

DESSINS D'ENFANTS
DIBUJOS DE NIÑOS



Rubén A. Hidalgo

Temuco — Chile

Rubén A. Hidalgo

DESSINS D'ENFANTS

DIBUJOS DE NIÑOS

Rubén A. Hidalgo

Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de La Frontera,
Temuco, Chile.

E-mail : `ruben.hidalgo@ufrontera.cl`

Url : `http://dme.ufro.cl/rhidalgo/`

Clasificación matemática por tema (2000). — 14H30, 14H10, 30F10.

Palabras claves. — Dessins d'enfants, curvas de Belyi, superficies de Riemann, grupo absoluto de Galois, curvas reales, superficies de Riemann simétricas.

Proyectos FONDECYT 1150003, 1190001.

DESSINS D'ENFANTS

DIBUJOS DE NIÑOS

Rubén A. Hidalgo

A Betty, Cata y Puckn

INTRODUCCIÓN

La génesis de esta monografía parte de la idea de organizar y completar (en parte) las notas usadas una serie de seminarios dictados a estudiantes del programa de Magister en Matemáticas de la Universidad Técnica Federico Santa María en el periodo 2008-2010. Esos seminarios tenían como objetivo principal presentar ciertas relaciones entre objetos combinatorios, llamados *dessins d'enfants* (dibujos de niños), con aspectos analíticos (superficies de Riemann), geometría hiperbólica, curvas algebraicas, teoría de números y teoría de Galois.

B. Riemann observó que toda superficie de Riemann compacta se puede ver como una curva algebraica compleja irreducible y suave (aunque podemos aceptar cierto tipo de singularidades; por ejemplo nodos). De esta manera, nos podemos preguntar cuando es posible escoger tal curva definida sobre el cuerpo de los números algebraicos $\overline{\mathbb{Q}}$; tales tipos de curvas son llamadas curvas de Belyi.

En 1979, aproximadamente, Belyi [2] mostró que una superficie de Riemann compacta S se puede representar por una curva de Belyi si y sólo si existe una función meromorfa $\beta : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ con a lo más tres valores de ramificación, los cuales podemos asumir estar contenidos en $\{\infty, 0, 1\}$; estas funciones son llamadas funciones de Belyi.

Ahora, dada una función de Belyi $\beta : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, podemos considerar la preimágen por β del intervalo $[0, 1]$. Si pintamos de color negro las preimágenes de 0 y de color blanco las preimágenes de 1, entonces obtenemos un grafo bipartito en S . De hecho, se tiene que cada una de las componentes conexas del complemento de $\beta^{-1}([0, 1])$ es homeomorfo a un disco (es decir, obtenemos un mapa bipartito en S). Grothendieck (*Esquisse d'un Programme* [16]) llamó a tales mapas bipartitos *dessins d'enfants* (dibujos de niños).

De manera recíproca, cada dessin d'enfant (dibujo de niño) define una estructura de superficie de Riemann S , única módulo isomorfía, y una función de Belyi $\beta : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ tal que el dessin d'enfants original se obtiene como preimagen por β del intervalo $[0, 1]$ (salvo homotopía).

Dessins d'enfants (sin este nombre) ya aparecían en trabajos de F. Klein en el siglo 19 para construir superficies de Riemann admitiendo ciertos cubrimientos ramificados sobre la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$.

La existencia de una función de Belyi $\beta : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ de grado d es equivalente a la existencia de un subgrupo de índice d de un grupo Fuchsiano triangular (de hecho del grupo $\Gamma(2)$).

Todo lo anterior permite ver una relación natural entre objetos combinatorios simples (dessins d'enfants), objetos analíticos (funciones de Belyi) y objetos geométricos (grupos Fuchsianos).

Uno de los grupos más interesante en varias áreas de la matemática es el grupo absoluto de Galois $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Este grupo es un grupo profinito ya que es el límite inverso de los grupos de Galois finitos $\text{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$, es decir, este grupo codifica la teoría clásica de Galois (además, la teoría de representaciones de este grupo juega un rol importante en la demostración del Teorema de Fermat dada por Wiles). Desafortunadamente, su estructura es aún un misterio. Como es lo usual, uno busca acciones fieles de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sobre objetos que tienen alguna estructura simple para poder encontrar información sobre su estructura de grupo. Alguna vez escuché de un matemático mexicano la siguiente frase : “ Los grupos, así como a los hombres, se les conocen por sus acciones”.

Existe una acción natural de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sobre curvas de Belyi (al ser estas definibles sobre cuerpos de números); luego, una acción de este grupo sobre los dessins d'enfants (objetos combinatoriales). Grothendieck notó [16] que esta acción es fiel a nivel de dessins d'enfants de género 1; luego Schneps [36] verificó que la acción es fiel a nivel de dessins d'enfants de género 0. González-Diez y Gironde [14, 15] se dieron cuenta que la acción también es fiel a nivel de curvas hiperelípticas de cualquier género. Usando ciertas curvas no-hiperelípticas, llamadas curvas de Fermat generalizadas, se puede verificar que la acción es también fiel sobre ellas [19].

Para entender la acción de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ en los dessins d'enfants es necesario buscar invariantes que permitan decidir cuando dos de ellos están en la misma órbita por tal acción (y aún más, decidir si estos son isomorfos o no). Algunos invariantes son conocidos, tales como el género, los grados en los vértices de cada color, los grupos de automorfismos. Por desgracia,

estos no son suficientes como para detectar si dos dessins d'enfants son o no equivalentes.

El objetivo principal de esta monografía es dar una introducción a la teoría de los dessins d'enfants, intentar explicar la acción de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sobre estos objetos e intentar explicar el rol unificador entre superficies de Riemann, teoría de Galois, teoría de números algebraicos y geometría hiperbólica plana. Como caso particular, veremos un link con el caso de curvas reales y dessins d'enfants reales.

Una lista de referencias son dadas, la cual está por lejos de ser exhaustiva, pero que puede ayudar al principiante en el entendimiento de este tema.

Finalmente, quiero agradecer a Mariela Carvacho, Pilar Johnson, Saúl Quispe, Sebastián Reyes-Carocca y María Elisa Valdés quienes participaron de los seminarios originales y quienes han aportando con sugerencias y reparos en las versiones iniciales.

Rubén A. Hidalgo
Departamento de Matemática y Estadística
Universidad de La Frontera
2020
Temuco – Chile

TABLA DE MATERIAS

Introducción	ix
1. El Lema de Schwarz y Automorfismos	1
1.1. El Lema de Schwarz	1
1.2. Automorfismos del disco unitario y semiplano superior	2
1.3. Automorfismos del plano complejo	3
2. Superficies de Riemann y curvas algebraicas complejas	7
2.1. Variedades topológicas	7
2.2. Variedades diferenciables	8
2.3. Teorema de clasificación de superficies	9
2.4. Superficies de Riemann	11
2.5. Superficies de Riemann son superficies orientables	11
2.6. Primeros ejemplos de superficies de Riemann	12
2.7. Curvas algebraicas complejas	13
2.8. Funciones holomorfas/anti-holomorfas	15
2.9. Formas meromorfas/holomorfas en superficies de Riemann ...	18
2.10. Superficies de Riemann son curvas algebraicas	19
2.11. Fórmula de Riemann-Hurwitz	27
2.12. Automorfismos de superficies de Riemann	30
3. El Teorema del Descenso de Weil	35
3.1. Cuerpos de definición de superficies de Riemann	35
3.2. Cuerpos de móduli de superficies de Riemann	35
3.3. El teorema del descenso de Weil	37
4. Superficies de Riemann Reales	41
4.1. Superficies de Riemann reales	41
4.2. Condición necesaria y suficiente para ser superficie de Riemann real	41
4.3. Ejemplos	43
5. Curvas de Belyi	45

