1|^2 \|v_1\|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2 \|v_n\|^2$$

7.- Considere el espacio vectorial real $C^{(0)}[0,L]$ con el producto interior Euclidiano

$$< f(x), g(x) >= \int_0^L f(x)g(x)\ dx$$

Considere el conjunto de vectores de V dado por

$$S = \{1\} \cup \left\{ \cos(\frac{2k\pi x}{L}), \sin(\frac{2k\pi x}{L}) : k = 1,2,3,... \right\}$$

(i) Verifique que S es un conjunto linealmente independiente.

(ii) Verifique que S es un conjunto ortogonal, es decir, dos vectores cualesquiera de S que sean diferente son ortogonales.

(iii) Sea W el subespacio de $C^{(0)}[0,L]$ generado por S. Use el proceso de Gram-Schmidt para encontrar una base ortonormal de W.

8.- Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K de dimensión finita. Sea $W < V$ donde $dim_K W = m$ y escribamos $dim_K V = n + m$. Escoja una base ortonormal de W, digamos $\{v_1, ..., v_m\}$ y complete a una base de V, digamos $\mathcal{B}$. Verifique que

$$M(\pi_W, \mathcal{B}, \{v_1, ..., v_m\}) = (I_{m\times m} \quad 0_{m\times n})$$

9.- Considere $\mathbb{R}^3$ con el producto interior Euclidiano

$$< (x,y,z), (u,v,w) >= xu + 2yv + zw$$

y el subespacio W generado por los vectores $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$. Calcule el vector de W más próximo a $(1,2,3)$, es decir, $\pi_W(1,2,3)$.

10.- En $\mathbb{R}_3[x]$ considere el producto interior Euclidiano

$$< p(x), q(x) >= \int_0^1 p(x)q(x)\ dx$$

(i) Calcule una base ortonormal de $\mathbb{R}_3[x]$.

(ii) sea $W =< 1, x^2 >= \{a + bx^2 : a, b \in \mathbb{R}\}$. Calcular el vector de W más próximo a $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$.

11.- En $C^{(0)}[0,L]$ considere el producto interior Euclidiano

$$< f(x), g(x) >= \int_0^L f(x)g(x)\ dx$$

y el conjunto

$$S_n = \{1\} \cup \left\{ \cos(\frac{2k\pi x}{L}), \sin(\frac{2k\pi x}{L}) : k = 1,2,3,...,n \right\}$$

Sea W_n el subespacio generado por S_n. Determine el vector de W_n más próximo a $f \in C^{(0)}[0,L]$.

12.- Sea $x = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n) \in M(n \times 1; \mathbb{R})$, $x \neq 0_{M(n\times 1;\mathbb{R})}$, y considere la matriz

$$H_x = I - 2\frac{x\ {}^t x}{{}^t x x} \in M(n \times n; \mathbb{R})$$

La matriz H_x es llamada una matriz de Householder . Verificar las siguientes propiedades :

(i) ${}^t H_x = H_x = H_x^{-1}$;

(ii) concluir que las columnas de H_x forman una base ortonormal para $M(n \times 1; \mathbb{R})$;

(iii) (Interpretación geométrica) Identifiquemos $M(n \times 1; \mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^n$ por

$$(y_1\ \cdots\ y_n) \to (y_1, ..., y_n)$$

El producto interior Euclidiano que usamos en $\mathbb{R}^n$ es el usual

$$< (y_1, ..., y_n), (z_1, ..., z_n) >= \sum_{j=1}^{n} y_j z_j$$

Sea $W =< x >^{\perp} < \mathbb{R}^n$ y considre la función

$$L_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

que refleja cada $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ respecto al plano $W \subset \mathbb{R}^n$, es decir, tomamos la única línea Euclidiana l_y que pasa por y y $\pi_W(y)$ y definimos por $L_x(y)$ como aquel punto de tal recta que se se encuentra a la misma distancia de $\pi_W(y)$ que es diferente de y en el caso $y \notin W$. En otras palabras, L_x no es nada más que la reflexión en W. Para cada $y \in \mathbb{R}^n$ tenemos que

$$x = \pi_{W^{\perp}}(y) + \pi_W(y)$$

Ver que

$$\pi_{W^{\perp}}(y) = \frac{< y, x >}{\|x\|^2} x$$

$$L_x(y) = -\pi_{W^{\perp}}(y) + \pi_W(y) = y - 2\frac{< y, x >}{\|x\|^2} x = y - 2\frac{x\ {}^t x}{\|x\|^2} y = T_{H_x}(y)$$

donde T_A es la transformación lineal inducida por multiplicación por la matriz A.

(iv) Consideremos la reflexión L_x, la cual tiene por el item anterior matriz asociada H_x (en la base canónica $\{e_1, ..., e_n\}$). Si $y = x \pm \|x\|^2 e_1$, entonces $\{L(y), e_1\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

(v) Sea $n = 3$ y $z = (1, 2, 3)$. Determine $x \neq (0, 0, 0)$ de manera que $\{L_x(z), e_3\}$ sea linealmente dependiente.

13.- En muchos modelos matemáticos (lineales) es necesario determinar parámetros específicos del modelo para aproximar la conducta real del fenómeno moelado (recordar el problema de ajuste lineal). En otras palabras, tenemos dada una matriz $A \in (n \times m; \mathbb{R})$ y una matriz columna $b \in M(n \times 1; \mathbb{R})$ y ahora queremos determinar una matriz columna $x \in M(m \times 1; \mathbb{R})$ de manera que Ax sea lo más próximo posible a b. Consideremos la transformación lineal

$$T_A : M(m \times 1; \mathbb{R}) \to M(n \times 1; \mathbb{R}) : x \mapsto Ax$$

Si $b \in IM(T_A)$, entonces sabemos que existe x tal que $Ax = b$. Podemos usar el método de Gauss para encontrar x (en general no es único).

Si $b \notin IM(T_A)$, entonces lo que buscamos es un vector de $Im(T_A)$ lo más próximo a b, es decir, el vector $\pi_{Im(T_A)}(b)$, donde estamos usando el producto interior Euclidiano canónico en $M(n \times 1; \mathbb{R})$ dado por

$$< z, w >= {}^t z w = \sum_{j=1}^{n} z_j w_j$$

luego,

$$\pi_{Im(T_A)}(b) = \sum_{j=1}^{n} < b, e_j > e_j$$

donde $\{e_1, ..., e_n\}$ es la base canónica que resulta ser ortonormal para este producto Euclidiano. Ahora, uno utiliza el método de Gauss para encontrar x tal que $T_A(x) = \pi_{Im(T_A)}(b)$.

Determinar un algoritmo computacional que permita resolver el problema anterior.

14.- Consideremos $M(n \times 1; \mathbb{R})$ con el producto interior Euclidiano canónico en $M(n \times 1; \mathbb{R})$ dado por

$$< z, w >= {}^t z w = \sum_{j=1}^{n} z_j w_j$$

Sea $\{v_1, ..., v_q\}$ un conjunto linealmente independiente de $M(n \times 1; \mathbb{R})$ y sea $\{w_1, ..., w_q\}$ el conjunto ortonormal que se obtiene al usar el proceso de Gram-Schmidt. Verificar la igualdad

$$(v_1 \ \cdots \ v_q)_{n \times q} = (w_1 \ \cdots \ w_q)_{n \times q} \begin{pmatrix} 1 & s_{12} & s_{13} & \cdots & s_{1(q-1)} & s_{1q} \\ 0 & 1 & s_{23} & \cdots & s_{2(q-1)} & s_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{q \times q}$$

donde

$$s_{ij} = \frac{< w_i, v_j >}{\|w_i\|^2}$$

Concluir que toda matriz $A \in M(n \times q; \mathbb{R})$ puede escribirse de la forma

$$A = UT$$

donde $U \in M(n \times q; \mathbb{R})$ es una matriz cuyas columnas son mutualmente ortogonales y $T \in M(q \times q; \mathbb{R})$ es una matriz triangular superior.

15.- Sea $K \subset \mathbb{C}$ un cuerpo y V un espacio vectorial sobre K con $dim_K V < \infty$. Verificar que se puede construir un producto interior positivo definido en V.

16.- Sea $<,>$ un producto interior interior positivo definido sobre V y sea $L : V \to V$ una transformación lineal tal que $L^k = I$ para cierto $k \in \{1, 2, 3, ...\}$. Verificar que es posible construir un producto interior positivo definido en V, digamos $<,>_L$ de manera que para todo $v, w \in V$ vale la igualdad

$$< L(v), L(w) >_L = < v, w >_L$$

17.- Sea $<,>$ un producto interior positivo definido en V y sea $W < V$. Supongam que $L : V \to V$ es una transformación lineal tal que para todo $v, w \in V$ vale la igualdad $< L(v), L(w) > = < v, w >$. Verificar que si W es un subespacio invariante por L, entonces $W^\perp$ también resulta ser un subespacio invariante por L.

CAPÍTULO 14

PRODUCTOS INTERIORES Y FUNCIONES DETERMINANTES

En este capítulo nuestros espacios vectoriales serán definidos sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{R}$ y dimensión finita ya que en tal caso los productos interiores positivo definidos definen una autodualidad.

14.1. Funciones determinantes y productos interiores

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{R}$, de dimensión finita $dim_K V = n$, y sea $<,>$ un producto interior positivo definido sobre V. Entonces, si escojemos una base de V, digamos $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$, entonces tenemos las siguientes propiedades :

(i) Podemos construir una base dual $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, ..., v_n^*\}$ de V, es decir,

$$< v_j, v_k^* >= \begin{cases} 1 & j = k; \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

(ii) Si consideramos la función n-lineal

$$\Phi : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n \ veces} \to K : (w_1, ..., w_n) \mapsto v_1^*(w_1) \cdots v_n^*(w_n)$$

entonces la función

$$\Delta_{\mathcal{B}} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} sign(\sigma) \Phi_\sigma,$$

donde $\Phi_\sigma(w_1, ..., w_n) = \Phi(w_{\sigma(1)}, ..., w_{\sigma(n)})$, es una función determinante la cual satisface que

$$\Delta_{\mathcal{B}}(v_1, ..., v_n) = 1$$

(iii) Si Δ es una función determinante en V, entonces sabemos que existe $\lambda \in K$ tal que $\Delta = \lambda \Delta_{\mathcal{B}}$. Más aún, sabemos que si $\Delta \neq 0$, entonces existe una base $\mathcal{S}$ de V de manera que $\Delta = \Delta_{\mathcal{S}}$.

Para cada $u_1, ..., u_n \in V$, podemos construir una función determinante por

$$\Delta_{u_1,...,u_n}(w_1, ..., w_n) = det \begin{pmatrix} < w_1, u_1 > & \cdots & < w_1, u_n > \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ < w_n, u_1 > & \cdots & < w_n, u_n > \end{pmatrix}$$

luego, debe existir $\lambda(u_1, ..., u_n) \in K$ de manera que

$$\Delta_{u_1,...,u_n}(w_1, ..., w_n) = \lambda(u_1, ..., u_n)\Delta_{\mathcal{B}}(w_1, ..., w_n)$$

En particular, tenemos que

$$\lambda(u_1, ..., u_n) = \Delta_{u_1,...,u_n}(v_1, ..., v_n) = det \begin{pmatrix} < v_1, u_1 > & \cdots & < v_1, u_n > \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ < v_n, u_1 > & \cdots & < v_n, u_n > \end{pmatrix}$$

y como consecuencia, vemos que

$$\lambda : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n\ veces} \to K : (u_1, ..., u_n) \mapsto \lambda(u_1, ..., u_n)$$

es también una función determinante y, debe existir $\alpha \in K$ tal que

$$\lambda(u_1, ..., u_n) = \alpha\Delta_{\mathcal{B}}(u_1, ..., u_n)$$

Comno consecuencia de lo anterior, obtenemos la igualdad

$$det \begin{pmatrix} < w_1, u_1 > & \cdots & < w_1, u_n > \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ < w_n, u_1 > & \cdots & < w_n, u_n > \end{pmatrix} = \alpha\Delta_{\mathcal{B}}(w_1, ..., w_n)\Delta_{\mathcal{B}}(u_1, ..., u_n)$$

Por otro lado

$$\alpha\Delta_{\mathcal{B}}(v_1, ..., v_n)\Delta_{\mathcal{B}}(v_1^*, ..., v_n^*) = det \begin{pmatrix} < v_1, v_1^* > & \cdots & < v_1, v_n^* > \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ < v_n, v_1^* > & \cdots & < v_n, v_n^* > \end{pmatrix} = det(I_{n\times n}) = 1$$

Si la base $\mathcal{B}$ es ortonormal, entonces tenemos que $v_j^* = v_J$, en cuyo caso, de lo anterior, obtenemos que $\alpha = 1$.

Definición 14.1.1. — Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{R}$, de dimensión finita $dim_K V = n$, y sea $<, >$ un producto interior positivo definido sobre V. La matriz de Gram de una colección $\{w_1, ..., w_n\}$ de vectores de V es

$$\begin{pmatrix} < w_1, w_1 > & \cdots & < w_1, w_n > \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ < w_n, w_1 > & \cdots & < w_n, w_n > \end{pmatrix}$$

Ejercicio 37. — *Las filas de la matriz de Gram*

$$\begin{pmatrix} < w_1, w_1 > & \cdots & < w_1, w_n > \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ < w_n, w_1 > & \cdots & < w_n, w_n > \end{pmatrix}$$

son linealmente dependiente sí y sólo si el conjunto $\{w_1, ..., w_n\}$ *es linelamente dependiente.*

Todo lo anterior se resume en el siguiente teorema.

Teorema 14.1.2. — *Sea* V *un espacio vectorial sobre un cuerpo* $K \subset \mathbb{R}$*, de dimensión finita* $dim_K V = n$*, y sea* $<,>$ *un producto interior positivo definido sobre* V*.*

(i) Si $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ *es una base ortonormal, entonces*

$$det \begin{pmatrix} < w_1, u_1 > & \cdots & < w_1, u_n > \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ < w_n, u_1 > & \cdots & < w_n, u_n > \end{pmatrix} = \Delta_{\mathcal{B}}(w_1, ..., w_n)\Delta_{\mathcal{B}}(u_1, ..., u_n)$$

(ii) El determinante de Gram de los vectores $w_1, ..., w_n \in V$ *satisface*

$$G(w_1, ..., w_n) = Delta_{\mathcal{B}}(w_1, ..., w_n)^2 \geq 0$$

(iii) Si $\{w_1, ..., w_n\}$ *es un conjunto linealmente dependiente de* V*, entonces* $G(w_1, ..., w_n) = 0$*.*

(iv) Si $\{w_1, ..., w_n\}$ *es una base de* V*, entonces* $G(w_1, ..., w_n) > 0$*.*

***Ejemplo 14.1.3* (Volúmenes de paralilepípedos)**. — Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, de dimensión finita $dim_{\mathbb{R}} V = n$, y sea $<,>$ un producto interior Euclidiano sobre V. Sea $\{w_1, ..., w_n\}$ una base de V. Entonces, el paralilepípedo generado por tal base es

$$P(w_1, ..., w_n) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j : \alpha_j \in [0, 1] \right\}$$

El volúmen de $P(w_1, ..., w_n)$ se define como

$$Vol(P(w_1, ..., w_n)) = \sqrt{G(w_1, ..., w_n)}$$

14.2. Problemas

1.- Considere $\mathbb{R}^2$ con el producto interior Euclidiano natural

$$< (a,b),(c,d) >= ac + bd$$

Sea $\{w_1, w_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y sean

$$a = \|w_1\|^2,\ b = \|w_2\|^2,\ c = \|w_2 - w_1\|,\ s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Verificar que

$$Vol(P(w_1, w_2)) = 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

2.- Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{R}$, de dimensión finita $dim_{\mathbb{R}} V = n$, y sea $<,>$ un producto interior Euclidiano sobre V. Verificar la desigualdad :

$$G(w_1, ..., w_n) \leq \|w_1\|^2 \|w_2\|^2 \cdots \|w_n\|^2$$

Ind : Tome una base ortonormal $\{v_1, .., v_n\}$ de V con $\|v_j\| = \|w_j\|$.

3.- (Desigualdad de Hadamard) Sean $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Verificar la desigualdad :

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{1j}|^2 \sum_{j=1}^{n} |a_{2j}|^2 \cdots \sum_{j=1}^{n} \|a_{nj}\|^2$$

Ind : Usar 2.- con $V = \mathbb{R}^n$ y el producto interior Euclidiano natural

$$< (a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n) >= \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$$

CAPÍTULO 15

NORMAS DE TRANSFORMACIONES LINEALES

Sean V y W espacios vectoriales sobre le mismo cuerpo $K \subset \mathbb{C}$ y supongamos que tenemos productos interiores positivos definidos $<,>_V$ para V y $<,>_W$ para W.En modelación, es importante entender el tamaño de las magnitudes de salida de un proceso lineal

$$L : V \to W$$

en términos de las magnitudes de las entradas. Para esto, uno compara estos dos tipos de tamaños.

Definición 15.0.1. — Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $K \subset$. Una norma en V es una función

$$\| \ \| : V \to [0, +\infty) : v \mapsto \|v\|$$

que satisface las siguiente propiedades :

(i) $\|v\| \geq 0$, para todo $v \in V$;
(ii) $\|v\| = 0 \iff v = 0_V$;
(iii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$, para todo $v \in V$ y todo $\lambda \in K$.
(iv) (Desigualdad triangular) para todo par $v, w \in V$ vale que

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Ejemplo 15.0.2. — Cada producto interior positivo define una norma, pero existen normas que no provienen de productos interiores.