5.1. Curvas de Belyi, funciones de Belyi y pares de Belyi	45
5.2. Teorema de Belyi	48
5.3. Equivalencia de pares de Belyi	48
5.4. Automorfismos de pares de Belyi	49
5.5. Par de Belyi regular	49
5.6. Pares de Belyi reales	49
5.7. Acción del grupo absoluto de Galois sobre pares de Belyi	50
6. Uniformización	53
6.1. Grupos Kleinianos	53
6.2. Lema de Selberg	55
6.3. Teoremas de uniformización	55
6.4. Grupos Fuchsianos	56
6.5. Grupos triangulares	57
6.6. Grupos triangulares y curvas de Belyi	59
7. Acción de Grupos y $\text{Aut}(\mathfrak{S}_n)$	63
7.1. Acción de Grupos	63
7.2. Automorfismos de \mathfrak{S}_n	66
8. Grafos y Grafos Bipartitos	69
8.1. Grafos	69
8.2. Dibujando grafos en superficies compactas orientables : mapas	70
8.3. Fórmula de Euler	72
8.4. Conjeturas SE y CDC	73
8.5. Matriz de adyacencia de grafos finitos	73
8.6. Grafos bipartitos	75
8.7. Una descripción permutacional de grafos bipartitos finitos	77
8.8. Una equivalencia	78
8.9. Una observación de conteo	79
9. Dessins d'enfants : Dibujos de niños	81
9.1. Dessins d'enfants : Dibujos de niños	81
9.2. La signatura de un dessin d'enfant	81
9.3. Dessin d'enfant limpio	82
9.4. Valencia (pasaporte) de un dessin d'enfant	83
9.5. Cubrimientos ramificados asociados a un dessin d'enfant	83
9.6. Equivalencia de dessins d'enfants	84
9.7. Automorfismos de dessins d'enfants	84
9.8. Dessins d'enfants y pares de Belyi	86
9.9. Acción del grupo absoluto de Galois en dessins d'enfants	88
9.10. El grupo de monodromía de un dessin d'enfant	89
9.11. El grupo de automorfismos de un dessin d'enfant por medio de permutaciones	97
9.12. Uniformización de dessins d'enfants	99

9.13. Dessins d'enfants reales	100
9.14. Ejemplos de dessins d'enfants de género cero	101
9.15. Funciones de Belyi de género cero y dinámica racional	106
Referencias	111
Indice	115

CAPÍTULO 1

EL LEMA DE SCHWARZ Y AUTOMORFISMOS

1.1. El Lema de Schwarz

Uno de los resultados más usados en la teoría de una variable compleja (por ejemplo, grupos Kleinianos, superficies de Riemann y dinámica compleja) es el Lema de Schwarz, el cual nos dice que toda función analítica del disco unitario en si mismo decrece distancias. Consideremos el disco unitario

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Lema 1.1.1 (Lema de Schwarz). — Sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una función analítica tal que $f(0) = 0$. Entonces

1. $|f(z)| \leq |z|$; para cada $z \in \mathbb{D}$;
2. $|f'(0)| \leq 1$.

Más aún si tenemos igualdad en (1) para cierto $z \neq 0$ o bien en (2), entonces $f(z) = e^{i\theta}z$ para cierto $\theta \in \mathbb{R}$.

Demostración. — Supongamos que f no es una función constante ya que en ese caso $f(z) = 0$ y el resultado es trivial. Consideremos la función siguiente :

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \neq 0 \\ f'(0), & z = 0. \end{cases}$$

Notemos que g es una función analítica en $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ y continua en $z = 0$; luego analítica en todo \mathbb{D} .

Sea $z \in \mathbb{D}$ y $r \in (|z|, 1)$. Si w pertenece al círculo $C_r = \{w \in \mathbb{C} : |w| = r\}$, entonces tenemos que $|g(w)| \leq 1/r$. Luego, el Teorema del Módulo Máximo nos asegura que $g(z) \leq 1/r$. Haciendo tender r a 1 obtenemos

que $|g(z)| \leq 1$, de donde obtenemos (1) y (2). El mismo Teorema del Módulo Máximo nos dice que si existe un valor de $z_0 \in \mathbb{D}$ donde $|g(z_0)| = 1$, entonces existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $g(z) = e^{i\theta}$. \square

1.2. Automorfismos del disco unitario y semiplano superior

Una aplicación del lema de Schwarz es el cálculo de los automorfismos analíticos (o automorfismos holomorfos) del disco unitario.

Teorema 1.2.1 (Automorfismos de \mathbb{D}). — *Los automorfismos analíticos del disco unitario \mathbb{D} son de la forma*

$$A(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

y los automorfismos antianalíticos de \mathbb{D} son de la forma

$$A(z) = e^{i\theta} \frac{\bar{z} - \alpha}{1 - \alpha z}$$

donde $\alpha \in \mathbb{D}$ y $\theta \in \mathbb{R}$.

Demostración. — Sea A un automorfismo analítico de \mathbb{D} y $\alpha = A^{-1}(0)$. Como

$$T(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

resulta ser un automorfismo analítico de \mathbb{D} , se tiene que $B = T \circ A^{-1}$ sigue siendo un automorfismo analítico de \mathbb{D} tal que $B(0) = 0$. El Lema de Schwarz nos asegura que $|B(z)| \leq |z|$ para cada $z \in \mathbb{D}$. Pero también podemos usar el lema de Schwarz en B^{-1} , con lo cual obtenemos que $|B^{-1}(z)| \leq |z|$ para cada $z \in \mathbb{D}$. De esta manera, $|B(z)| = |z|$ para cada $z \in \mathbb{D}$ y, por el mismo Lema de Schwarz, obtenemos que $B(z) = e^{-i\theta}$ para algún $\theta \in \mathbb{R}$.

Ahora, sea A un automorfismo antianalítico de \mathbb{D} . Como $J(z) = \bar{z}$ es un automorfismo antianalítico de \mathbb{D} , obtenemos que $A \circ J$ es un automorfismo analítico de \mathbb{D} . \square

Se puede observar que el conjunto de los automorfismos analíticos y antianalíticos del disco unitario con la operación de composición de funciones resulta ser un grupo, denotado por el símbolo $\text{Aut}(\mathbb{D})$; al subgrupo (de índice dos) de automorfismos analíticos lo denotaremos por $\text{Aut}^+(\mathbb{D})$.

Como la transformación de Möbius

$$H(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

es un biholomorfismo entre el semiplano superior

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$$

y el disco unitario, se tiene que

$$\text{Aut}(\mathbb{H}) = H \circ \text{Aut}(\mathbb{D}) \circ H^{-1}$$

$$\text{Aut}^+(\mathbb{H}) = H \circ \text{Aut}^+(\mathbb{D}) \circ H^{-1}$$

de donde se obtiene el siguiente.

Teorema 1.2.2 (Automorfismos de \mathbb{H}). — *Los automorfismos analíticos del semiplano superior \mathbb{H} son de de la forma*

$$A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

y los automorfismos antianalíticos del semiplano superior \mathbb{H} son de de la forma

$$A(z) = \frac{-a\bar{z} + b}{-c\bar{z} + d}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc = 1$.

El resultado anterior nos dice, en particular, que los grupos $\text{Aut}^+(\mathbb{H})$ y $\text{Aut}^+(\mathbb{D})$ son ambos isomorfos con el grupo lineal $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Ejercicio 1. — Completar la demostración del Teorema anterior.

1.3. Automorfismos del plano complejo

La determinación de los automorfismos del plano complejo \mathbb{C} también es fácil de obtener.

Teorema 1.3.1 (Automorfismos de \mathbb{C}). — *Los automorfismos analíticos del plano complejo \mathbb{C} son de de la forma*

$$A(z) = az + b$$

y los automorfismos antianalíticos son de la forma

$$A(z) = a\bar{z} + b$$

donde $a, b \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$.

Demostración. — Consideremos un automorfismo analítico A de \mathbb{C} . Sea $\alpha = A(0)$ y $\beta = A'(0)$. Como $T(z) = z - \alpha$ y $Q(z) = z/\beta$ son automorfismos analíticos de \mathbb{C} , tenemos que $F = Q \circ T \circ A$ es también un automorfismo analítico de \mathbb{C} . Notemos que $F(0) = 0$ y que $F'(0) = 1$. Como F es una función entera, tenemos su desarrollo en serie de potencias centrada en 0 (que converge localmente uniforme en \mathbb{C})

$$F(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

Notemos que necesariamente

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \infty.$$

En efecto, si esto no fuese así, entonces existiría una sucesión (z_n) , convergiendo a ∞ , de manera que $F(z_n)$ se mantiene acotada; luego podemos asumir que (pasando a una subsucesión si es necesario) esta converge a un valor $w \in \mathbb{C}$. Ya que F es un automorfismo, existe $p \in \mathbb{C}$ tal que $F(p) = w$. Como F es una función abierta y continua, existe un disco D_p centrado en p y radio positivo de manera que su imagen por F es un abierto que contiene a w y está contenido en el disco centrado en w y radio 1. Tomando n suficientemente grande, podemos suponer que $F(z_n) \in F(D_p)$ y que $z_n \notin D_p$, contradiciendo la inyectividad de F .

Ahora consideremos la función analítica inyectiva $G : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$G(z) = F\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} + a_2 \frac{1}{z^2} + \dots$$

Como $G(z)$ se aproxima a ∞ cuando z se aproxima a 0, tenemos que 0 es un polo de $G(z)$. En particular, debe existir algún $d \geq 2$ tal que $a_j = 0$ para $j \geq d$. En otras palabras, F debe ser un polinomio. Pero la inyectividad de F asegura que tal polinomio debe ser de grado uno, es decir, $F(z) = z$.

Para obtener los automorfismos antianalíticos, basta observar que $J(z) = \bar{z}$ es uno de ellos. □

Observación 1.3.2. — El Teorema de la aplicación de Riemann nos dice que toda región $\Omega \subset \mathbb{C}$ simplemente conexa, diferente de \mathbb{C} , es biholomorfa al semiplano superior \mathbb{H} . Luego, $\text{Aut}^+(\Omega)$ es isomorfo a $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Por desgracia, sólo para algunas regiones Ω se puede calcular una aplicación de Riemann de manera explícita. Para el caso de regiones poligonales, existen las fórmulas de Schwarz-Christoffel. Por ejemplo, si Ω es un triángulo donde dos de sus ángulos interiores son $\alpha\pi$ y $\beta\pi$, entonces (modulo alguna constante) una función de Riemann es dada por

$$F : \mathbb{H} \rightarrow \Omega : z \mapsto \int_i^z \frac{dw}{(w-1)^{1-\alpha}(w+1)^{1-\beta}}.$$

En el caso que Ω es un cuadrado, la función de Riemann se puede obtener usando integrales elípticas. Cuando Ω es una región triangular cuyos lados son arcos de círculos, entonces existen también fórmulas usando las llamadas funciones triangulares de Schwarz (asociadas a ciertas ecuaciones diferenciales de segundo orden llamadas hipergeométricas).

CAPÍTULO 2

SUPERFICIES DE RIEMANN Y CURVAS ALGEBRAICAS COMPLEJAS

2.1. Variedades topológicas

Sea X un espacio topológico y $n \geq 1$ un entero. Un *atlas topológico n -dimensional* para X es una colección de pares $\mathcal{A} = \{(U_j, z_j)\}$ (llamadas *cartas*), satisfaciendo las siguientes propiedades :

1. cada $U_j \subset X$ es un abierto del espacio topológico X ;
2. $\bigcup_j U_j = X$;
3. $z_j : U_j \rightarrow z_j(U_j)$ es un homeomorfismo entre U_j y un conjunto abierto $z_j(U_j) \subset \mathbb{R}^n$.

Observación 2.1.1. — Observemos, de la definición dada arriba, que si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces la *función de transición*

$$z_j \circ z_i^{-1} : z_i(U_i \cap U_j) \rightarrow z_j(U_i \cap U_j)$$

es un homeomorfismo (ver figura 2.1).

Una *variedad topológica n -dimensional* es un par formado de un espacio topológico, conexo, Hausdorff y segundo numerable, provisto de un atlas topológico n -dimensional maximal. Cuando $n = 2$, hablamos de *superficies topológicas* (en este caso podemos además identificar el plano \mathbb{R}^2 con el plano complejo \mathbb{C}).

Observación 2.1.2 (Atlas topológicos maximales). — Supongamos que tenemos dos atlas topológicos n -dimensionales para X , digamos \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 . Entonces la unión $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ también es una atlas topológico n -dimensional para X . De esta manera, gracias al Lema de Zorn, siempre existe un atlas topológico n -dimensional maximal para X .

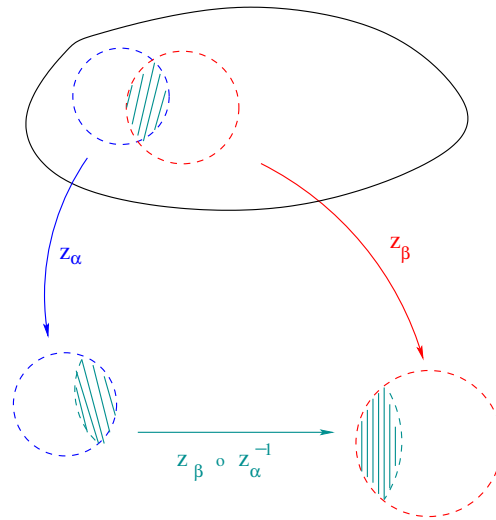


FIGURA 2.1. Función de transición

Ejemplo 1. — Consideremos un polígono regular $P \subset \mathbb{R}^2$ de $2r \geq 4$ lados, digamos s_1, \dots, s_{2r} . Consideremos dos subconjuntos disjuntos de $\{1, \dots, 2r\}$ cada uno de cardinalidad r , digamos $\{j_1, \dots, j_r\}$ y $\{k_1, \dots, k_r\}$. Por cada $l \in \{1, \dots, r\}$ consideremos una isometría Euclideana T_l tal que $T_j(s_{j_l}) = s_{k_l}$ y $T_j(P^0) \cap P^0 = \emptyset$, donde P^0 es el interior de P . Identifiquemos los lados de P usando las transformaciones T_j . El espacio obtenido resulta ser una superficie topológica.

2.2. Variedades diferenciables

Una *variedad diferenciable n -dimensional* es un par formado de un espacio topológico, conexo, Hausdorff y segundo numerable, provisto de un atlas topológico n -dimensional maximal cuyas funciones de transición son funciones diferenciables; en cuyo caso, hablamos de un *atlas diferenciable*.

Observación 2.2.1. — 1. Toda variedad diferenciable tiene una estructura de variedad topológica, de la misma dimensión.

2. Puede ocurrir que la unión de dos atlas diferenciables no sea diferenciable. Por ejemplo, podemos considerar $X = \mathbb{R}$ y los atlas diferenciables $\mathcal{A}_1 = \{(\mathbb{R}, z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x)\}$, $\mathcal{A}_2 = \{(\mathbb{R}, w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3)\}$. En este caso, la unión $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ si bien es un atlas topológico para \mathbb{R} no es diferenciable.

Ejemplo 2 (Atlas diferenciable maximal). — Sea \mathcal{A} un atlas diferenciable n -dimensional para X . Sea \mathcal{F} formado de todos los pares (U, z) , donde $U \subset X$ es un abierto y z es un homeomorfismo entre U y un abierto V de \mathbb{R}^n , satisfaciendo que para todo $(W, w) \in \mathcal{A}$ con $W \cap U \neq \emptyset$ se tiene que $w \circ z^{-1}$ y $z \circ w^{-1}$ son diferenciables. Verificar que \mathcal{F} es un atlas diferenciable maximal para X conteniendo al atlas \mathcal{A} .

Un atlas diferenciable es llamado *orientado* si sus cambios de coordenadas tienen jacobiano positivo. Una variedad diferenciable, junto a un atlas orientado, se llama una *variedad diferenciable orientada*.

Una *variedad orientable* es una variedad topológica cuyo atlas maximal posee un sub-atlas diferenciable orientado.

2.3. Teorema de clasificación de superficies

En esta sección presentamos la clasificación, módulo homeomorfismos de todas las superficies conexas, Hausdorff y segundo numerables debida a Kerékjártó.

2.3.1. El espacio de finales de un espacio topológico. — Sea X un espacio topológico que es localmente compacto, localmente conexo, conexo y Hausdorff (por ejemplo, cuando X es una superficie topológica).