Definición 15.0.3. — Sean V y W espacios vectoriales sobre le mismo cuerpo $K \subset \mathbb{C}$ y supongamos que tenemos normas $\| \ \|_V$ para V y $\| \ \|_W$ para W. Si

$L : V \to W$ es una transformación lineal, entonces su norma, respecto a las normas anteriores en V y W, es definida como :

$$\begin{aligned} \|L\|_{\mathcal{L}(V,W)} &= sup\left\{\frac{\|L(v)\|_W}{\|v\|_V} : v \in V - \{0_V\}\right\} \\ &= sup\left\{\|L(v)\|_W : v \in V, \|v\|_V = 1\right\} \end{aligned}$$

Teorema 15.0.4. — *Sean V, W y Z espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $K \subset \mathbb{C}$, cada uno de ellos con una norma. Sean*

$$L_1, L_2 : V \to W$$

$$L_3 : W \to Z$$

transformaciones lineales de manera que $\|L_1\|_{\mathcal{L}(V,W)}$, $\|L_2\|_{\mathcal{L}(V,W)}$ y $\|L_3\|_{\mathcal{L}(W,Z)}$ son finitos. Entonces :

(i) $\|L_1\|_{\mathcal{L}(V,W)} \geq 0$ *;*
(ii) $\|L_1\|_{\mathcal{L}(V,W)} = 0 \iff L_1 = 0_{\mathcal{L}(V,W)}$ *;*
(iii) si $\lambda \in K$, entonces $\|\lambda L_1\|_{\mathcal{L}(V,W)}\| = |\lambda|\|L_1\|_{\mathcal{L}(V,W)}$ *;*
(iv) $\|L_1 + L_2\|_{\mathcal{L}(V,W)} = \|L_1\|_{\mathcal{L}(V,W)} + \|L_2\|_{\mathcal{L}(V,W)}$ *;*
(v) si $v \in V$, entonces $\|L_1(v)\|_W \leq \|L_1\|_{\mathcal{L}(V,W)}\|v\|_V$ *;*
(vi) $\|I_V\|_{\mathcal{L}(V,V)} = 1$ *;*
(vii) $\|l_3 \circ L_2\|_{\mathcal{L}(V,Z)} \leq \|L_3\|_{\mathcal{L}(W,Z)}\|L_2\|_{\mathcal{L}(V,W)}$ *;*
(viii) si $V = W$, entonces (de (vii)) tenemos que para todo $k = 1, 2, 3, ...$, vale que

$$\|L_1^k\|_{\mathcal{L}(V,V)} \leq \|L_1\|_{\mathcal{L}(V,V)}^k$$

Ejercicio 38. — *Verificar las propiedades anteriores.*

Ejercicio 39. — *Sean V y W espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $K \subset \mathbb{C}$, cada uno de ellos con una norma. Sea $\mathcal{L}(V,W)^{finito}$ el subconjunto de $\mathcal{L}(V,W)$ formado de aquellas transformaciones lineales de norma finita. Verificar que $\mathcal{L}(V,W)^{finito} < \mathcal{L}(V,W)$.*

Teorema 15.0.5. — *Sean V y W espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $K \subset \mathbb{C}$, cada uno de ellos con un producto interior positivo definido y V de dimensión finita. Entonces, para toda $L \in \mathcal{L}(V,W)$ se tiene que $\|L\|_{\mathcal{L}(V,W)} < \infty$. En particular, $\| \ \|_{\mathcal{L}(V,W)}$ define una norma sobre el espacio vectorial $\mathcal{L}(V,W)$.*

Demonstración. — Sea $\{v_1, ..., v_n\}$ una base ortonormal de V. Si $v \in V$ es tal que $\|v\|_V = 1$, entonces, escribiendo $v = \sum_{j=1}^n x_j v_j$, tenemos que

$$1 = \|v\|^2 =< v, v >_V= \sum_{j=1}^n x_j^2$$

En particular, tenemos que $x_j \in [-1, 1]$. Ahora,

$$\|L(v)\|_W = \| \sum_{j=1}^n x_j L(v_j)\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|L(v_j)\|_W \leq \sum_{j=1}^n \|L(v_j)\|_W < \infty$$

□

Ejemplo 15.0.6. — Consideremos los espacios vectoriales $V = \mathbb{R}^n$ y $W = \mathbb{R}^m$, ambos con el producto interior Euclidiano canónica, es decir

$$< x, y >_V= \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

$$< x, y >_W= \sum_{j=1}^m x_j y_j$$

Sabemos que para toda transformación lineal

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : (x_1, ..., x_n) \mapsto (y_1, ..., y_m)$$

existe una matriz $A \in M(n \times m; \mathbb{R})$ de manera que

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Podemos definir la norma de A como la norma de L, es decir,

$$\|A\|_2 = \|L\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)} = \text{Máximo} \{\|L(x)\|_{\mathbb{R}^m} : \|x\|_{\mathbb{R}^n} = 1\}$$

Una fórmula para $\|A\|_2$ en términos de A involucrará ciertos números asociados a A, llamados valores propios, los cuales veremos en el próximo capítulo.

Observación 15.0.7. — En $\mathbb{R}^n$ uno puede utilizar las siguientes normas (que no provienen de un producto interior) para la definición de la norma de una transformación lineal $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\|(x_1, ..., x_n)\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

$$\|(x_1, ..., x_n)\|_\infty = \text{Máximo}\{|x_1|, ..., |x_n|\}$$

En cada caso, cada una de ellas nos dará una norma para una matriz :

$$\|A\|_\infty = \text{Máximo} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| : \ 1 \leq i \leq m \right\}$$

$$\|A\|_1 = \text{Máximo} \left\{ \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| : \ 1 \leq j \leq n \right\}$$

Ejemplo 15.0.8. — Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\|A\|_\infty = 7, \quad \|A\|_1 = 6$$

¿Cuánto vale $\|A\|_2$?

CAPÍTULO 16

VALORES Y VECTORES PROPIOS

16.1. Introducción

Supongamos que tenemos una transformación lineal $L : V \to V$, donde $dim_K V = n$, y tenemos el problema dinámico $Av^{(j)} = v^{(j+1)}$, donde $v^{(j)} \in V$. Si escogemos una base $\mathcal{B}$ para V, entonces este problema se transforma en un problema matricial $Ax^{(j)} = x^{(j+1)}$, donde $A = M(L, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ y $x^{(j)} \in M(n \times 1; K)$. Si podemos escoger la base $\mathcal{B}$ de manera que A tenga muchos ceros, entonces tendremos menos problemas computacionales. En este capítulo comenzamos con el estudio de busqueda de bases apropiadas de V que nos den matrices simples.

Supongamos que podemos encontrar $W < V$, $W \neq V$, que sea un subespacio invariante por L. Si escogemos una base de W y la completamos a una base de V, entonces la representación matricial de L en tal base tendrá la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

donde A_1 es una matriz cuadrada de tamaño igual a $dim_K W$, A_3 es una matriz cuadrada de tamaño igual a $dim_K V - dim_K W$ y A_2 es una matriz de tamaño $dim_K W \times (dim_K V - dim_K W)$. Luego, nuestra estrategia será encontrar subespacios invariantes por L.

Ejercicio 40. — *Sea $L : V \to V$ un isomorfismo y $W < V$ un subespacio invariante por L. Si $dim_K V < \infty$, verificar que $L : W \to W$ es también un isomorfismo. ¿Qué pasa si $dim_K V = \infty$?*

16.2. Valores y vectores propios

Definición 16.2.1. — Sea $L : V \to V$ una transformación lineal, donde V es un espacio vectorial sobnre algún cuerpo K. Un vector propio de L es un vector $v \in V - \{0_V\}$ para el cual existe un escalar $\lambda \in K$, llamado un valor propio de L, satisfaciendo la igualdad $L(v) = \lambda v$. Denotaremos por $Spec_K(L) \subset K$ al conjunto de los valores propios de L en K y por V_λ al subespacio de V generado por los vectores propios de L respecto al valor propio $\lambda \in K$.

Es importante tener en cuenta el cuerpo sobre el cual estamos trabajando cunado queremos ver los valores propios. El siguiente ejemplo muestra el por que.

Ejemplo 16.2.2. — Consideremos el cuerpo $\mathbb{C}$ y la función $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto e^{2\pi i/3} z$.

Si consideramos $\mathbb{C}$ como un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, entonces tenemos que L es una transformación lineal (de hecho un isomorfismo). En este caso tenemos que

$$Spec(L) = \{e^{2\pi i/3}\}$$

También podemos ver $\mathbb{C}$ como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, en cuyo caso tenemos que L es un isomorfismo lineal, pero

$$Spec_{\mathbb{R}}(L) = \emptyset$$

Teorema 16.2.3. — *Sean $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in K$ valores propios diferentes para la transformación lineal $L : V \to V$. Si $S_j \subset V_{\lambda_j}$ es un conjunto linealmente independiente, entonces $S_1 \cup S_2$ es también un conjunto linealmete independiente.*

Demonstración. — Sean $v_1, ..., v_n \in S_1$, $w_1, ..., w_m \in S_2$ y consideremos escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_m \in K$ de manera que

$$(1)\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j + \sum_{r=1}^{m} \beta_r w_r = 0_V$$

Si evaluamos (1) por L obtenemos

$$(2)\ \lambda_1 \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j + \lambda_2 \sum_{r=1}^{m} \beta_r w_r = 0_V$$

Al multiplicar (1) por λ_2 y restarselo a (2) nos da

$$(3)\ (\lambda_1 - \lambda_2) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0_V$$

Como S_1 es un conjunto linealmente independiente, debemos tener que

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_j = 0$$

pero como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, esto obliga a tener $\alpha_j = 0$, para todo $j = 1, .., n$.

Ahora, ecuación (1) y la condición que S_2 es un conjunto linealmente independiente, nos da que $\beta_j = 0$ para todo $j = 1, ..., m$.

□

Corolario 16.2.4. — *Sea $L : V \to V$ una transformación lineal y sea, para cada $\lambda \in Spec_K(L)$, $\mathcal{B}_\lambda$ una base de V_λ. Entonces,*

$$\bigcup_{\lambda \in Spec_K(L)} \mathcal{B}_\lambda$$

es un conjunto linealmente independiente de V.

Es claro de la definición que si $v \in V - \{0_V\}$ es un vector propio de L, con valor propio $\lambda \in K$, entonces $W =< v >$ es un subespacio invariante por L. Al completar $\{v\}$ a una base de V tendremos que su representación matricial será de la forma siguiente :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

donde A_3 es una matriz cuadrada de tamaño igual a $(dim_K V - 1)$ y A_2 es una matriz de tamaño $1 \times (dim_K V - 1)$.

Nuestro siguiente problema será el poder determinar los vectores y valores propios de L. Partamos observando que si $v \in V - \{0_V\}$ es un vector propio de L, con valor propio $\lambda \in K$, entonces $v \in Ker(L - \lambda I)$. Recíprocamente, todo vector no cero de $Ker(L-\lambda I)$ es un vector propio de L con valor propio λ. Así, para determinar los valores propios de L debemos buscar todos los escalares $\lambda \in K$ de manera que la transformación lineal $L - \lambda I : V \to V$ no es inyectiva.

16.3. Caso de dimensión finita

Ahora, en el caso que $dim_K V = n$, tenemos que a transformación lineal $L - \lambda I : V \to V$ no es inyectiva sí y sólo si no es un isomorfismo, lo cual es equivalente a tener que el determinante de ella es cero, es decir, tenenos la siguiente descripción.

Teorema 16.3.1. — *Sea $L : V \to V$ una transformación lineal donde V es un espacio vectorial de dimesión finita sobre un cuerpo K. Los valores propios de L en K son exáctamente aquellos $\lambda in K$ que satisfacen que $det(L - \lambda I) = 0$. Los vectores propios de L, respecto al valor propio $\lambda \in K$, son aquellos vectores no cero de $Ker(L - \lambda I)$.*

Por la definición de una matriz, lo anterior puede escribirse de la siguiente manera.

Teorema 16.3.2. — *Sea $L : V \to V$ una transformación lineal donde V es un espacio vectorial de dimesión finita, digamos $dim_K V = n$, sobre un cuerpo K. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V y sea $A = M(L, \mathcal{B}, \mathcal{B})$. Si escogemos el isomorfismo natural*

$$\phi : V \to M(n \times 1; K) : \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

entonces $\lambda \in$ es valor propio de L sí y sólo si existe $x \in M(n \times 1; K)$, $x \neq 0$, tal que $Ax = \lambda x$, lo cual es equivalente a tener que $det(A - \lambda I) = 0$, es decir, tenemos la igualdad

$$Spec_K(L) = Spec_K(A)$$

Los vectores propios de L, respecto al valor propio $\lambda \in K$, son de la forma $\sum_{j=1}^{n} x_j v_j$ donde

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M(n \times 1; K)$$

satisface $Ax = \lambda x$.

Definición 16.3.3. — Sea $L : V \to V$ una transformación lineal donde V es un espacio vectorial de dimesión finita, digamos $dim_K V = n$, sobre un cuerpo K. El polinomio

$$\chi_L(\lambda) = det(L - \lambda I), \ \lambda \in K$$

es llamado el polinomio característico de L. De manera similar, si $A \in M(n \times n; K)$, entonces el polinomio

$$\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda I), \ \lambda \in K$$

es llamado el polinomio característico de A.

Usando la fórmula explícita que tiene un determinante (ver el capítulo de determinantes) se puede observar el siguiente hecho.

Teorema 16.3.4. — *Sea $L : V \to V$ una transformación lineal donde V es un espacio vectorial de dimesión finita, digamos $dim_K V = n$, sobre un cuerpo*

K. Entonces el polinomio característico χ_L es un polinomio de grado n. Similarmente, si $A \in M(n \times n; K)$, entonces el polinomio característico χ_A es un polinomio de grado n.

Ejercicio 41. — *Sea $L : V \to V$ una transformación lineal donde V es un espacio vectorial de dimesión finita, digamos $dim_K V = n$, sobre un cuerpo K. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V y sea $A = M(L, \mathcal{B}, \mathcal{B})$. Verificar que*

$$\chi_L(\lambda) = \chi_A(\lambda)$$

Observación 16.3.5. — Recordemos que una de las propiedades del determinante es que

$$det(AB) = det(A)\ det(B),$$

de donde vemos que para toda matriz invertible C vale que

$$det(CAC^{-1}) = det(A)$$

De esta manera, un cambio de base de V cambia la matriz que representa L, pero el polinomio característico no cambia.

Lo anterior nos dice que para calcular los valores propios de L ó una matriz cuadrada A, debemos calcular los ceros de un polinomio en una variable.

Ejemplo 16.3.6. — Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3; \mathbb{R})$$

Podemos mirar A como la transformación lineal

$$L : M(3 \times 1; \mathbb{R}) \to M(3 \times 1; \mathbb{R}) : x \mapsto Ax$$

donde A es su representación matricial en la base canónica de $M(3 \times 1; \mathbb{R})$

$$\mathcal{B}_{can} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es decir,

$$A = M(L, \mathcal{B}_{can}, \mathcal{B}_{can})$$

En este caso

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 0.5)(\lambda - 0.6)(\lambda - 1)$$

Luego, A tiene 3 valores propios diferentes, es decir,

$$Spec_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0.6, \lambda_3 = 1\}$$

Si escogemos

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ z = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix},$$

entonces vemos que x es vector propio para el valor propio λ_1, y es vector propio para el valor propio λ_2 y z es vector propio para el valor propio λ_3.

Observemos que $\mathcal{B} = \{x, y, z\}$ es una base de $M(3 \times 1; \mathbb{R})$ y que

$$B = M(L; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En otras palabras, si $C = M(I, \mathcal{B}, \mathcal{B}_{can})$, entonces

$$B = C^{-1}AC$$

Ejercicio 42. — *En el ejemplo anterior calcule C y determine el valor de*

$$\lim_{k \to \infty} A^k$$

y resuelva el problema 3.1.

***Ejercicio 43* (Un modelo predador-presa)**. — *Sean dos poblaciones, una de ellas es predadora y la otra es la presa. Denotemos el tamño de la población predadora en el tiempo $k \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$ por x_k y por y_k el tamaño al mismo tiempo de la población presa.*

Supongamos que las presas, sin la presencia de de depredadores, tienen una tasa de natalidad que excede a la tasa de mortandad, digamos $y_{k+1} = 1.5y_k$. En forma análoga, supongamos que los depredadores, sin la presencia de presas, tienden a morir, digamso $x_{k+1} = 0.5x_k$.

Supongamos también que en la presencia de presas los depredadores incrementan su población de manera proporcional al número de presas devoradas, digamos $x_{k+1} = 0.5x_k + 0.3y_k$. En este caso, la población de presas disminuye, es decir, $y_{k+1} = 1.5y_k + cx_k$, donde $c \in \mathbb{R}$ es alguna constante a determinar.

El modelo es entonces dado por

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ c & 1.5 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix}$$

Determinar los valores y vectores propios de A.

Ejercicio 44. — *Algunos modelos básicos de resortes ó circuitos dan ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, por ejemplo,*

$$x'' + ax' + bx = c$$

Este es un tipo especial de un sistema lineal

$$y' = Ay,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$$

Los valores propios y vectores propios de A permiten determinar las soluciones del sistema diferencial anterior. Describa estas.

16.4. Involuciones

En esta sección mostraremos como construir representaciones matriciales simples para el caso de isomorfismos de orden dos.

Definición 16.4.1. — Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K, no necesariamente de dimensión finita. Una involución es una transformación lineal $L : V \to V$ tal que $L^2 = I$.

Consideremos una involución $L : V \to V$. La condición $L^2 = I$ nos dice que $L = L^{-1}$, es decir, L es un isomorfismo, y en particular, $0 \notin Spec_K(L)$.

Si $\lambda \in Spec_K(L)$, y $v \in V - \{0_V\}$ es vector propio asociado a λ, entonces tenemos que

$$v = L^2(v) = L(L(v)) = A(\lambda v) = \lambda L(v) = \lambda^2 v$$

de donde vemos que

$$Spec_K(L) \subset \{1, -1\}$$

(i) Si para todo $v \in V$ vale que $L(v) = v$, entonces $L = I$ y $Spec_K(L) = \{1\}$.

(ii) Supongamos que $\forall v \in V - \{0_V\}$ tal que $L(v) \neq v$, en particular, $1 \notin Spec_K(L)$. Si $v \in V - \{0_V\}$, entonces $w = v - L(v) \neq 0_V$ y vemos que $L(w) = -w$, es decir, $-1 \in Spec_K(L)$ y luego tenemos que $Spec_K(L) = \{-1\}$. Ahora, si $v \in V - \{0_V\}$, tenemos que

$$L(v + L(v)) = L(v) + L^2(v) = L(v) + v = v + L(v)$$

Como $1 \notin Spec_K(L)$, debemos entonces tener que para todo $v \in V$ vale que $v + L(v) = 0_V$, es decir, $L = -I$.

(iii) Supongamos ahora que existen vectores $v, w \in V - \{0_V\}$ tales que $L(v) = v$ y $L(w) = -w$, luego,

$$Spec_K(L) = \{1, -1\}$$

En este caso tenemos los subespacios de V siguientes :

$$V_1 = \{v \in V : L(v) = v\}$$

$$V_{-1} = \{v \in V : L(v) = -v\}$$

que corresponden a los vectores propios de 1 y -1, respectivamente. Es claro que tenemos que $V_1 \cap V_{-1} = \{0_V\}$. Además, tenemos que para todo $v \in V$ existen únicos vectores $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_{-1}$ tales que $v = v_1 + v_2$. En efecto,

$$v_1 = \frac{1}{2}(v + A(v))$$

$$v_2 = \frac{1}{2}(v - A(v))$$

Luego tenemos que $V = V_1 \oplus V_{-1}$, es decir, si escogemos una base de V_1 y una base de V_{-1}, entonces su unión nos da una base $\mathcal{B}_A$ de V. De esta manera, hemos descompuesto V en suma de los dos subespacios propios, es decir,

$$V = V_1 \oplus V_{-1}$$

16.4.1. Caso $dim_K V < \infty$. — En caso que además tenemos que $dim_K V < \infty$, lo hecho anteriormente nos produce una base $\mathcal{B}$ de V (escogiendo una base de cada V_i y luego uniendolas) de manera que la representación de A es de la forma siguiente :

$$M(L, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

donde $p = dim_K V_1$ y $q = dim_K V_{-1}$.

16.5. Par de involuciones que conmutan : Grupo de Klein

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K, no necesariamente de dimensión finita, y sean $L, T : V \to V$ transformaciones lineales tales que

$$L^2 = T^2 = (L \circ T)^2 = I$$

Ejercicio 45. — *Verificar que, con la regla de composición, el grupo generado por L y T es isomorfo al grupo de Klein $\mathbb{Z}_2^2$.*

De lo hecho anterioremente, vemos que $V = V_1 \oplus V_2$, donde

$$V_1 = \{v \in V : L(v) = v\}, \quad V_2 = \{v \in V : L(v) = -v\}$$

Ahora, si $v \in V_1$, entonces tenemos que

$$L(T(v)) = T(L(v)) = T(v),$$

es decir, V_1 es un subespacio invariante por T. Similarmente, si $v \in V_2$, entonces tenemos que

$$L(T(v)) = T(L(v)) = T(-v) = -T(v),$$

es decir, V_2 es un subespacio invariante por T.

Luego, tenemos isomorfismos

$$T : V_j \to V_j$$

donde $T^2 = I$. Si procedemos como lo hicimos para L y V, podemos ver que si

$$V_{j1} = \{v \in V_j : T(v) = v\}$$

$$V_{j2} = \{v \in V_j : T(v) = -v\}$$

entonces

$$V_j = V_{j1} \oplus V_{j2}$$

y en particular,

$$V = V_{11} \oplus V_{12} \oplus V_{21} \oplus V_{22}$$

donde cada V_{ij} es un subespacio invariante tanto por L como por T. En V_{11} tenemos que L y T actúan como la identidad, en V_{12} tenemos que L actúa como la identidad y T actúa por multiplicación por -1, en V_{21} tenemos que T actúa como la identidad y L actúa por multiplicación por -1 y en V_{12} tenemos que L y T actúan por multiplicación por -1.

16.5.1. Caso $dim_K V < \infty$. — En caso que además tenemos que $dim_K V < \infty$, lo hecho anteriormente nos produce una base $\mathcal{B}$ de V (escogiendo una base de cada V_{ij} y luego uniendolas) de manera que las representaciones de L y T son de la forma siguiente :

$$M(L, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_s \end{pmatrix}$$

$$M(T, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_s \end{pmatrix}$$

donde $p = dim_K V_{11}$, $q = dim_K V_{12}$, $r = dim_K V_{21}$ y $s = dim_K V_{22}$.

Ejercicio 46. *— Generalizar la construcción anterior para el caso en que tenemos transformaciones lineales $L_1, ..., L_n : V \to V$, tales que $L_j^2 = I$ y $L_j \circ L_i = L_i \circ L_j$ para todo i, j.*

16.6. Problemas

1.- Sea $A \in M(n \times n; K)$. Concluir que $Spec_K({}^tA) = Spec_K(A)$.

2.- Calcular los valores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.- Sea $A \in M(n \times n; \mathbb{C})$. Concluir que $Spec_{\mathbb{C}}(\overline{A}) = \overline{Spec_{\mathbb{C}}(A)}$.

4.- Concluir de 1.- y 3.- que si $A \in M(n \times n; \mathbb{C})$ tal que ${}^tA = \overline{A}$, entonces $Spec_{\mathbb{C}}(A) = Spec_{\mathbb{R}}(A)$.

5.- Sea $A \in M(n \times n; K)$. Verificar que el coeficiente de t^n del polinomio característico $\chi_A(t)$ es -1, que el coeficiente de t^{n-1} es $(-1)^{n-1}Tr(A)$, donde $Tr(A)$ es la traza de A y que el coeficiente de t^0 es $det()$.

6.- Dar un ejemplo de una matriz $A \in M(2 \times 2; \mathbb{C})$ que no tenga valores propios reales.

7.- Verificar que si $A \in M(n \times n; \mathbb{C})$, entonces $Spec_{\mathbb{C}}(A) \neq \emptyset$.

8.- Sea $A \in GL(n; K)$. verificar que

$$\chi_{A^{-1}}(t) = (-t)^n det(A^{-1}) \chi_A(t^{-1})$$

Concluir que

$$\lambda \in Spec_K(A) \iff \lambda^{-1} \in Spec_K(A^{-1})$$

9.- Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Verifique que los valores propios de la matriz real

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

son reales.

10.- Sea $A \in M(n \times n; K)$ tal que $A^k = 0$ para cierto $k \in \{1, 2, 3, ...\}$ (decimos que A es una matriz nilpotente). Concluir que $\chi_A(t) = (-t)^n$.

Ind : Si $\lambda \in Spec_K(A)$, entonces $\lambda^k \in Spec_K(A^k)$.

11.- Sean V un espacio vectorial sobre el cuerpo K, de dimensión finita y $L : V \to V$ una transformación lineal. Sea $W < V$ un subespacio invariante por L. Considere la restricción de L a W, denotada por $L_W : W \to W$, el espacio vectorial cociente V/W y la proyección $\pi_W : V \to V/W$. Verifique que :

(i) L_W dada por

$$\widehat{L_W} : V/W \to V/W : \pi_W(v) \mapsto \pi_W(L_W(v))$$

está bién definida y que es una transformación lineal.

(ii) $\chi_L(t) = \chi_{L_W}(t) \cdot \chi_{\widehat{L_W}}(t)$.

(iii) Concluir que si $W = Ker(L)$, entonces $\chi_L(t) = (-t)^{dim_K(Ker(L))}\chi_{\widehat{L_W}}(t)$.

12.- Sea Vun espacio vectorial de dimensión finita. Verificar que si $L, N : V \to V$ son transformaciones lineales, entonces

$$\chi_{L\circ N} = \chi_{N\circ L}$$

Ind : Suponga primero que L es invertible.

CAPÍTULO 17

TRANSFORMACIONES LINEALES Y PRODUCTO INTERIOR

En este capítulo todos los espacios vectoriales son de dimensión finita y que están definida sobre un subcuerpo de $\mathbb{R}$. Bajo estos supuestos, podemos dotar a cada uno de esos espacios de un productor interior positivo definido el cual permite dar una autodualidad del espacio.

Si tenemos un espacio vectorial V definido sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{R}$ con un producto interior positivo definido $<,>$, entonces $<,>$ nos da una dualidad de V consigo mismo. Esto nos da una transformación lineal inyectiva

$$Q_V : V \to V^* : v \mapsto < v, \cdot > = < \cdot, v >$$

Si además $dim_K V < \infty$, entonces $Q_V : V \to V^*$ es un isomorfismo, el cual nos daba el teorema de representación de Riez.

Usaremos técnicas de productos interiores para obtener representaciones matriciales simples de algunas transformaciones lineales.

17.1. La transformación adjunta

Consideremos una transformación lineal $L : V \to W$, donde V y W son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $K \subset \mathbb{R}$, ambos de dimensión finita. Sean $<,>_V$ un producto interior positivo definido sobre V y $<,>_W$ un producto interior positivo definido sobre W.

Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "Q_V"] & W \arrow[d, "Q_W"] \\ V^* & W^* \arrow[l, "L^*"'] \end{tikzcd}$$

donde

$$Q_V : V \to V^* : v \mapsto < \cdot, v >_V$$

$$Q_W : W \to W^* : w \mapsto < \cdot, w >_W$$

$$L^* : W^* \to V^* : \psi \mapsto L^*(\psi) = \psi \circ L$$

Definición 17.1.1. — La transformación $L^{adj} = Q_V^{-1} \circ L^* \circ Q_W$ es llamada la transformación adjunta de L, respecto a los productos interiores positivos definidos dados.

Recuerde que cuando vimos dualidades hemos definido la transformación dual de L, como una transformación lineal $L^\circ : W \to V$ tal que

$$< L(v), w >_W = < v, L^\circ(w) >_V$$

Teorema 17.1.2. — *Sean V y W espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $K \subset \mathbb{R}$, ambos de dimensión finita. Sean $<,>_V$ un producto interior positivo definido sobre V y $<,>_W$ un producto interior positivo definido sobre W. Si $L : V \to W$ es una transformación lineal, entonces la transformación adjunta de L es dual de L, es decir,*

$$< L(v), w >_W = < v, L^{adj}(w) >_V, \quad \forall w \in W, \forall v \in V$$

Demonstración. — Para $w \in W$, tenemos que

$$L^* \circ Q_W(w) = Q_V \circ L^{adj}(w)$$

Luego, para todo $v \in V$ vale que

$$L^* \circ Q_W(w)(v) = Q_V \circ L^{adj}(w)(v)$$

es decir

$$< w, L(v) >_W = < L(v), w >_W = < v, L^{adj}(w) >_V = < L^{adj}(w), v >_V, \quad \forall w \in W, \forall v \in V$$

□

Corolario 17.1.3. — *Sean V y W espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $K \subset \mathbb{R}$, ambos de dimensión finita. Sean $<,>_V$ un producto interior positivo definido sobre V y $<,>_W$ un producto interior positivo definido sobre W. Si $L : V \to W$ es una transformación lineal, entonces*

$$(L^{adj})^{adj} = L$$

Demostración. — Basta ver que

$$< L^{adj}(w), v >_V = < w, L(v) >_W$$

□

Teorema 17.1.4. — *Sean V y W espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $K \subset \mathbb{R}$, ambos de dimensión finita. Sean $<,>_V$ un producto interior positivo definido sobre V y $<,>_W$ un producto interior positivo definido sobre W. Si $L : V \to W$ es una transformación lineal, entonces*

$$Ker(L^{adj}) = Im(L)^{\perp}$$
$$Im(L^{adj}) = Ker(L)^{\perp}$$
$$Ker(L) = Im(L^{adj})^{\perp}$$
$$Im(L) = Ker(L^{adj})^{\perp}$$

Demostración. — Ya que L^{adj} es dual a L y tenemos dimensión finita, esto es consecuencia del teorema 10.5.3. Una demostración diferente puede ser dada de la siguinete manera. Si $v \in Ker(L)$, entonces tenemos que para todo $w \in W$ vale que

$$0 = < w, L(v) >_W = < L^{adj}(w), v >_V$$

de donde obtenemos que $v \in Im(L^{adj})^{\perp}$, es decir, tenemos que

$$Ker(L) < Im(L^{adj})^{\perp}$$

De manera similar, usando el hecho que $L = (L^{adj})^{adj}$, tenemos

$$Ker(L^{adj}) < Im(L)^{\perp}$$

Ahora, lo anterior nos asegura que

$$dim_K Im(L) = dim_K V - dim_K Ker(L) = dim_K Ker(L)^{\perp} \geq dim_K Im(L^{adj})$$

es decir

$$dim_K Im(L) \geq dim_K Im(L^{adj}) \quad (*)$$

De manera similar, usando la igualdad $L = (L^{adj})^{adj}$,

$$dim_K Im(L^{adj}) \geq dim_K Im(L) \quad (**)$$

Luego, $(*)$ y $(**)$ aseguran que

$$dim_K Im(L) = dim_K Im(L^{adj})$$

Usando esta última igualdad tenemos que

$$dim_K Ker(L) = dim_K V - dim_K Im(L) = dim_K V - dim_K Im(L^{adj}) = dim_K Im(L^{adj})^{\perp}$$

de donde ahora podemos concluir que

$$Ker(L) = Im(L^{adj})^{\perp}$$

Las otras igualdades se obtienen de manera análoga. □

17.2. Representación matricial

Ahora veremos como se relacionan las matrices de L y L^{adj} una vez fijadas bases de V y W. Sean

$$\mathcal{B}_V = \{v_1, ..., v_n\}$$

una base ortonormal de V y

$$\mathcal{B}_W = \{w_1, ..., w_m\}$$

una base ortonormal de W. Podemos entonces calcular las representaciones matriciales

$$M(L, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W) = (\alpha_{ij})_{m\times n}$$
$$M(L^{adj}, \mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V) = (\beta_{ij})_{n\times n}$$

De esta manera tenemos que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L(v_j) & = & \alpha_{1j}w_1 + \cdots + \alpha_{mj}w_m \\ \\ L^{adj}(w_j) & = & \beta_{1j}v_1 + \cdots + \beta_{nj}v_n \end{array} \right.$$

Usando la igualdad

$$\beta_{jk} =< v_j, L^{adj}(w_k) >_V =< L(v_j), w_k >_W = \alpha_{kj}$$

obtenemos que

$$M(L, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W) = {}^tM(L^{adj}, \mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V)$$

Ejemplo 17.2.1. — Sea

$$L : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R} : a + bx + cx^2 \mapsto a$$

Si consideramos los siguientes productos interiores positivos definidos

$$< p(x), q(x) >_{\mathbb{R}_2[x]} = \int_0^1 p(x)q(x)\, dx$$
$$< a, b >_{\mathbb{R}} = ab$$

entonces

$$L^{adj} : \mathbb{R} \to L : \mathbb{R}_2[x]$$

debe satisfacer que

$$< L^{adj}(a), p(x) >_{\mathbb{R}_2[x]} =< a, L(p(x)) >_{\mathbb{R}}$$

Escojamos las siguientes bases de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}$

$$\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$$
$$\mathcal{B}_2 = \{1\}$$

No es dificil ver que en estas bases tenemos :

$$M(L, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = (1\ 0\ 0)$$

Observemos que hemos escogido una base que no es ortonormal para $\mathcal{R}_2[x]$, luego no es verdad en general que $M(L^{adj}, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$ deba ser la transpuesta de la anterior.

Si $L^{adj}(1) = a + bx + cx^2$, entonces :

$$< L^{adj}(1), 1 >_{\mathbb{R}_2[x]} = < 1, L(1) >_{\mathbb{R}} = < 1, 1 >_{\mathbb{R}} = 1$$

es decir,

$$a + b/2 + c/3 = 1$$

$$< L^{adj}(1), x >_{\mathbb{R}_2[x]} = < 1, L(x) >_{\mathbb{R}} = < 1, 0 >_{\mathbb{R}} = 0$$

es decir,

$$a/2 + b/2 + c/2 = 0$$

$$< L^{adj}(1), x^2 >_{\mathbb{R}_2[x]} = < 1, L(x^2) >_{\mathbb{R}} = < 1, 0 >_{\mathbb{R}} = 0$$

es decir,

$$a/3 + b/4 + c/5 = 0$$

Luego,

$$a = 9,\ b = -36,\ c = 30$$

en otras palabras,

$$L^{adj} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_2[x] : \lambda \mapsto 9\lambda - 36\lambda x + 30\lambda x^2$$

y

$$M(L^{adj}, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} 9 \\ -36 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Calcule, por el proceso de Gram-Schmidt, una base ortonormal para $\mathbb{R}_2[x]$ y compare la matriz anterior con la matriz de cambio de base.

17.3. Caso $V = W$

Supongamos ahora que tenemos un espacio vectorial V son sobre cuerpos $K \subset \mathbb{R}$ y de dimensión finita, con un producto interior positivo definido.