Una sucesión $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de abiertos conexos y no vacíos de X , es llamada *anidada* si se satisfacen las siguientes propiedades :

1. $U_1 \supset U_2 \supset \dots$;
2. para cada $n \in \mathbb{N}$, la frontera ∂U_n de U_n es compacta;
3. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_n} = \emptyset$; y
4. para cada compacto $K \subset X$, existe algún $m \in \mathbb{N}$ tal que $K \cap U_m = \emptyset$.

Decimos que dos sucesiones anidadas de abiertos de X , $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(U'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, son *equivalentes* si para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $j, k \in \mathbb{N}$ tales que $U_n \supset U'_j$ y $U'_n \supset U_k$ (esta resulta ser una relación de equivalencia). Denotaremos por el símbolo $[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$ la clase de equivalencia de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y le llamaremos un *final* de X .

Al conjunto de los fines de X (es decir, el conjunto de las clases de equivalencia de la relación dada) lo denotaremos por el símbolo $\text{Ends}(X)$ el cual llamaremos el *espacio de fines* de X .

Al conjunto $\text{Ends}(X)$ le podemos dotar de la topología generada por los conjuntos (los cuales de hecho forman una base) definidos por

$$U^* := \{[U_n]_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Ends}(X) \mid U_j \subset U \text{ algún } j \in \mathbb{N}\},$$

donde $U \subset Z$ es un conjunto abierto no vacío de X cuya frontera es compacta.

Teorema 2.3.1 ([32]). — *El espacio topológico $\text{Ends}(X)$, con la topología anterior, resulta ser un espacio Hausdorff, totalmente desconexo y compacto (es decir, lo podemos ver como un subconjunto cerrado del conjunto de Cantor).*

2.3.2. Ends of a surface. — Ahora, supongamos que X es una superficie.

Una *subsuperficie* de X es un conjunto cerrado que una incrustación topológica en X de alguna superficie cuya frontera (en X) consiste de un número finito de curvas cerradas simples y disjuntas. Notemos que esta definición, una subsuperficie puede o no ser compacta.

El *género reducido* de una subsuperficie compacta Y , con $q(Y)$ curvas fronteras y característica de Euler $\chi(Y)$, es dado por $g(Y) = 1 - \frac{1}{2}(\chi(Y) + q(Y))$. El *género* de X es el supremo de los géneros reducidos de sus subsuperficies compactas; luego, este valor puede ser cualquier entero o ∞ . En caso que su género sea cero, decimos que X es *planar* (en otras palabras, X es homeomorfa a un abierto del plano).

En este caso de superficies, en la definición de un final de X , podemos asumir que en la sucesión anidada de abiertos $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tenemos que las clausuras (en X) \overline{U}_n son subsuperficies. De esta manera, podemos decir que un fin $[U_n]_{n \in \mathbb{N}}$ es *planar* si existe algún $l \in \mathbb{N}$ tal que la subsuperficie $\overline{U}_l \subset X$ tiene género cero.

Denotaremos por el símbolo $\text{Ends}_\infty(X)$ al subconjunto de $\text{Ends}(X)$ conformado de los fines no-planares de X . Se sabe que $\text{Ends}_\infty(X)$ es un subconjunto cerrado de $\text{Ends}(X)$ (see [33, p. 261]).

El triple $(g, \text{Ends}_\infty(X), \text{Ends}(X))$, donde $g \in \{0, 1, \dots\} \cup \{\infty\}$ es un invariante topológico. El siguiente resultado, de Kerékjártó (y completado por Richards), nos dice que tal triple determina X de manera única, módulo homeomorfismos.

Teorema 2.3.2 (Teorema de clasificación de superficies, [24], [33])

Dos superficies X_1 y X_2 , ambas orientables, del mismo género son homeomorfas (por un homeomorfismo que preserva la orientación) sí y

sólo si existe un homeomorfismo $f : \text{Ends}(X_1) \rightarrow \text{Ends}(X_2)$ tal que $f(\text{Ends}_\infty(X_1)) = \text{Ends}_\infty(X_2)$.

Una superficie orientable X es de *tipo finito* si su grupo fundamental $\pi_1(X)$ es finitamente generado. En este caso, X tiene género finito $g \in \{0, 1, \dots\}$, $\text{Ends}_\infty(X) = \emptyset$ y $\text{Ends}(X)$ un conjunto finito (cada uno de los fines tiene una vecindad homeomorfa a un disco pinchado). Si n denota la cardinalidad de $\text{Ends}(X)$, entonces se dice que X tiene tipo (g, n) . En este contexto, el teorema de clasificación anterior tiene una forma más simple.

Teorema 2.3.3. — *Si X_1 y X_2 son superficies orientables de tipo finito, entonces ellas son homeomorfas (por un homeomorfismo que preserva la orientación) sí y sólo si tienen el mismo tipo.*

2.4. Superficies de Riemann

Una *superficie de Riemann* es una superficie topológica cuyo atlas topológico 2-dimensional además satisface que (identificando \mathbb{R}^2 con \mathbb{C}) sus funciones de transición son funciones analíticas (luego funciones biholomorfas); tal atlas es llamado un *atlas analítico*.

Ejercicio 2 (Estructura de superficie de Riemann)

Considere un atlas analítico \mathcal{A} para una superficie de Riemann S . Sea \mathcal{F} la colección de todos los atlas analíticos para S que contienen al atlas \mathcal{A} . En tal colección considere el orden dado por contención. Verificar que tal orden es dirigido y utilice el Lema de Zorn para verificar la existencia de un único atlas analítico maximal que contiene a \mathcal{A} . Tal atlas maximal para S es llamada la *estructura de superficie de Riemann* de S .

2.5. Superficies de Riemann son superficies orientables

Observemos que, como consecuencia de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, toda superficie de Riemann es necesariamente orientable.

Una superficie de Riemann compacta es en particular una superficie compacta orientable; luego, ésta es determinada por su característica de Euler $\chi = 2 - 2g$, donde g es el género de la superficie.

1. Si $g = 0$, entonces la superficie es homeomorfa a la esfera unitaria $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;
2. Si $g = 1$, entonces ésta es homeomorfa al toro $S^1 \times S^1$;
3. Si $g \geq 2$, entonces es homeomorfa a la suma conexa de g toros.

2.6. Primeros ejemplos de superficies de Riemann

Ejemplo 3. — Ejemplos de superficies de Riemann son, por ejemplo, los abiertos conexos no vacíos de \mathbb{C} . Casos interesantes son el plano complejo \mathbb{C} , el disco unitario \mathbb{D} y el semiplano superior \mathbb{H} . Estos son ejemplos de superficies de Riemann no compactas.

Ejemplo 4 (La esfera de Riemann). — Consideremos la compactificación del plano \mathbb{C} por un punto, $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, cuya topología es la generada por los abiertos usuales de \mathbb{C} y los conjuntos de la forma $(\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$, donde $K \subset \mathbb{C}$ es compacto (éstos forman una base de vecindades del punto ∞). El atlas

$$\{(U_1 = \mathbb{C}, z_1(z) = z), (U_2 = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}, z_2(z) = 1/z)\},$$

tiene como función de transición a la identidad (usando las mismas cartas) o bien la transformación de la forma (usando cartas diferentes)

$$z \in \mathbb{C} - \{0\} \mapsto 1/z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

las cuales son analíticas. La superficie de Riemann así obtenida es llamada la *esfera de Riemann*. Verificar que $\widehat{\mathbb{C}}$ es homeomorfa a la esfera unitaria de \mathbb{R}^3 .

Ejemplo 5. — Sea $\tau \in \mathbb{H}$ y consideremos el grupo

$$G_\tau = \langle A(z) = z + 1, B_\tau(z) = z + \tau \rangle \cong \mathbb{Z}^2.$$

Consideremos la acción de G_τ sobre el plano \mathbb{C} . Entonces, el cociente $T_\tau = \mathbb{C}/G_\tau$ define una superficie de Riemann homeomorfa al toro $S^1 \times S^1$.

2.7. Curvas algebraicas complejas

2.7.1. Curvas algebraicas afines suaves. — Consideremos una colección de polinomios

$$P_1, \dots, P_{n-1} \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$$

y la función holomorfa

$$T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$$

$$T(x_1, \dots, x_n) = (P_1(x_1, \dots, x_n), \dots, P_{n-1}(x_1, \dots, x_n)).$$

Si el punto $b = (b_1, \dots, b_{n-1}) \in T(\mathbb{C}^n)$ es un valor regular de T , entonces, por el Teorema de la Función Implícita, tenemos que $C := T^{-1}(b)$ es una superficie de Riemann (no compacta). Decimos que C es una *curva algebraica suave*.

Ejemplo 6 (Curvas hiperelípticas). — En este ejemplo, tomaremos $n = 2$ y el polinomio

$$P(x, y) = y^2 - \prod_{j=1}^m (x - a_j),$$

donde $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ son puntos diferentes. En este caso, $b = 0$ es un valor regular de $T = P$, y se tiene que

$$C_2 := \left\{ (x, y) : y^2 = \prod_{j=1}^m (x - a_j) \right\} \subset \mathbb{C}^2$$

es una superficie de Riemann (no compacta). Si $m \geq 5$, entonces esta curva es conocida como un modelo afín de una *superficie de Riemann hiperelíptica* de género (i) $g = (m - 2)/2$, si m es par y (ii) $g = (m - 1)/2$, si m es impar.

Ejemplo 7 (Curvas p -gonales). — De nuevo en este ejemplo, usaremos $n = 2$. Sea p un número entero primo y consideremos el polinomio

$$P(x, y) = y^p - \prod_{j=1}^m (x - a_j)^{n_j},$$

donde $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ son diferentes y $n_1, \dots, n_m \in \{1, \dots, p - 1\}$. Al igual que en el ejemplo anterior (cuando $p = 2$), se tiene que la curva

$$C_p := \left\{ (x, y) : y^p = \prod_{j=1}^m (x - a_j)^{n_j} \right\} \subset \mathbb{C}^2$$

es una superficie de Riemann (no compacta), llamada una *curva p -gonal*.

Ejemplo 8 (Curvas de Fermat). — Sea $k \geq 1$ un entero y consideremos el polinomio

$$P(x, y) = x^k + y^k + 1.$$

En este caso, la curva

$$F_k := \{(x, y) : x^k + y^k + 1 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$$

es una superficie de Riemann (no compacta), llamada una *curva de Fermat de grado k* .

Ejemplo 9 (Curvas generalizadas de Fermat). — Sean $k \geq 1$ y $m \geq 3$ enteros y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-2} \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ tales que $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$. En este caso, consideramos los polinomios

$$P_1(x_2, \dots, x_{m+1}) = 1 + x_2^k + x_3^k$$

$$P_j(x_2, \dots, x_{m+1}) = \lambda_{j-1} + x_2^k + x_{j+2}^k, \quad j = 2, \dots, m-1.$$

Se puede ver que 0 es valor regular de $T = (P_1, \dots, P_{m-1})$; luego

$$C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{m-2}}^{(k)} := \left\{ \begin{array}{l} 1 + x_2^k + x_3^k = 0 \\ \lambda_1 + x_2^k + x_4^k = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{m-2} + x_2^k + x_{m+1}^k = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{C}^m$$

es una superficie de Riemann (no compacta), llamada una *curva generalizada de Fermat de tipo (k, m)* .

2.7.2. Curvas algebraicas proyectivas suaves. — En los ejemplos de curvas anteriores hemos logrado obtener superficies de Riemann no compactas. Ahora veremos como construir superficies de Riemann compactas.

Consideremos una colección de polinomios homogéneos

$$P_1, \dots, P_{n-1} \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$$

y consideremos la función holomorfa

$$T : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$$

$$T(x_1, \dots, x_{n+1}) = (P_1(x_1, \dots, x_{n+1}), \dots, P_{n-1}(x_1, \dots, x_{n+1})).$$

Notemos que en este ejemplo se tiene que $T(0, \dots, 0) = 0$ y que $T(\mu x_1, \dots, \mu x_{n+1}) = T(x_1, \dots, x_{n+1})$, para todo $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Ahora, si todo punto de $T^{-1}(0) \setminus \{0\} \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ es un punto regular de T , entonces $S := T^{-1}(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ es una variedad compleja de dimensión compleja 2 (otra vez consecuencia del Teorema de la Función Implícita). Sea C la proyección de S en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$. Entonces, C resulta ser una superficie de Riemann compacta.

Ejemplo 10 (Curvas de Fermat). — La curva proyectiva

$$F_k := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 : x^k + y^k + z^k = 0\} \subset \mathbb{P}^2$$

es una superficie de Riemann compacta, llamada *curva de Fermat de grado k* . Esta curva es una compactificación de la curva de Fermat afín vista anteriormente.

Ejemplo 11 (Curvas generalizadas de Fermat). — Sean $k \geq 1$ y $m \geq 3$ enteros y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-2} \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ tales que $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$. La curva proyectiva

$$C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{m-2}}^{(k)} := \left\{ \begin{array}{l} x_1^k + x_2^k + x_3^k = 0 \\ \lambda_1 x_1^k + x_2^k + x_4^k = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{m-2} x_1^k + x_2^k + x_{m+1}^k = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{P}^m$$

es una superficie de Riemann compacta, llamada *curva generalizada de Fermat de tipo (k, m)* . Esta curva es una compactificación de la curva generalizada de Fermat antes vista.

2.8. Funciones holomorfas/anti-holomorfas

Sean $S_1 = (X_1, \mathcal{A}_1)$ y $S_2 = (X_2, \mathcal{A}_2)$ dos superficies de Riemann y sea $f : X_1 \rightarrow X_2$ una función continua.

2.8.1. Función holomorfa. — Diremos que f es una *función holomorfa* (*función analítica*) si en coordenadas locales esta es una función analítica entre abiertos del plano complejo, es decir, para cada punto $p \in X_1$ existen cartas $(U_j, z_j) \in \mathcal{A}_j$ tales que $p \in U_1$ y $f(U_1) \subset U_2$, de manera que

$$z_2 \circ f \circ z_1^{-1} : z_1(U_1) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

es analítica.

Supongamos que f es holomorfa. Siempre es posible encontrar cartas locales (U_1, z_1) y (U_2, z_2) como en la definición tales que $z_1(p) = z_2(f(p)) = 0$ y $z_j(U_j) = \mathbb{D}$. En este caso, la representación local

$$g := z_2 \circ f \circ z_1^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

satisface que

$$g(z) = z^n h(z),$$

donde h es analítica en \mathbb{D} , $h(0) \neq 0$ y $n \geq 1$ es un entero. Se puede verificar que n no depende de la elección de las cartas locales. Decimos que n es la *multiplicidad de f en p* y la denotaremos por el símbolo $\text{mult}_p(f)$.

Cuando tenemos una función holomorfa $f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ no-constante, se usa el término *función meromorfa*.

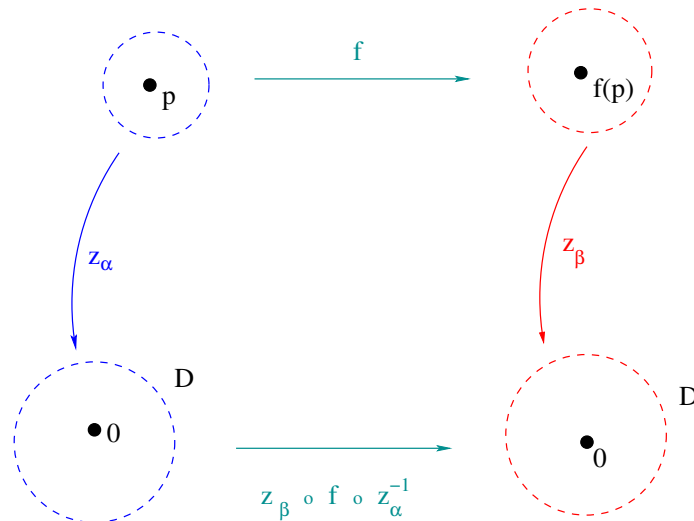


FIGURA 2.2. Expresión local de la función f

Ejemplo 12. — Las funciones holomorfas en $\widehat{\mathbb{C}}$, diferente de la constante igual a ∞ , son dadas por las funciones racionales. En efecto, si $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es una función meromorfa no-constante, entonces debe tener un número finito de ceros en \mathbb{C} , digamos p_1, \dots, p_r (digamos que p_j es cero de multiplicidad n_j) y debe tener un número finito de polos en \mathbb{C} , digamos q_1, \dots, q_s (digamos que q_j es polo de orden m_j). Entonces,

$$F(z) := f(z) \frac{(z - q_1)^{m_1} \cdots (z - q_s)^{m_s}}{(z - p_1)^{n_1} \cdots (z - p_r)^{n_r}}$$

es una función holomorfa $F : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ sin ceros ni polos en el plano complejo. Luego, $F(z)$ no puede ser sobreyectiva, es decir, debe ser constante.