Si tenemos una transformación lineal $L : V \to V$, entonces tenemos la transformación lineal adjunta

$$L^{adj} : V \to V$$

junto a las propiedades

$$Ker(L^{adj}) = Im(L)^{\perp}$$

$$Im(L^{adj}) = Ker(L)^{\perp}$$

Además, si $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ es una base ortonormal de V, entonces tenemos la igualdad

$$M(L^{adj}, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = {}^tM(L, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \quad (\star)$$

En particular, esto nos dice que

$$Spec_K(L) = Spec_K(L^{adj})$$

Definición 17.3.1. — Sea V es un espacio vectorial sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{R}$ y de dimensión finita y $<,>$ un producto interior Euclideano en V. Sea $L : V \to V$ una transformación lineal.

(i) Diremos que L es simétrica si $L = L^{adj}$, es decir, si para una base ortonormal (luego para cualquiera) $\mathcal{B}$ de V vale la igualdad

$$M(L^{adj}, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = M(L, \mathcal{B}, \mathcal{B})$$

(ii) Diremos que L es antisimétrica si $-L = L^{adj}$, es decir, si para una base ortonormal (luego para cualquiera) $\mathcal{B}$ de V vale la igualdad

$$M(L^{adj}, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = -M(L, \mathcal{B}, \mathcal{B})$$

Teorema 17.3.2. — *Sea $L : V \to V$ una transformación lineal, donde V es un espacio vectorial sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{R}$ y de dimensión finita.*

(i) L es simétrica para algún producto positivo definido en V sí y sólo si ${}^tM(L, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = M(L, \mathcal{B}, \mathcal{B})$, para alguna (luego para cualquiera) base $\mathcal{B}$ de V.

(i) L es antisimétrica para algún producto positivo definido en sí y sólo si ${}^tM(L, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = -M(L, \mathcal{B}, \mathcal{B})$, para alguna (luego, para cualquiera)cualquier base $\mathcal{B}$ de V.

Demonstración. — Una de las direcciones es trivial de la definición y la igualdad $(\star)$.

Para ver la otra dirección, basta observar que dada una base $\mathcal{B}$ de V es posible construir un producto interior positivo definido para V que hace de $\mathcal{B}$ una base ortonormal. □

Observación 17.3.3. — Observemos que el resultado anterior nos permite definir transformaciones simétricas ó antisimétricas de manera independiente a un producto interior positivo definido.

Teorema 17.3.4. — *Sea $L : V \to V$ una transformación lineal, donde V es un espacio vectorial sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{R}$ y de dimensión finita, y $<,>$ un producto interior positivo definido sobre V. Si $\lambda_1, \lambda_2 \in Spec_K(L) = Spec_K(L^{adj})$ son tales que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces si $V_{\lambda_1}^L$ denota el espacio propio de L respecto a λ y y $V_{\lambda_2}^{L^{adj}}$ denota el espacio propio de L^{adj} respecto a λ_2, entonces tenemos que $V_{\lambda_1}^L$ y $V_{\lambda_2}^{L^{adj}}$ son ortogonales.*

Demostración. — Si $v_1 \in V_{\lambda_1}^L$ y $v_2 \in V_{\lambda_1}^{L^{adj}}$, entonces

$$\lambda_1 < v_1, v_2 >=< L(v_1), v_2 >=< v_1, L^{adj}(v_2) >= \lambda_2 < v_1, v_2 >$$

es decir

$$(\lambda_1 - \lambda_2) < v_1, v_2 >= 0$$

y como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces

$$< v_1, v_2 >= 0$$

□

Corolario 17.3.5. — *Sea $L : V \to V$ una transformación lineal simétrica, donde V es un espacio vectorial sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{R}$ y de dimensión finita, y $<,>$ un producto interior positivo definido sobre V. Entonces, espacios propios asociados a valores propios diferentes son ortogonales.*

Teorema 17.3.6. — *Sea $L : V \to V$ una transformación lineal antisimétrica, donde V es un espacio vectorial sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{R}$ y de dimensión finita, y $<,>$ un producto interior positivo definido sobre V. Entonces*

$$Spec_K(L) = \{0\}$$

Demostración. — Como $L^{adj} = -L$, tenemos la igualdad

$$< L(v), w >=< v, -L(w) >, \ \forall v, w \in V$$

Si $\lambda \in Spec_K(L)$ y $v \in V_\lambda - \{0_V\}$, es decir, $L(v) = \lambda v$, entonces

$$\lambda < v, v >=< \lambda v, v >=< L(v), v >=< v, L^{adj}(v) >=< v, -L(v) >= -\lambda < v, v >$$

de donde obtenemos que $\lambda = 0$.

□

17.4. Isomorfismos de orden finito

En esta sección daremos una representación matricial simple se isomorfismos de orden finito. Recuerde que para aquellas de orden dos (involuciones) ya lo hemos hecho en el capítulo anterior).

Definición 17.4.1. — Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Una transformación lineal $L : V \to V$ es llamada de orden finita si existe un entero positivo $k \in \{2, 3, ..., \}$ tal que $L^k = I$. El menor entero positivo k con tal propiedad es llamado el orden de L y decimos que L tiene orden k.

Teorema 17.4.2. — *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Si $L : V \to V$ es una transformación lineal $L : V \to V$ de orden finito, entonces L es un isomorfismo.*

Demonstración. — Supongamos que tenemos una transformación de orden $k \in \{1, 2, 3, ...\}$, digamos $L : V \to V$. Entonces vemos que L es necesariamente un isomorfismo ya que $L^{-1} = L^{k-1}$. □

Teorema 17.4.3. — *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Si $L : V \to V$ es una transformación lineal $L : V \to V$ de orden finito k, entonces*

$$Spec_K(L) \subset \{\lambda \in K : \lambda^k = 1\}$$

Demonstración. — Supongamos que $\lambda \in Spec_K(L)$. Entonces, si $v \in V - \{0_V\}$ es vector propio asociado a λ, entonces vemos que

$$v = L^k(v) = L^{k-1}(L(v)) = L^{k-1}(\lambda v) = \lambda L^{k-1}(v)$$

de donde podemos obtener de manera inductiva que

$$\lambda^k = 1$$

□

Ejemplo 17.4.4. — Si tomamos $k = 3$, entonces tenemos que :

(i) Si $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, entonces $Spect_K(L) \subset \{1\}$.

(ii) Si $K = \mathbb{C}$, entonces $Spec_{\mathbb{C}}(L) \subset \{1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}\}$.

(iii) Sea $\alpha = e^{2\pi i/3}$ y $K = \mathbb{Q}(\alpha) = \{a_b\alpha + c\alpha^2 : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$, entonces K es un cuerpo y $Spec_K(L) \subset \{1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}\}$.

Ejercicio 47. — *Sea $L : V \to V$ una transformación de orden finito. ¿Qué puede decir sobre $Spec_K(L)$ en el caso que $K = \mathbb{Z}_p$, p un primo ?*

Si V es espacio vectorial sobre K con $dim_K V < \infty$, entonces podemos construir un producto interior positivo definido $<,>$ en V. En presencia de una transformación lineal de orden finito, tenemos la siguiente propiedad.

Teorema 17.4.5. — *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K, con $dim_K V < \infty$ y $L : V \to V$ una transformación lineal $L : V \to V$ de orden finito k. Sea $<,>$ un producto interior positivo definido sobre V y defina*

$$< v, w >_L = \sum_{j=1}^{k} < L^j(v), L^j(w) >$$

(i) $<,>_L$ es un producto interior positivo definido.
(ii) $< L(v), L(w) >_L = < v, w >_L$, para todo $v, w \in V$.

Observación 17.4.6. — La transformación L resulta ser una isometría para el producto interior $<,>_L$. En una sección más abajo estudiaremos este tipo de transformaciones lineales. Por el momento, veamos este caso particular de ellas (isometrías de orden finito.

Ejercicio 48. — *Verificar la proposición 17.4.5.*

Teorema 17.4.7. — *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K, con $dim_K V < \infty$ y $L : V \to V$ una transformación lineal $L : V \to V$ de orden finito k. Entonces existe una base $\mathcal{B}$ de V de manera que*

$$M(L, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & A_{p-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

donde
(i) A_j es un valor propio de L ; ó bién
(ii) una matriz cuadrada de la forma

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & * \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

donde debemos tener que $A_j^k = I$.

Demostración. — El caso $k = 1$ asegura que $L = I$. El caso $k = 2$, es decir cuando L es una involución, ya fué estudiado. De ahora en adelante suponemos $k \geq 3$ y $L \neq I$.

Sea $v_1 \in V - \{0_V\}$ y consideremos el subconjunto de V dado por

$$\{v_1, L(v_1), L^2(v_1), ..., L^{k-1}(v_1)\}$$

entonces podemos encontrar $l_1 \in \{1, 2, 3, ..., k-1\}$ de manera que

$$S_1 = \{v_1, L(v_1), L^2(v_1), ..., L^{l_1}(v_1)\}$$

es conjunto linealmente independiente y

$$\{v_1, L(v_1), L^2(v_1), ..., L^{l_1+1}(v_1)\}$$

es un conjunto linealmente dependiente.

Sea V_1 el espacio generado por S_1 y consideremos $V_1^\perp$. Por construcción vemos que V_1 es un subespacio invariante por L. la condición (ii) de la proposición 17.4.5 permite asegurar que $V_1^\perp$ es también un subespacio invariante por L. Recordemos que

$$dim_K V = dim_K V_1 + dim_K V_1^\perp$$

Ahora, consideramos un vector $v_2 \in V_1^\perp - \{0_V\}$ y procedemos de la misma manera como para v_1, es decir, consideremos el subconjunto de $V_1^\perp$ dado por

$$\{v_2, L(v_2), L^2(v_2), ..., L^{k-1}(v_2)\}$$

entonces podemos encontrar $l_2 \in \{1, 2, 3, ..., k-1\}$ de manera que

$$S_1 = \{v, L(v), L^2(v), ..., L^{l_2}(v)\}$$

es conjunto linealmente independiente y

$$\{v, L(v), L^2(v), ..., L^{l_2+1}(v)\}$$

es un conjunto linealmente dependiente.

Sea V_2 el subespacio generado por S_2 y consideremos el subespacio $V_2^\perp \cap V_1^\perp$. Tenemos que

$$dim_K V_1^\perp = dim_K V_2 + dim_K V_2^\perp \cap V_1^\perp$$

Ahora tenemos que $V_2^\perp \cap V_1^\perp$ es un subespacio invariante por L y procedemos con este subspacio como antes. Ya que $dim_K V < \infty$, tenemos que este proceso debe parar después de un número finito de pasos. Al final, obtenemos una base $\mathcal{B}$

de V de manera que

$$M(L,\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & A_{p-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

donde

(i) A_j es un valor propio de L; ó bién

(ii) una matriz cuadrada de la forma

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & * \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

donde debemos tener que $A_j^k = I$.

□

17.4.1. Caso $K = \mathbb{C}$. — Ahora consideremos el caso particular cuando $K = \mathbb{C}$. En esta caso, ya que todo polinomio con coeficientes complejo de grado positivo tiene ceros, tenemos que χ_L tienen ceros, es decir, $\chi_{\mathbb{C}} \neq \emptyset$. Sea

$$Spec_{\mathbb{C}}(L) = \{\lambda_1, ..., \lambda_q\}$$

Teorema 17.4.8. — *Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión finita y $L : V \to V$ es un isomorfismo de orden finito. Si $Spec_{\mathbb{C}}(L) = \{\lambda_1, ..., \lambda_q\}$, entonces existe una base $\mathcal{B}$ de V formado de vectores propios de L. Más aún, si $dim_{\mathbb{C}} V_{\lambda_j} = r_j$, entonces*

$$M(L,\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{r_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{r_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_q I_{r_q} \end{pmatrix}$$

Demonstración. — Consideremos, para cada $j = 1,..,q$, el espacio de vectores propios asociados a λ_j

$$V_{\lambda_j} = \{v \in V : L(v) = \lambda_j v\}$$

y sea $r_j = dim_{\mathbb{C}} V_{\lambda_j} \geq 1$. Sea

$$\mathcal{B}_j = \{v_1^j, ..., v_{r_j}^j\}$$

una base de V_{λ_j}. Entonces,

$$\widehat{\mathcal{B}} = \bigcup_{j=1}^{q} \mathcal{B}_j$$

es un conjunto linealmente independiente en V.

1.- Supongamos que $\widehat{\mathcal{B}}$ es base de V, entonces tenemos que en esta base la representación matricial de L es la siguiente matriz diagonal

$$M(L, \widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{r_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{r_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_q I_{r_q} \end{pmatrix}$$

2.- Ahora supongamos que $\widehat{\mathcal{B}}$ no es base de V. Entonces consideramos el subespacio $W < V$ generado por $\widehat{\mathcal{B}}$. Como antes, podemos encontrar un producto interior positivo definido $<,>$ en V de manera que $< L(v), L(w) > = < v, w >$, para todo $v, w \in V$. Como W es subespacio invariante por L, entonces también lo es $W^{\perp}$. Si $\mathcal{B}^*$ es una base de $W^{\perp}$, entonces $\mathcal{B} = \widehat{\mathcal{B}} \cup \mathcal{B}^*$ es una base de V. Pero en este caso,

$$M(L, \widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{r_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{r_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_q I_{r_q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A \end{pmatrix}$$

donde A es una matriz cuadrada de tamaño igual a la cardinalidad de $\mathcal{B}^*$. En este caso, el polinomio característico de L será

$$\chi_L(t) = \prod_{j=1}^{q} (\lambda_j - t)^{r_j} \chi_A(t)$$

Observemos que A es la representación matricial de $L : W^{\perp} \to W^{\perp}$ en la base $\mathcal{B}^*$. Pero como todo polinomio complejo de grado al menos 1 tiene ceros, tenemos que L tiene un vector propio en $W^{\perp}$, una contradición al hecho que W fué escogido contener todos los valores propios de L.

$\square$

17.4.2. Caso $K=\mathbb{R}$. — Ahora consideremos el caso particular cuando $K=\mathbb{R}$. En esta caso, hay polinomio con coeficientes reales de grado positivo sin ceros en $\mathbb{R}$ Sea

$$Spec_{\mathbb{C}}(L)=\{\lambda_1,....,\lambda_q\}$$

el cual podría ser vacío. Si combinamos los dos teoremas anteriores, podemos tener el siguiente resultado.

Teorema 17.4.9. — *Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita y $L:V\to V$ es un isomorfismo de orden finito. Si $Spec_{\mathbb{R}}(L)=\{\lambda_1,....,\lambda_q\}$, entonces existe una base $\mathcal{B}$ de V que contiene vectores propios de L, y si $dim_{\mathbb{R}}V_{\lambda_j}=r_j$, entonces*

$$M(L,\mathcal{B},\mathcal{B})=\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{r_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 I_{r_2} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_q I_{r_q} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A \end{pmatrix}$$

donde A tiene la forma siguiente

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & A_2 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & A_{p-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

y cada A_j tiene la forma

$$A_j=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & *\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & *\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & *\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & *\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

es tal que $A_j^k=I$ y $Spec_{\mathbb{R}}(A_j)=\emptyset$, en particular, A_j debe ser de orden par.

17.5. Transformaciones simétricas

Supongamos que tenemos un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita con un producto interior Euclidiano $<,>$. Consideremos una transformación lineal simétrica

$$L:V\to V$$

Recordemos que en este caso tenemos la igualdad

$$(\star) \quad < L(v), w >=< v, L(w) >, \ \forall v, w \in V$$

Si $W < V$ el cual es invariante por L, entonces $(\star)$ nos asegura que $W^{\perp}$ también es invariante por L. De esta manera, tenemos una descomposición

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

por subespacios invariantes por L. Así, si tenemos una base $\mathcal{B}_W$ para w y una base $\mathcal{B}_{W^{\perp}}$ para $W^{\perp}$, entonces

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_W \cup \mathcal{B}_{W^{\perp}}$$

es una base para V y además tenemos que

$$M(L, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

donde A es una matriz cuadrada de tamaño igual a la dimensiónde W y B es una cuadrada de tamaño igual a la dimensiónde $W^{\perp}$. Así, nuestra estrategia será buscar subespacios invariantes de L para producir una base adecuada en la cual la representación matricial de L sea simple.

Teorema 17.5.1. — *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita, con un producto interior Euclidiano $<,>$. Si $L : V \to V$ es una transformación lineal simétrica entonces existe una base $\mathcal{B}$ de V consistiendo sólo de vectores propios. Si*

$$Spec_{\mathbb{R}}(L) = \{\lambda_1, ..., \lambda_q\}$$

donde $\lambda_j \neq \lambda_i$ para $i \neq j$ y

$$dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_j} = r_j$$

entonces

$$M(L, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{r_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{r_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_q I_{r_q} \end{pmatrix}$$

y

$$\chi_L(t) = \prod_{j=1}^{q} (\lambda_j - t)^{r_j}$$

Demonstración. — Definamos la función real continua (en V usamos la topología inducida por la norma inducida por $<,>$)

$$F : V - \{0_V\} \to \mathbb{R} : v \mapsto \frac{< v, L(v) >}{\|v\|^2}$$

Tenemos que para $\lambda \in \mathbb{R}$ vale que

$$F(\lambda v) = F(v) \quad (*)$$

Sea $S = \{v \in V : \|v\| = 1\}$ la esfera unitaria en V. Si consideramos la restricción

$$F : S \to \mathbb{R}$$

entonces vemos por $(*)$ que $F(S) = F(V - \{0_V\})$.