2.8.2. Función anti-holomorfa. — Diremos que f es una *función anti-holomorfa* (*función anti-analítica*) si en coordenadas locales esta es una función anti-analítica entre abiertos del plano complejo, es decir, para cada punto $p \in X_1$ existen cartas $(U_j, z_j) \in \mathcal{A}_j$ tales que $p \in U_1$ y $f(U_1) \subset U_2$, de manera que

$$J \circ z_2 \circ f \circ z_1^{-1} : z_1(U_1) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

es analítica, donde $J(z) = \bar{z}$.

2.8.3. Isomorfismos entre superficies de Riemann. — Diremos que las superficies de Riemann S_1 y S_2 son *isomorfas* (*biholomórficamente equivalentes*) si existe un homeomorfismo holomorfo $f : S_1 \rightarrow S_2$ (notar que la inversa debe ser holomorfa por el teorema de la función inversa). Tal función f es llamada un *biholomorfismo*.

Ejemplo 13. — Las superficies de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ y $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ son isomorfas. Un isomorfismo es dado por el siguiente :

$$\begin{aligned} f : \widehat{\mathbb{C}} &\rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \\ f(z) &= [z : 1], \quad z \neq \infty \\ f(\infty) &= [1 : 0]. \end{aligned}$$

El siguiente resultado clasifica las superficies de Riemann simplemente conexas.

Teorema 2.8.1 (Teorema de Uniformización de Klein-Koebe-Poincaré)

Toda superficie de Riemann simplemente conexa es isomorfa a una de las siguientes :

$$\widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Como consecuencia de la teoría clásica de espacios de cubrimiento, el resultado anterior implica el siguiente resultado.

Teorema 2.8.2. — Toda superficie de Riemann S es isomorfa a una de la forma \tilde{S}/Γ con

$$\begin{aligned}\tilde{S} &\in \{\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{D}\}, \\ \Gamma &< \text{Aut}(\tilde{S}),\end{aligned}$$

donde Γ actúa propiamente discontinuamente y sin puntos fijos en \tilde{S} (en particular, $\Gamma \cong \pi_1(S)$).

2.9. Formas meromorfas/holomorfas en superficies de Riemann

Sea S una superficie de Riemann y $\mathcal{A} = \{(U_j, z_j)\}_{j \in I}$ un atlas holomorfo de ella.

Una *1-forma meromorfa* en la superficie de Riemann es la asignación de una función meromorfa $f_j : z_j(U_j) \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ por cada $j \in J$, de manera que si $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, entonces vale la igualdad

$$f_j = f_k(z_k \circ z_j^{-1}) \cdot (z_k \circ z_j^{-1})'.$$

En el caso que todas las funciones f_j son holomorfas, decimos que la anterior es una *1-forma holomorfa*. Denotaremos por el símbolo $\Omega(S)$ y $H^{1,0}(S)$ a los conjuntos de las 1-formas meromorfas y holomorfas, respectivamente.

Se puede verificar que, con la suma usual y amplificación por números complejos, $\Omega(S)$ resulta ser un espacio vectorial complejo y que $H^{1,0}(S)$ es un subespacio vectorial de este.

Ejemplo 14. — El espacio $\Omega(\hat{\mathbb{C}})$ consiste de las 1-formas racionales, es decir, de la forma $R(z)dz$, donde $R(z) \in \mathbb{C}(z)$. En efecto, notemos que dz es una 1-forma meromorfa y que si $\omega \in \Omega(\hat{\mathbb{C}})$, entonces $\omega/dz : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es una función holomorfa.

Observación 2.9.1. — Para cada entero positivo $k \geq 1$ se pueden definir la k -formas meromorfas de S . Estas se definen de idéntica manera al como lo hemos hecho para $k = 1$, pero ahora se pide que si $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, entonces valga la igualdad

$$f_j = f_k(z_k \circ z_j^{-1}) \cdot ((z_k \circ z_j^{-1})')^k.$$

En particular, si ω_1 y ω_2 son una α -forma y una β -forma, entonces su producto define una $(\alpha + \beta)$ -forma.

2.10. Superficies de Riemann son curvas algebraicas

Hemos visto que curvas algebraicas proyectivas suaves definen superficies de Riemann compactas. El propósito de esta sección es ver el recíproco, es decir, verificar que toda superficie de Riemann compacta es isomorfa a una definida por curvas algebraicas. Para esto, primero introduciremos los conceptos necesarios para escribir el Teorema de Riemann-Roch. Una vez introducido este teorema, procederemos a probar lo deseado.

En lo que sigue, S denotará una superficie de Riemann compacta.

2.10.1. Cuerpo de funciones meromorfas. — Denotaremos por $M(S)$ al conjunto de las funciones meromorfas $f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ diferentes de la constante ∞ . Este conjunto tiene una estructura natural de cuerpo, conteniendo a \mathbb{C} como subcuerpo (visto como las funciones constantes), en particular, $M(S)$ es un cuerpo extensión de \mathbb{C} . El cuerpo $M(S)$ es llamado el *cuerpo de funciones meromorfas de S* . Más adelante veremos que este cuerpo es una extensión de \mathbb{C} de grado de trascendencia 1. Por ejemplo, como ya habíamos visto, $M(\widehat{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(z)$.

Observación 2.10.1. — Supongamos que tenemos una función holomorfa no-constante $h : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. Entonces, esta función induce un homomorfismo entre cuerpos

$$h^* : \mathbb{C}(z) \rightarrow M(S) : R \mapsto R \circ h.$$

El núcleo de h^* es un ideal del cuerpo $\mathbb{C}(z)$, luego es trivial o $\mathbb{C}(z)$. Pero, si $I(z) = z$, tenemos que $h^*(I) = h$, por lo cual el núcleo debe ser trivial, es decir, h^* es inyectiva. Esto nos dice que, bajo el supuesto de la existencia de h , el cuerpo de funciones meromorfas $M(S)$ contiene como subcuerpo una copia de $\mathbb{C}(z)$. En el caso que S sea compacta, más abajo veremos la existencia de una tal h (de hecho, de la existencia de infinitas). Después, veremos que esta extensión es algebraica y finita.

2.10.2. Divisores. — Un *divisor* de S es un elemento del \mathbb{Z} -módulo $\text{Div}(S)$, generado por las colecciones finitas de puntos de S , es decir, de la forma

$$D = \sum_j m_j p_j,$$

donde $p_j \in S$, $m_j \in \mathbb{Z}$ y sólo para un número finito de índices los enteros m_j pueden ser diferentes de cero. Cuando todos los enteros $m_j \geq 0$ decimos que el divisor es *efectivo*. El *grado* de D es definido como la suma (finita) $\deg(D) = \sum_j m_j \in \mathbb{Z}$.

Notemos que la función grado

$$\deg : \text{Div}(S) \rightarrow \mathbb{Z} : D \mapsto \deg(D)$$

es un homomorfismo sobreyectivo entre \mathbb{Z} -módulos. Su núcleo corresponde al subgrupo $\text{Div}_0(S)$ formado de los divisores de grado cero. En particular, tenemos un isomorfismo

$$\text{Div}(S)/\text{Div}_0(S) \cong_{\deg} \mathbb{Z}.$$

Dados divisores $D_1 = \sum_j a_j p_j$ y $D_2 = \sum_j b_j q_j$, indicamos con el símbolo $D_1 \geq D_2$ el hecho que $a_j \geq b_j$, para todo j . Notemos en este caso que $\deg(D_1) \geq \deg(D_2)$.

Usualmente, escribimos $D = \sum_j m_j p_j$ como una suma finita al eliminar aquellos términos con $m_j = 0$.

2.10.3. Divisores principales y canónicos. — Ahora supondremos que S es una superficie de Riemann compacta.

2.10.3.1. Divisores principales. — Si $f \in M(S)$, $f \neq 0$, entonces (por la compacidad de S) f debe tener un número finito de ceros (pues $f \neq 0$) y un número finito de polos (pues $f \neq \infty$). De esta manera, podemos definir el divisor de f como

$$(f) = a_1 p_1 + \cdots + a_r p_r - b_1 q_1 - \cdots - b_s q_s,$$

donde :

- (i) p_1, \dots, p_r son los diferentes ceros de f , a_j es el orden como cero de p_j ,
- (ii) q_1, \dots, q_s son los diferentes polos de f y b_j el orden como polo de q_j .

Se puede verificar que $\deg(f) = 0$.

Todo divisor de la forma anterior es llamado un *divisor principal*. Si denotamos por $\text{Div}_{\text{princ}}(S)$ al subgrupo de los divisores principales, entonces este es un subgrupo de $\text{Div}_0(S)$ y por tanto podemos considerar el grupo abeliano cociente (llamado el grupo jacobiano de S)

$$\text{Pic}_0(S) := \text{Div}_0(S)/\text{Div}_{\text{princ}}(S).$$

También podemos mirar el cociente (grupo de Picard)

$$\text{Pic}(S) := \text{Div}(S)/\text{Div}_{\text{princ}}(S) \cong_{\text{deg}} \mathbb{Z} \times \text{Pic}_0(S).$$

$$[D] \mapsto (\text{deg}D, [D - \text{deg}(D)p])$$

donde $p \in S$ ha sido fijado.

2.10.3.2. Divisores canónicos. — Similarmente, si $\omega \in \Omega(S)$, $\omega \neq 0$, entonces (gracias nuevamente a la compacidad de S) le podemos asociar un divisor

$$(\omega) = a_1p_1 + \cdots + a_r p_r - b_1q_1 - \cdots - b_s q_s,$$

donde :

- (i) p_1, \dots, p_r son los ceros de ω , a_j el orden de cero de p_j ,
- (ii) q_1, \dots, q_s son los polos de ω y b_j el orden como polo de q_j .

Todo divisor de la forma anterior es llamado un *divisor canónico*.

Proposición 2.10.2. — Si $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(S)$ son ambas diferentes de cero, entonces (ω_1) y (ω_2) tienen el mismo grado.

Demostración. — Como $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(S)$ son ambas diferentes de cero, entonces ω_1/ω_2 es una función meromorfa de S , diferente de cero. Luego, como $(\omega_1/\omega_2) = (\omega_1) - (\omega_2)$ es un divisor principal, y todo divisor principal tiene grado cero, obtenemos que (ω_1) y (ω_2) tienen el mismo grado. \square

Observación 2.10.3. — Al igual que para 1-formas, se puede definir el divisor de una k -forma meromorfa diferente de cero. En este caso, usando la misma idea que para 1-formas, se puede verificar que dos k -formas meromorfas, diferentes de cero, tienen divisores del mismo grado. Por otro lado, si ω es una 1-forma meromorfa, diferente de cero, entonces ω^k es una k -forma meromorfa. Luego, podemos observar que el grado de una

k -forma meromorfa, diferente de cero, es k veces el grado de una 1-forma meromorfa.

2.10.4. Teorema de Riemann-Roch. — Seguiremos asumiendo que S es una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 0$.

Dado un divisor $D \in \text{Div}(S)$, uno puede asociarle dos \mathbb{C} -espacios vectoriales

$$L(D) = \{f \in M(S) \setminus \{0\} : (f) + D \geq 0\} \cup \{0\},$$

$$\Omega(D) = \{\omega \in \Omega(S) \setminus \{0\} : (\omega) \geq D\} \cup \{0\}.$$

De la definición anterior, podemos ver las siguientes propiedades.

1. Si $D_1 \leq D_2$, entonces $L(D_1) \leq L(D_2)$.
2. $L(0) = \mathbb{C}$.
3. Si $\deg(D) < 0$, entonces $L(D) = \{0\}$.
4. $\Omega(0) = H^{1,0}(S)$.
5. Si denotamos por $H^{k,0}(S)$ el \mathbb{C} -espacio vectorial de las k -formas holomorfas de S , y consideramos una 1-forma meromorfa $\omega \neq 0$, entonces la función lineal

$$L(k(\omega)) \rightarrow H^{k,0}(S) : f \mapsto f\omega^k$$

define un isomorfismo entre \mathbb{C} -espacios vectoriales.

6. Si $\omega \in \Omega(S)$, $\omega \neq 0$, entonces la función

$$L(D) \rightarrow \Omega((\omega) - D) : f \mapsto f\omega$$

es un isomorfismo entre \mathbb{C} -espacios vectoriales.

Teorema 2.10.4 (Riemann-Roch's theorem [12]). —

$$\dim(L(D)) = \deg(D) + 1 - g + \dim(\Omega(D)).$$

Como ya hemos observado arriba : $\Omega(0) = H^{1,0}(S)$ y $L(0) = \mathbb{C}$. Esto, junto a Teorema de Riemann-Roch, nos entrega la dimensión de $H^{1,0}(S)$.

Corolario 2.10.5. — Si S es de género $g \geq 0$, entonces

$$\dim(H^{1,0}(S)) = g.$$

Corolario 2.10.6. — *Una consecuencia del Teorema de Riemann-Roch es que si $\omega \in \Omega(S)$, $\omega \neq 0$, entonces $\deg(\omega) = 2(g - 1)$. En particular, el grado de una k -forma meromorfa, diferente de cero, es $2k(g - 1)$.*

Demostración. — Como ya hemos observado, el grado de una k -forma meromorfa sólo depende de k . Por otro lado, el grado de una k -forma es k veces el grado de una 1-forma (pues, si ω es una 1-forma, entonces ω^k es una k -forma). Luego, sólo debemos calcular el grado de una 1-forma meromorfa.

Si $g = 0$, podemos ver que la 1-forma dz tiene sólo un polo en ∞ de orden dos y no tiene ceros; luego su grado es -2 .

Si $g \geq 1$, podemos escoger una 1-forma holomorfa $\omega \neq 0$ (pues $H^{1,0}(S)$ tiene dimensión $g \geq 1$). Por el Teorema de Riemann-Roch,

$$\dim(L((\omega))) = \deg(\omega) + 1 - g + \dim(\Omega((\omega))).$$

Como tenemos un isomorfismo entre $L((\omega))$ y $\Omega((\omega) - (\omega)) = \Omega(0) = H^{1,0}(S)$, entonces lo anterior queda

$$2g - 1 = \deg(\omega) + \dim(\Omega((\omega))).$$

De manera similar, tenemos un isomorfismo entre $L(0)$ y $\Omega((\omega) - 0) = \Omega((\omega))$, de donde obtenemos que

$$2g - 1 = \deg(\omega) + 1.$$

□

Arriba hemos calculado la dimensión de $H^{1,0}(S)$, siendo este igual al género g de la superficie. Ahora, si $k \geq 2$, queremos ver la dimensión de $H^{k,0}(S)$. Para $g = 0$ no tenemos k -formas holomorfas, es decir, $H^{k,0}(\widehat{\mathbb{C}}) = \{0\}$. Para $g = 1$, se puede verificar que todos estos espacios vectoriales tienen dimensión 1.

Corolario 2.10.7. — *Si S es de género $g \geq 2$, entonces para cada entero $k \geq 2$ se tiene que*

$$\dim H^{k,0}(S) = \begin{cases} 1, & g = 1, \\ (2k - 1)(g - 1), & g \geq 2. \end{cases}$$

Demostración. — Como ya hemos visto, tenemos un isomorfismo entre los espacios $L(k(\omega))$ y $H^{k,0}(S)$, donde $\omega \neq 0$ es una 1-forma holomorfa. El Teorema de Riemann-Roch nos dice que

$$\dim L(k(\omega)) = 2k(g - 1) - g + 1 + \dim \Omega(k(\omega)).$$

Como $g \geq 2$, el grado del divisor $k(\omega)$, que es igual a $2k(g-1)$, es mayor estricto que $2(g-1)$, por lo cual $\Omega(k(\omega)) = \{0\}$. \square

Otras consecuencias del Teorema de Riemann-Roch son, por ejemplo, las siguientes.