Como S es compacto y conexo, tenemos que $F(S) = [a, b]$. En particular, existe un vector $v_1 \in S$ tal que $F(v_1) = a$. Luego, por (8), tenemos que

$$F(v_1) \leq F(v), \ \forall v \in V - \{0_V\}$$

Procedamos a ver que v_1 es un vector propio de L. Para esto, sea $v \in V - < v_1 >$, es decir, $\{v_1, v\}$ es un conjunto linealmente independiente, y definamos la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto F(v_1 + tv)$$

Observemos que

$$f(t) = \frac{< v_1, L(v_1) > +(< v_1, L(v) > + < v, L(v_1) >)t + < v, L(v) > t^2}{\|v_1\|^2 + 2 < v_1, v > t + \|v\|^2 t}$$

luego, vemos que f es el cociente de dos polinomios, cuyo numerador no se anula debido a que $\{v_1, v\}$ es un conjunto linealmente independiente y

$$\|v_1\|^2 + 2 < v_1, v > t + \|v\|^2 t = \|v_1 + tv\|^2$$

Esto nos asegura que f es una función derivable. Como además f tiene un mínimo en $t = 0$, tenemos que

$$f'(0) = 0$$

lo cual es equivalente a

$$< L(v_1) - < v_1, L(v_1) > v_1, v >= 0$$

Esta última igualdad vale para todo $v \in V - < v_1 >$, pero es claro que también es válida para $v \in < v_1 >$. Luego,

$$L(v_1) - < v_1, L(v_1) > v_1 = 0_V$$

es decir

$$L(v_1) = < v_1, L(v_1) > v_1$$

y v_1 es un vector propio de L como queríamos ver.

Sea $W_1 = < v_1 >$ el cual es un subespacio invariante por L. Ahora nos restringimos a

$$L : W_1^{\perp} \to W_1^{\perp}$$

y procedemos como en el caso anterior para encontrar un segundo vector propio $v_2 \in W_1^{\perp}$. Por la construcción, $< v_1, v_2 >= 0$. Sea ahora W_2 el subespacio generado por v_1 y v_2. De nuevo tenemos que W_2 es invariante por L. Ahora consideramos

$$L : W_2^{\perp} \to W_2^{\perp}$$

y procedemos de la misma manera. Ya que V tiene dimensión finita y cada vez disminuimos la dimensión en uno, este proceso termina después de n pasos, donde $n = dim_{\mathbb{R}} V$. Es claro ver que la colección de vectores propios así cosntruida es una base de V y luego, reordenandolas apropiadamente, tenemos que la matriz asociada a L en tal base debe ser como se pide.

□

Corolario 17.5.2. — *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita, digamos $dim_{\mathbb{R}} V = n$. Sea $L : V \to V$ una trasnformación lineal, entonces :*

L es simétrica

$$\Longleftrightarrow$$

(i) $Spec_{\mathbb{R}}(L) \neq \emptyset$;
(ii) si $Spec_{\mathbb{R}}(L) = \{\lambda_1, ..., \lambda_q\}$, donde $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$ y r_j es la multiplicidad algebraica de λ_j en χ_L, entonces
  (ii.1) $r_1 + \cdots r_q = n$;
  (ii.2) $dim_{\mathbb{R}} V_{\lambda_j} = r_j$.

17.6. Transformaciones antisimétricas

Supongamos que tenemos un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita con un producto interior Euclidiano $<,>$. Consideremos una transformación lineal antisimétrica

$$L : V \to V$$

Recordemos que en este caso tenemos la igualdad

$$(\star) \quad < L(v), w >= - < v, L(w) >, \ \forall v, w \in V$$

En este caso sabemos que

$$Spec_{\mathbb{R}}(L) = \{0\}$$

Por otro lado, $(\star)$ nos dice que para todo $v \in V$ vale que $< L(v), v >= 0$, es decir, v y $L(v)$ son ortogonales.

Teorema 17.6.1. — *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita con un producto interior Euclidiano $<,>$. Consideremos una transformación lineal $L : V \to V$. Entonces L es antisimétrica sí y sólo si para todo $v \in V$ vale que v y $L(v)$ son ortogonales.*

Demostración. — Ya tenemos una dirección. Veamos la otra. Supongamos que para todo $v \in V$ vale que v y $L(v)$ son ortogonales. Luego,

$$0 =< v+w, L(v+w) >= \underbrace{< v, L(v) >}_{0} + < v, L(w) > + < w, L(v) > + \underbrace{< w, L(w) >}_{0}$$

y luego,

$$< v, L(w) > + < w, L(v) >= 0, \ \forall v, w \in V$$

□

Teorema 17.6.2. — *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita con un producto interior Euclidiano $<,>$. Si $L : V \to V$ es una una transformación lineal antisimétrica, entonces L^2 es una transformación lineal simétrica.*

Demostración. — $(L^2)^{adj} = (L^{adj})^2 = (-L)^2 = L^2$. □

Teorema 17.6.3. — *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita con un producto interior Euclidiano $<,>$. Si $L : V \to V$ es una una transformación lineal antisimétrica, entonces existe una base $\mathcal{B}$ de V de manera que*

$$M(L, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} 0 & D & 0 \\ -D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$D = diag(\sqrt{-\lambda_1}, ..., \sqrt{-\lambda_m})$$

donde

$$\lambda_1, ..., \lambda_m$$

son los vectores propios no cero de L^2 repetidos según su multiplicidad algebraica (es decir, repetidos tantas veces como la dimensón de su respectivo espacio propio).

Demostración. — Si tenemos una transformación lineal antisimétrica $L : V \to V$, entonces al tener que $L^2 : V \to V$ es simétrica, sabemos que existe una base

$$\mathcal{B}_0 = \{v_1, ..., v_n\}$$

formada de vectores propios de L^2.

Supongamos que λ es un valor propio de L^2. Sea $v \in V$ un vector propio de L^2 asociado a λ, es decir, $L^2(v) = \lambda v$, entonces tenemos

$$\lambda =< v, L^2(v) >= - < L(v), L(v) >\leq 0$$

es decir, todos los valores propios de L^2 son cero y/ó negativos.

Por otro lado, ya que $L^{adj} = -L$, tenemos que

$$L \circ L^{adj} = L^{adj} \circ L$$

es decir, L es normal (ver problema 2.- del capítulo anterior). Luego, tenemos que la restricción de L a $Im(L)$, digamos $L_0 : Im(L) \to Im(L)$ es un isomorfismo la cual sigue siendo antisimétrica. Por otro lado, $L_0^{adj} = -L_0$ nos asegura que

$$det(L_0) = (-1)^{dim_{\mathbb{R}} Im(L)} det(L_0)$$

de donde vemos que $dim_{\mathbb{R}} Im(L)$ es par. La normalidad de L también nos asegura la descomposición

$$V = Ker(L) \oplus Im(L)$$

Otra cosa a observar es que como $Im(L^2) = Im(L)$ tiene dimensión par, tenemos un número par de valores propios negativos de L^2, no necesariamente diferentes, digamos

$$\lambda_1, ..., \lambda_{2m} < 0$$

Denotamos por

$$\lambda_{2m+1} = \cdots = \lambda_n = 0 \quad (n = dim_{\mathbb{R}} V)$$

Lo que estamos haciendo es contar los valores propios tantas veces como es su multiplicidad algebraica (que es igual a la dimensión de su respectivo espacio propio).

Reordenamos la base de vectores propios $\mathcal{B}_0$ de manera que v_j es vector propio asociado al valor propio λ_j.

Ahora formemos los siguientes vectores

$$w_1 = v_1, \; w_2 = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_1}} L(v_1)$$

tenemos que w_1 y w_2 son ortogonales y que $\|w_1\| = \|w_2\| = 1$. Sean

$$w_3 \in < w_1, w_2 >^{\perp}, \; w_4 = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_2}} L(w_3)$$

y seguimos de esta manera para obtener una base ortonormal de $Im(L)$,

$$\mathcal{B}_* = \{w_1, w_2, ..., w_{2m-1}, w_{2m}\}$$

Si completamos esta a una base $\mathcal{B}^0$ de V, entonces tenemos que

$$M(L, \mathcal{B}^0, \mathcal{B}^0) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & A_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{m+1} \end{pmatrix}$$

donde, para $j = 1, ..., m$, tenemos que

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-\lambda_j} \\ -\sqrt{-\lambda_j} & 0 \end{pmatrix}$$

y $A_{m+1} = 0_{(n-m)\times(n-m)}$.

Permutando la base anterior, podemos encontrar una base $\mathcal{B}$ de V para que

$$M(L, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & D & 0 \\ -D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$D = diag(\sqrt{-\lambda_1}, ..., \sqrt{-\lambda_m})$$

□

17.7. Rotaciones

Definición 17.7.1. — Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita y $<,>$ un producto interior positivo definido. Una transfortmación lineal $L : V \to v$ es llamada una rotación si vale que

$$< L(v), L(w) >=< v, w >, \ \forall v, w \in V$$

Teorema 17.7.2. — *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita y $<,>$ un producto interior positivo definido. Si $L : V \to V$ es una rotación, entonces $L^{adj} = L^{-1}$ y $det(L) = \pm 1$. En particular, L es un isomorfismo.*

Demonstración. — La igualdad

$$< L(v), L(w) >=< v, w >, \ \forall v, w \in V$$

asegura que $L^{adj} = L^{-1}$. El último hecho proviene de que $det(L^{adj}) = det(L)$, $det(L^{-1}) = det(L)^{-1}$ y $L^{adj} = L^{-1}$. □

Teorema 17.7.3. — *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita y $<,>$ un producto interior positivo definido. Si $L : V \to V$ es una transformación lineal, entonces L es una rotación sí y sólo si L envía una base ortonormal en una base ortonormal.*

Demonstración. — Supongamos que L es una rotaci'on y que $\{v_1, ..., v_n\}$ es una base ortonormal de V. Como

$$< L(v_i), L(v_j) >=< v_i, v_j >= \left\{ \begin{array}{ll} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{array} \right.$$

tenemos claramente que $\{L(v_1), ..., L(v_n)\}$ es una base ortonormal de V.

Recíprocamente, supongamos que tenemos una transformación lineal $L : V \to V$ con la propiedad que envía una base ortonormal $\{v_1, ..., v_n\}$ de V en una base ortonormal de V. Luego, $\{L(v_1), ..., L(v_n)\}$ es una base ortonormal de V y además L debe ser un isomorfismo.

Si escribimos

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$$

$$w = \sum_{j=1}^{n} y_j v_j$$

entonces

$$L(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j L(v_j)$$

$$L(w) = \sum_{j=1}^{n} y_j L(v_j)$$

De esta manera,

$$< L(v), L(w) >= \sum_{j=1}^{n} x_j y_j =< v, w >$$

es decir, L es una rotación. □

Si $L : V \to V$ es una rotación y $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de V, entonces la condición $L^{adj} = L^{-1}$ nos asegura que

$$M(L, \mathcal{B}, \mathcal{B})^{-1} = {}^t M(L, \mathcal{B}, \mathcal{B})$$

Definición 17.7.4. — Una matriz cuadrada $A \in GL(n; \mathbb{R})$ es llamada ortogonal si ${}^t A = A^{-1}$.

Luego, la representación matricial de una matriz ortogonal en una base ortonormal es una matriz ortogonal.

Teorema 17.7.5. — *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita y $<,>$ un producto interior positivo definido. Si $L : V \to V$ es una rotación entonces $Spec_{\mathbb{R}}(L) \subset \{\pm 1\}$.*

Demostración. — Sea $\lambda \in Spec_{\mathbb{R}}(L)$ y $v \in V - \{0_V\}$ vector propio asociado a λ. Entonces,

$$\lambda^2 < v, v >=< L(v), L(v) >=< v, v >$$

es decir, $\lambda^2 = 1$.

$\square$

Ejemplo 17.7.6. — Sea $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (-y, x)$. Si usamos el producto usual de $\mathbb{R}^2$, es decir,

$$< (a, b), (c, d) >= ac + bd$$

entonces L es una rotación. El conjunto $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Además,

$$M(L, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, $\chi_L(t) = 1 + t^2$ el cual no tienen ceros reales, es decir, en este ejemplo $Spec_{\mathbb{R}}(L) = \emptyset$.

Ejercicio 49. — *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita impar. Si $L : V \to V$ es una rtransformación lineal, entonces $Spec_{\mathbb{R}}(L) \neq \emptyset$.*

Teorema 17.7.7. — *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita y $<,>$ un producto interior positivo definido. Si $L : V \to V$ es una rotación y $W < V$ es invariante por L, entonces $W^\perp$ también es invariante por L.*

Demostración. — Como $L(W) < W$ y $dim_{\mathbb{R}} W < \infty$, tenemos que $L(W) = W$. Si $v \in W^\perp$, entonces para todo $w \in W$ vale que

$$< L(v), L(w) >=< v, w >= 0$$

luego, $L(v) \in L(W)^\perp = W^\perp$. $\square$

El resultado anterior nos permitirá hacer una descomposición de V es subespacios invariantes por la rotación L, donde cada uno de ellos tendrá dimensión 1 ó 2.

Teorema 17.7.8. — *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita con un producto interior Euclidiano $<,>$. Si $L: V \to V$ es una una rotación, entonces existe una base $\mathcal{B}$ de V de manera que*

$$M(L, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -I_s & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & A_p \end{pmatrix}$$

donde $r = dim_{\mathbb{R}} V_1$ (donde V_1 es el espacio propio asociado al valor propio 1 en caso que $1 \in Spec_{\mathbb{R}}(L)$), $s = dim_{\mathbb{R}} V_{-1}$ (donde V_{-1} es el espacio propio asociado al valor propio -1 en caso que $-1 \in Spec_{\mathbb{R}}(L)$)y A_j tiene alguna de las dos posibles formas :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_j) & \sin(\theta_j) \\ \sin(\theta_j) & -\cos(\theta_j) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_j) & \sin(\theta_j) \\ -\sin(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{pmatrix}$$

Demonstración. — La primera descomposición es la siguiente. Sean V_1 y V_{-1} los espacios propios asociados a 1 y -1 (en cada caso si estos valores propios existen). Tenemos que V_1 y V_{-1} son ortogonales. En efecto, si $v \in V_1$ y $w \in V_{-1}$, entonces

$$- < v, w > = < v, -w > = < L(v), L(w) > = < v, w >$$

de donde vemos que $< v, w > = 0$.

Tenemos la descomposición

$$V = V_1 \oplus V_{-1} \oplus (V_1 \oplus V_{-1})^{\perp}$$

Sea $W = (V_1 \oplus V_{-1})^{\perp}$. Tenemos que la restricción de L a W, digamos $L_W : W \to W$, sigue siendo una rotación, pero ahora tenemos que $Spec_{\mathbb{R}}(L_W) = \emptyset$, es decir, en W no hay vectores propios de L.

Como χ_{L_W} no tiene ceros en $\mathbb{R}$ y este tiene grado igual a la dimensión de W, debemos tener que $dim_{\mathbb{R}} W$ es par.

Sea

$$N = L_W + L_W^{adj} = L_W + L_W^{-1} : W \to W$$

Entonces tenemos que

$$N^{adj} = N$$

es decir N es una transformación lineal simétrica. Sabemos que debe existir un vector propio $v \in W$ para N. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ su valor propio. Luego,

$$\lambda v = N(v) = L_W(v) + L_W^{-1}(v)$$

de donde vemos que

$$L^2(v) = \lambda L(v) - v$$

Veamos que $\{v, L(v)\}$ es un conjunto linealmente independiente. En efecto, si $L(v) = \mu v$ para algún $\mu \in \mathbb{R}$, entonces $v \in W$ es vector propio de L, una contradicción.

Sea W_1 el espacio generado por v y $L(v)$; luego $W_2 \cong \mathbb{R}^2$. Como $L^2(v) = \lambda L(v) - v \in W_1$, tenemos que W_1 es invariante por L_W y luego por L. Ya que la restricción de L a W_1 debe ser una rotación sin valores propios reales, podemos encontrar una base ortonormal de W_1 de manera que la representación matricial de L, restricto a W_1, en tal base sea de una de las siguientes dos formas :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & -\cos(\theta_1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos una descomposición

$$V = V_1 \oplus V_{-1} \oplus W_1 \oplus (V_1 \oplus V_{-1} \oplus W_1)^{\perp}$$

Procedemos con $W_2 = V_1 \oplus V_{-1} \oplus W_1)^{\perp}$ de la misma manera como lo hicimos con W_1 y así sucesivamente. □

17.8. Problemas

Todos los espacios vectoriales son reales y de dimensión finita con algún producto interior.

1.- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{R}$, con un producto interior positivo definido $<,>$. Para cada transformación lineal $L : V \to V$ defina la función

$$B_L : V \oplus V \to K : (v_1, v_2) \mapsto < L(v_1), v_2 >$$

(i) Ver que B_L es una función bilineal.

(ii) Denote por $B(V, V)$ al conjunto de todas las funciones bilineales de V. Verifique que $B(V, V)$, con la suma de funciones y la amplificación de funciones por esacalares de manera usual, es un espacio vectorial sobre K.

(iii) Considere la función

$$\eta : V^* \to B(V, V) : L \mapsto B_L$$

(iii.1) Verificar que η es una transformación lineal.

(iii.2) Ver que η es inyectiva.

(iii.3) Utilice el teorema de representación de Riez para ver que η es sobreyectiva.

(iii.4) concluir que η es un isomorfismo.

(iv) Para $L \in V^*$ sea

$$\widehat{B}_L : V \oplus V \to K : (v_1, v_2) \mapsto < L^{adj}(v_1), v_2 >$$

Verificar que $\widehat{B}_L = B_L$.

2.- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{R}$, con un producto interior positivo definido $<,>$. Una transformación lineal $L : V \to v$ es llamada normal si

$$L \circ L^{adj} = L^{adj} \circ L$$

(i) ver que

$$L \text{ es normal } \iff < L(v), L(w) >=< L^{adj}(v), L^{adj}(w) >, \ \forall v, w \in V$$

(ii) ver que

$$L \text{ es normal } \iff \|L(v)\| >= \|L^{adj}(v)\|, \ \forall v \in V$$

(iii) Concluir de lo anterior que si L es normal, entonces

$$Ker(L) = Ker(L^{adj})$$

$$V = Ker(L) \oplus Im(L)$$

$$L : Im(L) \to Im(L) \text{ es un isomorfismo}$$

$$Im(L \circ L) = Im(L), \text{ luego, } Im(L^k) = Im(L), \text{para todo } k = 1, 2, ...$$

(iv) Suponga que $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$, $L : V \to v$ es una transformación lineal y que cada W_j es un subespacio invariante por L. Verificar que

$$L \text{ es normal } \iff L : W_j \to W_j \text{ es normal para todo } j = 1, ..., r$$

Ind : Usar parte (ii)

3.- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $K \subset \mathbb{R}$. Suponga que tenemos dos producto interiores positivo definido $<,>_1$ y $<,>_2$. Sea $L : V \to V$ una transformación lineal y sean $L_j^{adj} : V \to V$ la transformación adjunta de L respecto al producto $<,>_j$. Sea $\mathcal{B}_j$ una base ortonormal de V respecto al producto $<,>_j$. Verificar la igualdad siguiente

$$M(L_1^{adj}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = {}^tM(I, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) M(L_2^{adj}, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2) \, {}^tM(I, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)^{-1}$$

4.- Sea $\mathbb{R}^2$ con los producto interiores positivo definido siguientes :

$$< (a,b),(c,d) >_1 = ac + bd$$

$$< (a,b),(c,d) >_2 = ac + bd + \frac{1}{2}(ad + bc)$$

Sea

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (y,x)$$

Sea L_j^{adj} la transformación adjunta de L respecto al producto $<,>_j$. verificar que

$$L_1^{adj} = L$$

$$L_2^{adj} \neq L$$

es decir, L es simétrica respectoa $<,>_1$ pero no respecto a $<,>_2$.

5.- Verificar de manera directa (calculando) que toda matriz de tamaño 2 simétrica con coeficientes reales tiene sólo valores propios reales. Describa todas las posibilidades.

6.- Calcular una base ortonormal de $M(3 \times 1; \mathbb{R})$ por valores propios de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Sea B la matriz diagonal que se obtiene de A usando la base obtenida. Calcular C tal que

$$CAC^{-1} = B$$

7.- Sean $L, N : V \to V$ transformaciones simétricas. Verificar que

$$L \circ N \text{ es simétrica} \iff L \circ N = N \circ L$$

8.- Sea $L : V \to v$ una transformación lineal simétrica. Decimos que L es positiva definida si

$$< v, L(v) > \geq 0, \ \forall v \in V - \{0_V\}$$

Decimos que L es estrictamente positiva definida si

$$< v, L(v) > > 0, \ \forall v \in V - \{0_V\}$$

(i) Verificar que si L es positiva definida, entonces existe una (y sólo una) transformación lineal simétrica positiva definida $N : V \to V$ tal que $N^2 = L$ (Ind : use la propiedad de diagonalización de L).

(ii) Si L es estrictamente positiva definida, verificar que

$$[v, w] = < v, L(w) >$$

define un producto interior Euclidiano en V.

9.- Sea $L : V \to V$ una transformación lineal. verificar que $L \circ L^{adj}$ es simétrica positiva definida. De hecho, $< v, L \circ L^{adj}(v) >\geq 0$ con igualdad sólo en el caso que $v \in Ker(L)$.

10.- Sea $L : V \to V$ una transformación lineal. verificar que es posible poner en V un producto interior que hace L simétrica sí y sólo si existe una base de V por vectores propios de L.

11.- Sea $L : V \to V$ una transformación lineal. verificar que

$$\|L\|_2 = \text{Máximo}\{|\lambda| : \lambda \in Spec_{\mathbb{R}}(L \circ L^{adj})\}$$

12.- Sea V de dimensión 2 y $L : V \to V$ antisimétrica. Verificar que

$$< L(v), L(w) >= det(L) < v, w >$$

13.- Sea $\mathbb{R}^3$ con el producto Euclidiano canónico. Para cada $z \in \mathbb{R}^3$ defina

$$L_z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto z \times x$$

(i) Verificar que L_z es una transformación antisimétrica.

(ii) Verificar que para $w, z \in \mathbb{R}^3$ vale la igualdad

$$L_{z\times w} = L_z \circ L_w - L_w \circ L_z$$

(iii) Si $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal antisimétrica, entonces existe $z \in \mathbb{R}^3$ tal que $L = L_z$.
Ind : tome $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ definida por

$$\Phi(x, y, w) =< L(x), y > w+ < L(y), w > x+ < L(w), x > y$$

y escoja $z \in \mathbb{R}^3$ de manera que

$$\Phi(x, y, w) = de(A)z$$

donde en la matriz A tiene su primera columna dada por los coeficientes de x, su segunda columna dada por los coeficientes de y y su tercera columna dada por los coeficientes de w.

14.- Si $L : V \to V$ es una transformación linea antisimétrica, entonces

$$\chi_L(t) = (-1)^{dim_{\mathbb{R}} V} \chi_L(-t)$$

15.- Sea $A = (a_{ij}) \in M(4 \times 4; \mathbb{R})$ antisimétrica. Verificar que

$$det(A) = (a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23})^2$$

16.- Sea $L : V \to V$ una transformación lineal. verificar que L es una rotación sí y sólo si $\|L(v)\| = \|v\|$ para todo $v \in V$.

17.- Si $L : V \to V$ es una rotación, entonces si $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de V, tenemos que ${}^tM(L, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = M(L, \mathcal{B}, \mathcal{B})^{-1}$, es decir $M(L, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ es una matriz ortogonal.

18.- Sea $L : V \to V$ un isomorfismo. verificar que existen $N, R : V \to V$, donde R es una rotación y N simétrica, de manera que

$$L = N \circ R$$

Concluir que para toda matriz $A \in GL(n;\mathbb{R})$ existen matrices B simétrica y C ortogonal tales que

$$A = BC$$

19.- Si $dim_{\mathbb{R}}V = n$ y $L : V \to V$ es una rotación, entonces $Tr(L) \leq n$.

20.- Si $L : V \to v$ es una rotación tal que $det(L) = 1$, entonces

$$\chi_L(t) = (-t)^{dim_{\mathbb{R}}V}\chi_L(t^{-1})$$

21.- Si $dim_{\mathbb{R}}V \geq 3$ y $L : V \to V$ es una rotación que conmuta con cualquier otra rotación y $det(L) = 1$, entonces $L = \tau I$, para cierto $\tau \in \mathbb{R}$. Más aún

$$\begin{cases} \tau = 1 & \text{si } dim_{\mathbb{R}}V \text{ es impar} \\ \tau = -1 & \text{si } dim_{\mathbb{R}}V \text{ es par} \end{cases}$$

22.- Sea $f : V \to V$ una función talq que

$$\begin{cases} f(0_V) = 0_V \\ \|f(v) - f(w)\| = \|v - w\|, \quad \forall v, w \in V \end{cases}$$

Verificar que f es una rotación.

CAPÍTULO 18

TRANSFORMACIONES UNITARIAS

En es te capítulo sólo estaremos interesados en espacios vectoriales complejos, es decir, definidos sobre el cuerpo de los números complejo $\mathbb{C}$, de dimensión finita.

Definición 18.0.1. — Un espacio unitario es un espacio vectorial complejo de dimensión finita junto a producto interior Hermitiano positivo. Usamos la notación $(V, <, >)$.

Ejemplo 18.0.2. — Ejemplos de espacios unitarios son los siguientes :

(i) $\mathbb{C}^n$ con el producto Hermitiano positivo canónico

$$< (x1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) >= \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$$

(ii) Sea E un espacio vectorial real con $dim_{\mathbb{R}} E = n$ y sea $<, >_E$ un producto interior Euclidiano en E. Recordemos que la complexificación de E es el espacio vectorial complejo $V = E \times E$ con las siguientes operaciones

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$

donde $+$ es la suma en E como espacio vectorial real y

$$(a + ib)(x, y) = (ax - by, ay + bx)$$

donde las amplificaciones de vectores de E por reales es la dada de E como espacio vectorial real. Si consideramos

$$< (x, y), (u, v) >=< x, u >_E + < y, v >_E + i(< y, u >_E - < a, v >_E)$$

entonces $<, >$ define un producto Hermitiano positivo en V, luego $(V, <, >)$ es un espacio unitario.

Consideremos un espacio unitario $(V, <,>)$, $dim_{\mathbb{C}} V = n$.

Sabemos que $V^* = \mathcal{L}(V; \mathbb{C})$, el conjunto de todas las funciones lineales de V en $\mathbb{C}$, es un espacio vectorial complejo el cual es isomorfo a V. En particular, V^* es un espacio vectorial real de dimensión real $2n$.

Por el teorema de representación de Riez (ver capítulo 13), la función

$$\Phi : V \to V^* : v \mapsto \Phi(v) =< \cdot, v >$$

es un isomorfismo como espacios vectoriales reales. Además, tenemos que

$$\Phi(v_1 + v_2) = \Phi_{v_1} + \Phi_{v_2}$$
$$\Phi(\lambda v) = \overline{\lambda}\Phi_v$$

es decir Φ es antilineal (como espacios vectoriales complejos).

Consideremos una aplicación lineal $L \in \mathcal{L}(V, V)$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{L} & V \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi} \\ V^* & \xleftarrow[L^*]{} & V^* \end{array}$$

donde

$$L^* : V^* \to V^* : \psi \mapsto L^*(\psi) = \psi \circ L$$

Es claro que L^* es $\mathbb{C}$-lineal.

Consideremos $v \in V$ y tomemos $\psi \in V^*$ con $\psi =< \cdot, v >$. Por la biyectividad de Φ, existe un único $w_v \in V$ tal que $\psi \circ L =< \cdot, w_v >$. Esto nos permite definir la función

$$L^{adj} : V \to V : v \mapsto L^{adj}(v) = w_v.$$

La conmutatividad del diagrama anterior nos dice que

$$< L(u), v >= \psi(L(u)) = \psi \circ L(u) =< u, w_v >$$

de donde obtenemos la igualdad

$$< L(u), v >=< u, L^{adj}(v) >, \ \forall u, v \in V$$

Teorema 18.0.3. — *Sea $(V, <,>)$ un espacio unitario. Si $L \in \mathcal{L}(V, V)$, entonces $L^{adj} \in \mathcal{L}(V^*, V^*)$.*

Demonstración. — Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\psi_1, \psi_2 \in V^*$. Si escribimos

$$\psi_1 =< \cdot, v_1 >$$
$$\psi_2 =< \cdot, v_2 >$$

entonces

$$\alpha\psi_1 + \beta\psi_2 = < \cdot, \alpha v_1 + \beta v_2 >$$

También tenemos que

$$(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2) \circ L = \alpha\psi_1 \circ L + \beta\psi_2 \circ L$$

de donde obtenemos que

$$< \cdot, L^{adj}(\alpha v_1 + \beta v_2) >= \alpha < \cdot, L^{adj}(v-1) > +\beta < \cdot, L^{adj}(v_2) >$$

□

Definición 18.0.4. — Sea $(V, <, >)$ un espacio unitario. Si $L \in \mathcal{L}(V, V)$, entonces $L^{adj} \in \mathcal{L}(V^*, V^*)$ es llamada la transformación adjunta de L.

No es dificil observar de la igualdad

$$< L(v), w >=< v, L^{adj}(w) >, \ \forall v, w \in V$$

que si $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de V, entonces

$$M(L^{adj}, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = {}^t\overline{M(L, \mathcal{B}, \mathcal{B})}$$

Ejercicio 50. — *Verificar que* $det(L^{adj}) = \overline{det(L)}$.

Definición 18.0.5. — Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión finita y sea $L \in V^*$.

(i) Si existe un producto Hermitiano positivo en V tal que $L^{adj} = L$, entonces diremos que L es Hermitiana.

(ii) Si existe un producto Hermitiano positivo definido en V tal que $L^{adj} = -L$, entonces diremos que L es anti-Hermitiana.

(iii) Sea $<, >$ un producto Hermitiano positivo en V. Si tenemos que

$$< L(v), L(w) >=< v, w >, \ \forall v, w \in V$$

entonces diremos que L es una transformación unitaria.

Teorema 18.0.6. —

1.- Sea $(V, <, >)$ *un espacio unitario. Si* $L \in \mathcal{L}(V, V)$ *es una transformación Hermitiana, entonces existe una base ortonormal* $\mathcal{B}$ *de* V *tal que*

$$M(L, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = {}^t\overline{M(L, \mathcal{B}, \mathcal{B})}$$

2.- Si $L \in \mathcal{L}(V,V)$ y existe una base $\mathcal{B}$ de V de manera que

$$M(L,\mathcal{B},\mathcal{B}) = {}^t\overline{M(L,\mathcal{B},\mathcal{B})}$$

entonces existe un producto Hermitiano positivo para el cual L es Hermitiana.

3.- Sea $(V,<,>)$ un espacio unitario. Si $L \in \mathcal{L}(V,V)$ es una transformación Hermitiana, entonces :

3.1.- $Spec_{\mathbb{C}}(L) \subset \mathbb{R}$.

3.2.- $Ker(L)$ y $Im(L)$ son ortogonales.

3.3.- $V = Ker(L) \oplus Im(L)$.

3.4.- Existe una base de V formada por vectores propios de L.

4.- Sea $(V,<,>)$ un espacio unitario. Si $L \in \mathcal{L}(V,V)$ es una transformación Hermitiana, entonces iL es anti-Hermitiana.

5.- Sea $(V,<,>)$ un espacio unitario. Si $L \in \mathcal{L}(V,V)$ es una transformación anti-Hermitiana, entonces iL es Hermitiana.

Demonstración. — La condición $L^{adj} = L$ más la igualdad

$$< L(v), w >=< v, L^{adj}(w) >, \ \forall v, w \in V$$

nos da 1.-

Si $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$, entonces

$$< \sum_{j=1}^{n} x_j v_j, \sum_{r=1}^{n} y_r v_r >= \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$$

define un producto Hermitiano positivo en V de manera que $L^{adj} = L$, de donde obtenemos 2.-

La propiedad 3.1., es consecuencia del hecho que si $\lambda \in Spec_{\mathbb{C}}(L)$ y $v \in V - \{0_V\}$ es vector propio asociado a λ, es decir, $L(v) = \lambda v$, entonces tenemos que

$$\lambda \|v\|^2 =< L(v), v >=< v, L^{adj}(v) >=< v, \lambda v >= \overline{\lambda}\|v\|^2$$

de donde $\lambda = \overline{\lambda}$, es decir, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Para obtener 3.2.-, observemos que si $v \in Ker(L)$, entonces para todo $w \in V$ tenemos que

$$< v, L(w) >=< v, L^{adj}(w) >=< L(v), w >=< 0_V, w >= 0$$

de donde vemos que $Ker(L)$ es ortogonal a $Im(L)$.

Propiedad 3.3.-, es consecuencia de 3.2.-, y el hecho que la suma de las dimensiones de $Ker(L)$ y de $Im(L)$ es la dimensión de V.

Veamos 4.-. Como χ_L tiene ceros en $\mathbb{C}$ y tenemos que $Spec_{\mathbb{C}}(L) \subset \mathbb{R}$, podemos escoger $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ que es valor propio de L. Sea $v_1 \in V$ un vector propio de L respecto al valor propio λ_1. Sea $W_1 =< v_1 >^{\perp}$. Ya que $< v_1 >$ es invariante por

L, también lo es W_1. Si $L_{W_1} : W_1 \to W_1$ denota la restricción de L a W_1, entonces se tiene que L_{W_1} sigue siendo Hermitiana. Ahora procedemos de manera inductiva.

4.- y 5.- son consecuencia del hecho que $(iL)^{adj} = -iL^{adj}$.

□

Teorema 18.0.7. — *Sea* $(V, <,>)$ *espacio unitario y* $L \in \mathcal{L}(V, V)$ *una transformación unitaria. Entonces :*

1.- L es un isomorfismo.

2.- $L^{adj} = L^{-1}$.

3.- $|\det(L)| = 1$.

4.- Si $\lambda \in Spec_{\mathbb{C}}$, *entonces* $|\lambda| = 1$.

5.- Existe una base de V formada sólo de vectores propios de L.

Demostración. — Si $v \in Ker(L)$, entonces $\|v\|^2 =< v, v >=< L(v), L(v) >=< 0_V, 0_V >= 0$, de donde obtenemos que L es inyectiva, y como V tienen dimensión finita, L es un isomorfismo. La propiedad 2.-, sale del hecho que $< L(v), w >=< v, L^{-1}(w) >$.

Como $\overline{det(L)} = det(L^{adj}) = det(L^{-1}) = det(L)^{-1}$, obtenemos 3.

Si $\lambda \in Spec_{\mathbb{C}}(L)$ y $v \in V$ es un vector propio asociado a λ, entonces

$$\lambda < v, v >=< L(v), v >=< v, L^{-1}(v) >= \overline{\lambda}^{-1} < v, v >$$

de donde $|\lambda|^2 = 1$.

La demostración de 5,- es similar a la hecha para 4,- del teorema anterior.

□

CAPÍTULO 19

FORMAS NORMALES : SITUACIÓN GENERAL

En el capítulo 17 hemos construido formas matriciales simples de ciertas transformaciones lineales sobre espacios vectoriales reales. En este capítulo daremos una idea general como encontrar formas matriciales simples de transformaciones lineales sobre cualquier cuerpo K de característica 0, es decir, cuerpos donde toda suma de un númerso finito de $1 \in K$ nunca es cero. Los espacios vectoriales serán asumidos tener dimensión finita ; esto para que tenga sentido buscar una representación maricial.

19.1. Algunos preliminares algebraicos

En esta sección recordaremos algunos hechos sobre el anillo de polinomios que ha sido estudiado en el curso de álgebra abstracta.

19.1.1. Anillos y subanillos. —

Definición 19.1.1. —

1.- Un *anillo* es por definición un triple $(R, +, \cdot)$ donde R es un conjunto no vacío y $+, \cdot : R \times R \to R$ son dos operaciones binarias sobre R, llamadas suma y multiplicación repectivamente, tales que :

(1) $(R, +)$ es un grupo abeliano ;

(2) vale la propiedad asociativa para la operación de multiplicación, es decir, para $r, s, t \in R$ se tiene

$$r \cdot (s \cdot t) = (r \cdot s) \cdot t$$

(3) para $r, s, t \in R$ vale la propiedad distributiva :

$$r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$$

$$(r + s) \cdot t = r \cdot t + s \cdot t$$

2.- Un subconjunto $S \subset R$, donde R es un anillo, es llamado un *subanillo de* R si S con las operaciones inducidas desde R resulta ser un anillo.

Ejemplo 19.1.2. — Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. El espacio vectorial $\mathcal{L}(V,V)$ es un anillo con las operaciones de suma y composición de funciones. También se dice que este es un ejemplo de un álgebra.

Definición 19.1.3. —

1.- Dados dos anillos $(R,+,\cdot)$ y $(S,+,\cdot)$, diremos que una función $h : R \to S$ es un *homomorfismo de anillos* si para todo par $r_1, r_2 \in R$ valen las siguientes :
(i) $h(r_1 + r_2) = h(r_1) + h(r_2)$
(ii) $h(r_1 r_2) = h(r_1)h(r_2)$

2.- Si el homomorfismo de anillos $h : R \to S$ es biyectiva, entonces decimos que es un *isomorfismo de anillos*, en cuyo caso decimos que los anillos son *anillos isomorfos*.

Definición 19.1.4. — Diremos que un subanillo S de un anillo R es un *ideal izquierdo* si para todo $r \in R$ vale que $rS \subset S$ y es un *ideal derecho* si para todo $r \in R$ vale que $Sr \subset S$. Un *ideal* es un subanillo que es ideal izquierdo y derecho. Un ideal S de R es llamado principal si existe $a \in S$ de manera que $S =< a >= \{ar; r \in R\}$.

Supongamos que tenemos un anillo $(R,+,\cdot)$ y $S \subset R$ un subanillo. Consideremos la relación de equivalencia dad por

$$r_1 \equiv r_2 \iff r_1 - r_2 \in S$$

Denotemos por R/S al conjunto de las clases de equivalencia y por $\pi : R \to R/S$ a la proyección natural.

Teorema 19.1.5. — *Sea S un subanillo de un anillo R. Entonces, R/S con las operaciones*

$$\pi(r_1 + r_2) = \pi(r_1) + \pi(r_2)$$

$$\pi(r_1)\phi(r_2) = \pi(r1r_2)$$

es un anillo sí y sólo si S es un ideal de R.

Teorema 19.1.6. — *Sea $\phi : R \to S$ un homomorfsimo de anillos, entonces*

$$Ker(\phi) = \{r \in R : \phi(r) = 0_S\}$$

es un ideal de R.

Demonstración. — Ya que $\{0\}$ es un ideal de R, basta que supongamos $Ker(\phi) \neq \{0\}$. Si $u \in Ker(\phi)$ y $v \in R$, entonces $\phi(uv) = \phi(u)\phi(v) = 0\phi(v) = 0$, luego, $uv \in Ker(\phi)$.

□

19.1.2. Anillo de polinomios. — El tipo de anillos en el cual estaremos interesados es el siguiente. Sea K un cuerpo y $x \notin K$ una variable. Formemos el conjunto $K[x]$ formado por todas las series

$$p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} r_j x^j$$

donde asumimos que sólo un número finito de los coeficientes $r_j \in K$ pueden ser diferente de cero. Llamamos a cada uno de esos objetos un *polinomio* con coeficientes en K y variable desconocida x. Al mayor valor $n\{0, 1, 2, ...\}$ tal que $r_n \neq 0$ le llamamos el *grado del polinomio* p(x) y lo denotamos por $grado\ p(x)$. Usualmente no escribimos los términos donde $r_j = 0$; por jemplo si $r_1 = 2$, $r_3 = 1$ y todos los demás $r_j = 0$, entonces escribimos este polinomio como $2x + x^3$. También acostumbramos a denotar $r_0 x^0$ como r_0. Definimos la suma de polinomios como

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} r_j x^j\right) + \left(\sum_{j=0}^{\infty} s_j x^j\right) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} (r_j + s_j) x^j\right)$$

y definimos el producto de polinomios como

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} r_j x^j\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} s_i x^i\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} r_j s_i\right) x^k\right)$$

Obtenemos de esta manera un anillo, llamado el *anillo de polinomios con coeficientes en el anillo K*.

Teorema 19.1.7. — *Sea K un cuerpo. Todo ideal de $K[x]$ es principal.*

Demonstración. — Ya que el ideal trivial $\{0\}$ es principal, basta que asumamos que S es un ideal de $K[x]$ con $S \neq \{0\}$. Sea $u(x) \in S$ de menos grado posible. Si $v(x) \in S$, entonces, por el agoritmo de la división, tenemos que existen polinomios $a(x), b(x) \in K[x]$ tales que

$$v(x) = a(x)u(x) + b(x),$$

donde $b(x) = 0$ ó bien $grado\ b(x) < a(x)$. Como $b(x) = v(x) - a(x)u(x) \in S$), y $u(x)$ fué escogido de grado minimal en S, debemos tener que $b(x) = 0$. Esto nos asegura que $v(x)$ está contenido en el ideal generado por $u(x)$, es decir, S está contenido en el ideal generado por $u(x)$. Ya que $u(x)ßnS$ y S es ideal, el ideal generado por $u(x)$ está contenido en S. Todo esto nos dice que S es igual al ideal generado por $u(x)$. □

Definición 19.1.8. — Sea K un cuerpo y $p(x) \in K[x] - K$. Si no es posible escribir $p(x)$ como producto de otros dos polinomios de grado positivo de $K[x]$, entonces decimos que $p(x)$ es irreducible.

Definición 19.1.9. — Sea K un cuerpo y $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in K[x]$, donde $a_n \neq 0$. Diremos que $p(x)$ es mónico si $a_n = 1$.

Teorema 19.1.10. — *Sea K un cuerpo y $p(x) \in K[x] - K$ un polinomio mónico. Entonces es posible escribir $p(x)$ como un producto finito de polinomios mónicos irreducibles. Además, tal descomposición es única módulo ordenamiento de los factores.*

19.2. Polinomios y transformaciones lineales

Supongamos que tenemos un espacio vectorial V, sobre un cuerpo K (el cual hemos asumido tiene característica 0) y tenemos una transformación lineal $L : V \to V$. Supondremos en el resto de este capítulo que que $L \neq 0$ (para la transformación trivial cualquier representación matricial es dada por la matriz trivial).

Usemos la siguiente notación :

$$L^0 = I$$

$$L^n = \underbrace{L \circ \cdots \circ L}_{n-veces}$$

Con la notación anterior, y el hecho que la suma y composición de transformaciones lineales es otra vez una transformación lineal, es claro que para cada polinomio

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in K[x]$$

podemos construir la función

$$p(L) = \sum_{j=0}^{n} a_j L^j \in \mathcal{L}(V, V)$$

es decir, tenemos una función

$$\widehat{L} : K[x] \to \mathcal{L}(V, V) : p(x) \mapsto p(L)$$

No es difícil ver que para $p(x), q(x) \in K[k]$ valen las igualdades

$$\widehat{L}(p(x) + q(x)) = \widehat{L}(p(x)) + \widehat{L}(q(x))$$

$$\widehat{L}(p(x)q(x)) = \widehat{L}(p(x)) \circ \widehat{L}(q(x))$$

Luego, tenemos que $\widehat{L}$ es de hecho un homomorfismo de anillos. De esta manera

$$Ker(\widehat{L}) = \{p(x) \in K[x] : P(L) = 0_{\mathcal{L}(V,V)}\}$$

es un ideal de $K[x]$. Como todo ideal de $K[x]$ es principal, existe un polinomio mónico $m_L[x] \in K[x]$ de manera que

$$Ker(\widehat{L}) = \{p(x)m_L(x) : p(x) \in K[x]\}$$

Definición 19.2.1. — El polinomio $m_L(x) \in K[x]$ es llamado el polinomio minimal de L.

Es claro de la definición de $m_L(x)$ las siguientes propiedades :

(1) $m_L(L) = 0$;

(2) si $p(x) \in K[x]$ es tal que $p(L) = 0$, entonces $p(x) = m_L(x)q(x)$ para cierto $q(x) \in K[x]$.

Observación 19.2.2. — Más adelante veremos que el polinomio característico $\chi_L(x)$ es divisible por el polinomio minimal $m_L(x)$ y que de hecho los ceros de $\chi_L(x)$ son los ceros de $m_L(x)$.

Ahora, también sabemos que tanto $K[x]$ como $\mathcal{L}(V, V)$ son espacios vectoriales sobre el cuerpo K. No es difícil ver que $\widehat{L}$ es una transformación lineal. Ahora, como estamos asumiendo que $dim_K V < \infty$, entonces $dim_K Im(\widehat{L}) < \infty$. Como tenemos un isomorfismo entre $K[x]/Ker(\widehat{L})$ y $Im(\widehat{L})$, y $dim_K K[x] = \infty$, la finitud de la dimensión de $Im(\widehat{L})$ nos asegura que $Ker(\widehat{L})$ tiene dimensión diferente de 0. En particular, como $L \neq 0$, debe ocurrir que $m_L(x)$ tiene grado mayor ó igual a 1.

Teorema 19.2.3. — *Bajo las condiciones anteriores, tenemos que*

$$dim_K Im(\widehat{L}) = grado\ m_L(x)$$

Demostración. — Supongamos que $grado\ m_L(x) = n \geq 1$. Entonces, se tiene que $\{1, x, x^2, ..., x^{n-1}\}$ es una base de $K[x]/Ker(\widehat{L})$. □

Teorema 19.2.4. — *Si $p(x) \in K[x]$, entonces*

$$Ker(p(L)) = \{v \in V : p(L)(v) = 0\}$$

es un subespacio de V que es invariante por L.

Demostración. — Sea $v \in Ker(p(L))$. Entonces

$$p(L)(L(v)) = L(p(L)(v)) = L(0) = 0$$

de donde obtenemos que $L(v) \in Ker(p(L))$. □

Ejemplo 19.2.5. —

$$Ker(p(L)) = V, \quad \text{para} \quad p(x) = 0.$$

$$Ker(p(L)) = \{0_V\}, \quad \text{para} \quad p(x) = 1.$$

$$Ker(p(L)) = Ker(L^n), \quad \text{para} \quad p(x) = x^n.$$

$$Ker(m_L(L)) = V.$$

19.2.1. Algunas propiedades. —

Teorema 19.2.6. — *Sean $f(x), g(x) \in K[x] - \{0\}$ tales que $f(x)$ divide a $m_L(x)$ y $g(x)$ divide $f(x)$ y $grado\ g(x) < grado\ f(x)$. Entonces,*

$$Ker(g(L)) < Ker(f(L)) \text{ (subespacio propio)}$$

Demostración. — Ya que $g(x)$ divide a $f(x)$, tenemos que $Ker(g(L)) < Ker(f(L))$. Ahora pasemos a ver que la contensión es estricta. Podemos escribir

$$m_L(x) = f(x) f_1(x)$$

$$f(x) = g(x) g_1(x),\ grado\ g_1(x) \geq 1$$

es decir,

$$m_L(x) = g(x) g_1(x) f_1(x)$$

Como $grado\ g_1(x) \geq 1$, tenemos que $grado\ g(x) f_1(x) < grado\ m_L(x)$, en particular, $m_L(x)$ no divide a $g(x) f_1(x)$, es decir, $g(x) f_1(x) \notin Ker(\widehat{L})$. De este modo, existe un vector $v \neq 0_V$ de manera que $g(L) \circ f_1(L)(v) \neq 0_V$. Sea $w = f_1(L)(v) \neq 0_V$. Tenemos que

$$f(L)(w) = f(L) \circ f_1(L)(v) = m_L(L)(v) = 0_V$$
$$g(L)(w) = g(L) \circ f_1(L)(v) \neq 0_V$$

□

Teorema 19.2.7. — *Sean $f(x), g(x) \in K[x] - \{0\}$ y $h(x) \in K[x]$ su máximo común divisor. Entonces*

$$Ker(h(L)) = Ker(f(L)) \cap Ker(g(L))$$

Demonstración. — Es claro que

$$Ker(h(L)) < Ker(f(L)) \cap Ker(g(L))$$

Sabemos que existen polinomios $a(x), b(x) \in K[x]$ tales que

$$h(x) = a(x)f(x) + b(x)g(x)$$

Luego, si $v \in Ker(f(L)) \cap Ker(g(L))$, entonces

$$h(L)(v) = a(L) \circ f(L)(v) + b(L) \circ g(L)(v) = 0_V$$

es decir

$$Ker(f(L)) \cap Ker(g(L)) < Ker(h(L))$$

□

Teorema 19.2.8. — *Sea $f(x) \in K[x] - \{0\}$. Si $h(x)$ es el máximo común divisor de $f(x)$ y $m_L(x)$, entonces $Ker(f(L)) = Ker(h(L))$.*

Demonstración. — Sea $h(x) \in K[x]$ el máximo común divisor de $f(x)$ y $m_L(x)$. Entonces tenemos que

$$Ker(h(L)) < Ker(f(L))$$

y que existen polinomios $a(x), b(x) \in K[x]$ tales que

$$h(x) = a(x)f(x) + b(x)m_L(x)$$

Ahora, si $v \in Ker(f(L))$, entonces tenemos que

$$h(L)(v) = a(L) \circ f(L)(v) + b(L) \circ m_L(L)(v) = 0_V$$

de donde

$$Ker(f(L)) < Ker(h(L))$$

es decir,

$$Ker(h(L)) = Ker(f(L))$$

□

Corolario 19.2.9. — *Sea $f(x) \in K[x] - \{0\}$. Entonces $Ker(f(L)) = \{0_V\}$ sí y sólo si $f(x)$ y $m_L(x)$ son relativamente primos, es decir, no existe un polinomio de grado positivo en $K[x]$ que divida tanto a $f(x)$ como a $m_L(x)$.*

Demonstración. — Si $f(x)$ y $m_L(x)$ son relativamente primos, entonces tenemos que

$$\{0_V\} = Ker(I) = Ker(f(L)) \cap \underbrace{Ker(m_L(L))}_{V} = Ker(f(L))$$

Reciprocamente, si $Ker(f(L)) = 0$ y $h(x)$ es el máximo común divisor de $f(x)$ y $m_L(x0$, entonces tenemos que

$$Ker(h(L)) = Ker(f(L)) \cap Ker(m_L(L)) = \{0_V\} = Ker(I)$$

De esta manera, el teorema 19.2.6 nos dice que 1 no puede ser un divisor estricto de $h(x)$, una contradicción.

□

Teorema 19.2.10. — *Sean $p(x), q(x) \in K[x]-K$ polinomios. Si $r(x) \in K[x]$ es su mínimo común multiplo, entonces todo vector de $Ker(r(L))$ se puede escribir como suma de un vector de $Ker(p(L))$ con un vector de $ker(q(L))$.*

Demonstración. — Ya que $p(x)$ y $q(x)$ dividen $r(x)$, tenemos que

$$Ker(p(L)), Ker(q(L)) < Ker(r(L))$$

Ahora, podemos escribir

$$r(x) = p(x)p_1(x) = q(x)q_1(x)$$

donde $p_1(x), q_1(x) \in K[x]$ son polinomios relativamente primos, es decir, no hay un polinomio de grado positivo que les divida a ambos. Esto nos asegura la existencia de polinomios $a(x), b(x) \in K[x]$ de manera que

$$a(x)p_1(x) + b(x)q_1(x) = 1$$

Luego,

$$a(L) \circ p_1(L) + b(L) \circ q_1(L) = I$$

Esta última igualdad nos dice que todo vector $v \in V$ puede escribirse como

$$v = v_1 + v_2$$

donde

$$v_1 = a(L) \circ p_1(L)(v), \quad v_2 = b(L) \circ q_1(L)(v).$$

En el caso particular que $v \in Ker(r(x))$, tenemos que

$$p(L) \circ p_1(L)(v) = q(L) \circ q_1(L)(v) = 0_V$$

y luego,

$$p(L)(v_1) = q(L)(v_2) = 0_V,$$

es decir,

$$v_1 \in Ker(p(L)),\ v_2 \in Ker(q(L)).$$

□

Teorema 19.2.11. — *Sean $p(x), q(x) \in K[x] - K$ polinomios relativamente primos, es decir, no existe un polinomio de grado positivo que divida a ambos. Entonces*

$$Ker(p(L) \circ q(L)) = Ker(p(L)) \oplus Ker(q(L))$$

Demonstración. — En este caso, el mínimo comúm múltiplo entre $p(x)$ y $q(x)$ es $r(x) = p(x)q(x)$. Por el teorema 19.2.10 tenemos que todo vector de $Ker(p(L) \circ q(L))$ se puede escribir como suma de un vector de $Ker(p(L))$ con un vector de $ker(q(L))$. Ahora, como el máximo común divisor entre $p(x)$ y $q(x)$ es 1, tenemos por el teorema 19.2.7 que $Ker(p(L)) \cap Ker(q(L)) = Ker(I) = \{0_V\}$. □

Un consecuencia directa del anterior es el siguiente.

Teorema 19.2.12. — *Sea $p_1(x), ..., p_r(x) \in K[x] - K$ polinomios relativamente primos, entonces*

$$Ker(p_1(L) \circ p_2 \circ \cdots \circ p_r(L)) = Ker(p_1(L)) \oplus Ker(p_2(L)) \oplus \cdots \oplus Ker(p_r(L))$$

19.2.2. Valores propios. — Sea $\lambda \in K$ un valor propio de L y consideremos el polinomio $q_\lambda(x) = x - \lambda \in K[x]$. Por la definición, existe un vector propio $v \neq 0_V$ asociado a λ, es decir, $L(v) = \lambda v$. Esto nos dice que $Ker(q_\lambda(L)) \neq \{0_V\}$.

Como tenemos que $Ker(q_\lambda(L)) \neq \{0_V\}$, el corolario 19.2.9 nos dice que existe un polinomio de grado positivo que divide tanto a $q_\lambda(x)$ como a $m_L(x)$, Pero $q_\lambda(x)$ es de grado uno y mónico, luego debemos tener que $q_\lambda(x)$ divide a $m_L(x)$. En otras palabras, de entre los factores irreducibles mónicos de $m_L(x)$ están los polinomios $x - \lambda$, donde $\lambda \in K$ recorre todos los valores propios de L en K.

19.2.3. Descomposición en subespacios generalizados. — Consideremos la descomposición en sus diferentes factores irreducibles del polinomio minimal

$$m_L(x) = p_1(x)^{a_1} \cdots p_r(x)^{a_r}$$

donde $p_j(x) \in K[x]$ son polinomios mónicos irreducibles y $a_j \in \{1, 2, ...\}$.

Recordemos de la sección anterior que si $\lambda \in K$ es un valor propio de L, entonces uno de esos polinomios $p_j(x)$ debe ser igual a $x - \lambda$.

Definición 19.2.13. — Bajo las condiciones anteriores, el subespacio $Ker(p_j^{a_j}(L))$ es llamado un subespacio generalizado de L.

Teorema 19.2.14. — *Cada subespacio generalizado de L resulta ser invariante por L.*

Demonstración. — Sea $v \in Ker(p_j^{a_j}(L))$. Entonces

$$p_j^{a_j}(L)(L(v)) = L(p_j^{a_j}(L)(v)) = L(0) = 0$$

de donde obtenemos que $L(v) \in Ker(p_j^{a_j}(L))$.

□

La descomposición de $m_L(x)$ en sus factores irreducibles nos permite hacer una descomposición del espacio vectorial V en suma directa de los subespacios generalizados de L, como consecuencia del teorema 19.2.12.

Teorema 19.2.15. — *En la condición anterior tenemos que*

$$V = Ker(p_1^{a_1}(L)) \oplus Ker(p_2^{a_2}(L)) \oplus \cdots \oplus Ker(p_r^{a_r}(L))$$

Más aún, el polinomio minimal de la restricción

$$L : Ker(p_j^{a_j}(L)) \to Ker(p_j^{a_j}(L))$$

es dado por $p_j^{a_j}(x)$.

La descomposición anterior nos dice que si escogemos una base de $Ker(p_j^{a_j}(L))$, por cada $j = 1, ..., r$, entonces la unión de ellas es una base $\mathcal{B}$ de V con la cual la matriz asociada a L tendrá la forma

$$M(L, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & A_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_r \end{pmatrix}$$

donde A_j es una matriz cuadrada de tamaño igual a $dim_K Ker(p_j^{a_j}(L))$.

19.2.4. Reducción al caso irreducible. — De esta manera, podemos asumir el caso en que el polinomio minimal es de la forma

$$m_L(x) = p^a(x)$$

donde $a \in \{1, 2, ..\}$ y $p(x) \in K[x]$ es un polinomio mónico irreducible. Si logramos encontrar una base donde la matriz quede de manera sencilla, entonces, en el caso general, basta con usar esto en cada subespacio invariante que nos dá el teorema 19.2.15.

19.2.4.1. Construcción de subespacios invariantes cíclicos. — Consideremos un vector $v \in V - \{0_V\}$ y los vectores

$$v, L(v), L^2(v), ...$$

Ya que $dim_K V < \infty$, existe un entero $m \in \{1, 2, 3, ...\}$ de manera que

$$\mathcal{B} = \{v, L(v), ..., L^m(v)\}$$

es un conjunto linealmente independiente, pero que

$$\{v, L(v), ..., L^{m+1}(v)\}$$

es un conjunto linealmente dependiente. Denotemos por $V_{v,L}$ al subespacio generado por $\mathcal{B}$.

Definición 19.2.16. — El subespacio $V_{v,L}$ arriba construido es llamado un subespacio cíclico de V para L.

De la construcción hecha es claro el siguiente hecho.

Teorema 19.2.17. — *El subespacio cíclico $V_{v,L}$ es invariante por L. Si $\mathcal{B} = \{v, L(v), ..., L^m(v)\}$ es una base de $V_{v,L}$, entonces para $m \geq 2$ tenemos que*

$$M(L, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & * \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

y para $m = 1$, es decir, cuando $v \in V$ es vector propio asociado aun valor propio $\lambda \in Spec_K(L)$, tenemos que

$$M(L, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = (\lambda)$$

Por cada vector $v \in V$ podemos construir la transformación lineal siguiente

$$\sigma_v : K[x] \to V : p(x) \mapsto p(L)(v)$$

Ejercicio 51. — $Im(\sigma_v) = V_{v,L}$.

Teorema 19.2.18. — *Existe un vector $v \in V$ de manera que $Ker(\sigma_v) = Ker(\widehat{L})$.*

Demonstración. — Es claro que $Ker(\widehat{L}) < Ker(\sigma_v)$, para cualquir $v \in V$. Recordemos que estamos asumiendo $m_L(x) = p^a(x)$, donde $a \in \{1, 2, ..\}$ y $p(x) \in K[x]$ es un polinomio mónico irreducible. Tenemos que existe un vector $v \in V$ de manera que $p^{a-1}(L)(v) \neq 0_V$. Sea $q(x) \in Ker(\sigma_v)$. Si $h(x)$ es el máximo común divisor de $q(x)$ y $m_L(x)$, entonces por el teorema 19.2.8 tenemos que $v \in Ker(q(L)) = Ker(h(L))$. Como $h(x)$ divide $m_L(x) = p(x)^a$ y $p(x)$ es irreducible, debemos tener que $h(x) = p^b(x)$, donde $b \in \{0, 1, ..., a\}$. De esta manera, $p^b(L)(v) = 0_V$. Ahora, la condición anterior $p^{a-1}(L)(v) \neq 0_V$ nos asegura que $b = a$, es decir, $h(x) = m_L(x)$ y luego, $q(x) \in Ker(\widehat{L})$ como queríamos.

□

Teorema 19.2.19. — *Existe un vector $v \in V - \{0_V\}$ de manera que*

$$dim_K V_{v,L} = grado\ m_L(x)$$

Demonstración. — Sabemos, por el teorema 19.2.18, de la existencia de un vector $v \in V$ de manera que $Ker(\sigma_v) = Ker(\widehat{L})$. De esta manera, tenemos que σ_v induce un isomorfismo entre $K[t]/Ker(\widehat{L})$ y $Im(\sigma_v) = V_{v,L}$. □

Teorema 19.2.20. — *Tenemos que $grado\ m_L(x) \leq dim_K V$. Además, la igualdad ocurre sí y sólo si $V = V_{v,L}$ algún $v \in V$.*

Demonstración. — Como consecuencia del teorema 19.2.19 tenemos que $grado\ m_L(x) \leq dim_K V$. Además, si $V = V_{v,L}$, entonces tenemos la igualdad. Por otro lado, si suponemos que $grado\ m_L(x) = dim_K V$, entonces por el teorema 19.2.19 existe un subespacio cíclico $V_{v,L} < V$ con $dim_K V_{v,L} = grado\ m_L(x)$; luego, $V = V_{v,L}$. □

Teorema 19.2.21. — *Si $V_{v,L}$ es un subespacio cíclico de V respecto a L, entoces el polinomio minimal de $L : V_{v,L} \to V_{v,L}$ es también $m_L(x)$ sí y sólo si $dim_K V_{v,L} = grado\ m_L(x)$.*

Demonstración. — Es claro que el polinomio minimal de $L : V_{v,L} \to V_{v,L}$, digamos $n(x)$, debe dividir $m_L(x)$ ya que $m_L(L) = 0$. Como consecuencia del teorema 19.2.20 tenemos que $dim_K V_{v,L} = grado\ n(x)$. De esta manera, tenemos que $n(x) = m_L(x)$ sí y sólo si $grado\ m_L(x) = grado\ n(x) = dim_K V_{v,L}$.

□

19.2.4.2. Descomposición en subespacios cíclicos. — Ahora procedemos a nuestra segunda descomposición ; primero hemos descompuesto V en suma directa de subespacios generalizados y ahora cada subespacio generalizado es descompuesto en subespacios cíclicos.

Teorema 19.2.22. — *Existen subespacios cíclicos V_1,..., V_r de V de manera que*

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$

Demonstración. — Primero escogemos un subespacio cíclico $V_1 < V$ tal que $dim_K V_1 = grado\ m_L(x)$, cuya existencia es dad por el teorema 19.2.19. Luego hay que buscar un subespacio $W < V$ de manera que $V = V_1 \oplus W$ y tal que W sea invariante por L. Luego, procedemos con W de la misma manera como lo hemos hecho para V. Ya que la dimensión de V es finita, este proceso termina después de un número finito de pasos.

Así, nuestro problema es como encontrar tal subespacio invariante W. La idea es la siguiente. Consideramos la transformación lineal L restricta a V_1

$$L_1 : V_1 \to V_1$$

cuyo polinomio minimal sigue siendo $m_L(x)$, y también consideramos la transformación dual de $L : V \to V$

$$L^* : V^* \to V^* : \phi \mapsto \phi \circ L$$

Recordemos que tenemos la dualidad

$$<,>: V \oplus V^* \to K : (v, \phi) \mapsto < v, \phi >= \phi(v)$$

El espacio $V_1^\perp < V^*$ es invariante por L^* y podemos considerar la transformación lineal

$$L_1^* : V^*/V_1^\perp \to V^*/V_1^\perp$$

la cual resulta ser dual a L_1 respecto a la dualidad

$$<,>: V_1 \oplus V^*/V_1^\perp \to K : (v, \phi) \mapsto < v, \phi >= \phi(v)$$

Tenemos que, por el teorema 19.2.21, que $dim_K V^*/V_1^\perp = dim_K V_1 = grado\ m_L(x)$. Como consecuencia del teorema 19.2.20 obtenemos que $V^*/V_1^\perp$ es un subespacio cíclico respecto a L_1^*.

Consideremos la proyección natural

$$\pi : V^* \to V^*/V_1^\perp$$

y sea $v^* \in V^*$ tal que $\pi(v^*)$ genera el subespacio cíclico $V^*/V_1^\perp$.

Se puede verificar que (denotando por $m = grado\ m_L(x)$, que

$$\{v^*, L_1^*(v^*), ..., (L_1^*)^{d-1}(v^*)\}$$

es un conjunto linealmente independiente. Consideremos el subespacio cíclico $V^*_{v^*,L^*}$. Entonces, tenemos que

$$dim_K V^*_{v^*,L^*} \geq grado\ m_L(x)$$

pero como sabemos, por el teorema 19.2.20, que

$$grado\ m_L(x) \leq dim_K V^*_{v^*,L^*}$$

obtenemos la igualdad

$$dim_K V^*_{v^*,L^*} = grado\ m_L(x)$$

Como consecuencia de esta igualdad, tenemos que

$$\pi : V^*_{v^*,L^*} \to V^*/V_1^\perp$$

es inyectiva, y como consecuencia, tenemos que

$$V^*_{v^*,L^*} \cap \underbrace{V_1^\perp}_{Ker(\pi)} = \{0_V\}$$

Ya que

$$dim_K V^*_{v^*,L^*} + dim_K V_1^\perp = grado\ m_L(x) + (dim_K V - \underbrace{dim_K V_1}_{grado\ m_L(x)}) = dim_K V$$

obtenemos que

$$V^* = V^*_{v^*,L^*} \oplus V_1^\perp$$

De esta manera, obtenemos que

$$V = (V^*_{v^*,L^*})^\perp \oplus V_1$$

Ya que $V^*_{v^*,L^*}$ es invariante por L^*, obtenemos que $W = (V^*_{v^*,L^*})^\perp$ es invariante por L.

□

19.2.5. Resumiendo lo anterior. — Supongamos que tenemos un espacio vectorial V, sobre un cuerpo K (el cual hemos asumido tiene característica 0) y tenemos una transformación lineal $L : V \to V$, $L \neq 0$ (para la transformación trivial cualquier representación matricial es dada por la matriz trivial).

Calculamos su polinomio minimal $m_L(x) \in K[x]$, el cual es el polinomio mónico de grado menor con la propiedad que $m_L(L) = 0$.

Hacemos a descomposición de $m_L(x)$ en sus factores irreducibles

$$m_L(x) = p_1(x)^{a_1} \cdots p_r(x)^{a_r}$$

donde $p_j(x) \in K[x]$ son polinomios mónicos irreducibles y $a_j \in \{1, 2, ...\}$.

Si $\lambda \in K$ es un valor propio de L, entonces uno de esos polinomios $p_j(x)$ debe ser igual a $x - \lambda$.

Consideramos la descoposición en subespacios generalizados

$$V = Ker(p_1^{a_1}(L)) \oplus Ker(p_2^{a_2}(L)) \oplus \cdots \oplus Ker(p_r^{a_r}(L))$$

El polinomio minimal de la restricción

$$L : Ker(p_j^{a_j}(L)) \to Ker(p_j^{a_j}(L))$$

es dado por $p_j^{a_j}(x)$. La descomposición anterior nos dice que si escogemos una base de $Ker(p_j^{a_j}(L))$, por cada $j = 1, ..., r$, entonces la unión de ellas es una base $\mathcal{B}$ de V con la cual la matriz asociada a L tendrá la forma

$$M(L, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & A_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_r \end{pmatrix}$$

donde A_j es una matriz cuadrada de tamaño igual a $dim_K Ker(p_j^{a_j}(L))$.

Ahora, cada subespacio generalizado se descompone en suma directa de subespacios cíclicos, de manera que cada matriz A_j queda dada como

$$A_j = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & B_{s_j-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{s_j} \end{pmatrix}$$

donde cada matriz B_k tiene la forma siguiente : si B_k tiene tamaño mayor ó igual a 2, entonces

$$B_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & * \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

y si B_k tiene tamaño 1, entonces

$$B_k = (\lambda)$$

donde $\lambda \in Spec_K(L)$.

Observación 19.2.23. — Uno puede descomponer cada subespacio cíclico en suma directa de más subespacios cíclicos invariante de manera que cada matriz B_k puede ser escrita como bloques diagonales más pequeños.

Supongamos que ya tenemos una descomposición de V en subespacios cíclicos invariantes con la propiedad que cada uno de ellos no pueda ser escrito como suma directa de otros subespacios propios invariantes por L.

Definición 19.2.24. — Un subespacio $W < V$ que es invariante por L es llamado irreducible si no es posible escribir $W = U \oplus Z$, donde $U, Z < W$ son ambos invariantes por L y ambos no-triviales.

Teorema 19.2.25. — *Sea $W <$ un subespacio irreducible el cual es invariante por L. Si el polinomio minimal de $L : W \to W$ es de la forma*

$$m(x) = (x - \lambda)^a$$

entonces $\lambda \in Spec_K(L)$ y existe una base $\mathcal{B}$ de W de manera que

$$M(L, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Ejercicio 52. — *Encontrar las formas matriciales simples para el caso en que V sea :*

(i) un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ *de dimensión finita ;*
(ii) un espacio vectorial sobre $\mathcal{R}$ *de dimensión* 2.

Ejercicio 53. — *Usar las formas normales simples para verificar que el polinomio característico es divisible por el polinimio minimal y que tienen los mismo ceros.*

REFERENCIAS

[1] W. Greub. *Linear Algebra*. GTM **23**, Springer-Verlag, 1981.

[2] K. Hoffman and R. Kunze. *Linear Algebra*. Prentice-Hall Inc., 1961.

[3] S. Lang. *Linear Algebra*. Addison Wesley, 1970.

INDICE

Rubén A. Hidalgo es actualmente profesor del Departamento de Matemática y Estadística de la Universidad de La Frontera. Es miembro del *Grupo de Geometría Compleja de Chile*, y su principal interés es el estudio de superficies de Riemann y grupos Kleinianos. Obtuvo su Ph.D. en Matemáticas el año 1991 en la State University of New York (SUNY) at Stony Brook, NY, USA, y su Habilitación en el año 1994 en la Universitaet Bielefeld, Bielefeld, Alemania.

ISBN XXXXXXXXXX