1. Si S tiene género $g = 0$, entonces para $D = p$, donde $p \in S$, tenemos $\dim(L(D)) = 2$. Luego, existe una función meromorfa no constante de grado uno $f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, es decir, S es isomorfa a $\widehat{\mathbb{C}}$.
2. Si $D \geq 0$, entonces $\dim(L(D)) \leq 1 + \deg(D)$.
3. Si $D \geq 0$, $\deg(D) \geq 2g - 1$, entonces $\Omega(D) = \{0\}$, por lo cual, $\dim(L(D)) = \deg(D) + 1 - g \geq g$.
4. Si $D = dp$, donde $p \in S$, entonces el punto anterior permite observar las siguientes :
 - (a) Si $g = 1$ y $d = 2$, entonces existe una función $f \in M(S)$ no constante, la cual es holomorfa fuera de p y tiene a lo más un polo de orden dos en p . Como tal f no puede tener grado uno (ya que en tal caso tendríamos un isomorfismo entre S y $\widehat{\mathbb{C}}$, lo que es imposible ya que S no es simplemente conexa), tenemos que f tiene exáctamente un polo de orden dos en p .
 - (b) Si $g \geq 2$ y $d = 2g - 1$, entonces existe una función $f \in M(S)$ no constante, la cual es holomorfa fuera de p y tiene a lo más un polo de orden $2g - 1$ en p . Como tal f no puede tener grado uno (ya que en tal caso tendríamos un isomorfismo entre S y $\widehat{\mathbb{C}}$, lo que es imposible ya que S no es simplemente conexa), tenemos que f tiene un polo de orden al menos dos en p . En otras palabras, para cada punto $p \in S$ existe una función $f \in M(S)$ que es holomorfa fuera de p y tiene un polo en p de orden al menos dos y a los más $2g - 1$.

Teorema 2.10.8 (Teorema de las lagunas de Weierstrass [12])

Sea S una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 1$ y $p \in S$. Entonces existen precisamente g enteros

$$1 = n_1 < n_2 < \cdots < n_g < 2g$$

tal que no existe $f \in M(S)$ que es holomorfa fuera de p y tiene un polo de orden n_j en p .

2.10.5. El cuerpo $M(S)$ tiene grado de trascendencia 1 sobre \mathbb{C} . — Sea S una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 0$. Si D es un divisor efectivo de grado $d \geq g+1$, entonces el Teorema de Riemann-Roch nos asegura que $\dim(L(D)) \geq 2$. En particular, esto prueba la existencia de una función meromorfa no-constante en S . Habíamos visto, tal existencia nos aseguraba que $\mathbb{C} < \mathbb{C}(z) \leq M(S)$, es decir, $M(S)$ tiene grado de trascendencia al menos 1 sobre \mathbb{C} .

Supongamos que $M(S)$ tuviese grado de trascendencia al menos 2 sobre \mathbb{C} . Esto nos dice que podemos encontrar dos funciones meromorfas no-constantes de S , digamos $f, g \in M(S)$, las cuales son algebraicamente independientes sobre \mathbb{C} . En particular, cualquier colección finita de productos $f^a g^b$ ($a, b \in \{1, 2, \dots\}$) forman una colección algebraicamente independiente sobre \mathbb{C} .

Sean p_1, \dots, p_r los polos de f (donde p_j tiene orden a_j) y sean q_1, \dots, q_s los polos de g (donde q_j tiene orden b_j). Ahora consideremos el divisor efectivo

$$D = \sum_{j=1}^r a_j p_j + \sum_{j=1}^s b_j q_j.$$

Luego, por lo observado antes, si $d = \deg(D)$, entonces

$$\dim(L(mD)) \leq 1 + \deg(mD) = 1 + md.$$

Si $a + b \leq m$, entonces $f^a g^b \in L(mD)$. Como los elementos $f^a g^b$ son algebraicamente independientes sobre \mathbb{C} , tenemos que

$$\dim(L(mD)) \geq \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

Las dos desigualdades anteriores aseguran que

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2} \leq 1 + md,$$

lo cual obliga a tener $m \leq 2d - 3$. Esto es una contradicción al hecho que m puede ser escogido de manera arbitrariamente grande.

Todo lo anterior es resumido en el siguiente.

Teorema 2.10.9. — Si S es una superficie de Riemann compacta, entonces su cuerpo de funciones meromorfas $M(S)$ es una extensión de \mathbb{C} de trascendencia igual a 1. En particular, $M(S)$ es una extensión algebraica de $\mathbb{C}(z)$.

Es importante notar que se puede verificar que $M(S)$ es de hecho una extensión algebraica finita de $\mathbb{C}(z)$ (ver, por ejemplo, [12, IV.11.]).

2.10.6. Superficies de Riemann como curvas algebraicas. —

Teorema 2.10.10. — *Sea S una superficie de Riemann compacta. Entonces existe una curva proyectiva suave C cuya superficie de Riemann es isomorfa a S .*

Demostración. — Si S no es hiperelíptica de género $g \geq 3$, entonces basta considerar una base de 1-formas holomorfas de S (el cual tiene cardinalidad g); digamos w_1, \dots, w_g . Ahora considerar la función holomorfa

$$H : S \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{g-1} : p \mapsto [w_1(p) : \dots : w_g(p)].$$

Usando el teorema de Riemann-Roch, se puede verificar que $H : S \rightarrow C = H(S)$ es un isomorfismo sobre la curva proyectiva suave C .

En el caso de curvas hiperelípticas de género $g \geq 3$, se puede proceder de manera similar usando una base de 2-formas holomorfas. En el caso de curvas de género $g = 2$, se pueden usar 3-formas holomorfas. De todas maneras, en el caso hiperelíptico, se pueden construir las curvas hiperelípticas vistas anteriormente y proyectivizarlas. Pero las curvas obtenidas tienen puntos singulares, por lo cual hay que hacer una desingularización apropiada.

Superficies de Riemann de género $g = 1$ se pueden describir por curvas generalizadas de Fermat de tipo $(2, 3)$ y la superficie de Riemann de género $g = 0$ es isomorfa a $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. □

El Teorema 2.10.10 nos entrega una equivalencia entre las categorías de superficies de Riemann compactas y las curvas proyectivas suaves. Si S es una superficie de Riemann compacta, podemos encontrar una curva proyectiva suave C que la define como superficie de Riemann. Haciendo una proyección de C en el plano complejo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, aquí podemos permitir puntos singulares del tipo nodos, podemos ver que $M(S)$ es isomorfo a $\mathbb{C}(x)[y]/\langle P \rangle$, donde $P(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ es un polinomio irreducible definiendo la curva plana proyectada. Obtenemos también una equivalencia entre las dos categorías anteriores y la de los cuerpos que son extensiones trascendentales de grado 1 sobre \mathbb{C} .

Ejemplo 15 (toros). — Sean $\tau \in \mathbb{H}$, $G_\tau = \langle A(z) = z + 1, B_\tau(z) = z + \tau \rangle \cong \mathbb{Z}^2$ y la superficie de Riemann de género uno dada por $T_\tau = \mathbb{C}/G_\tau$. Sea $\Lambda = \{n + m\tau : n, m \in \mathbb{Z}\}$.

La función

$$\wp(z; \tau) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

es localmente uniformemente convergente en \mathbb{C} a una función meromorfa con únicos polos en los puntos de Λ , cada uno de orden 2. Esta función es llamada la *función \wp de Weierstrass*.

Esta función satisface :

$$\begin{aligned} \wp(z + \omega; \tau) &= \wp(z; \tau), \quad \text{para cada } \omega \in \Lambda, \\ \wp'(z + \omega; \tau) &= \wp'(z; \tau), \quad \text{para cada } \omega \in \Lambda, \\ \wp'(z; \tau) &= -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - \omega)^3}, \\ (\wp'(z; \tau))^2 &= 4(\wp(z; \tau))^3 - g_2\wp(z; \tau) - g_3, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} g_2 &= 60 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^2}, \\ g_3 &= 140 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^3}. \end{aligned}$$

Lo anterior permite ver un isomorfismo entre $T_\tau \setminus \{1 \text{ punto}\}$ y una curva algebraica de grado 3 dada por

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

2.11. Fórmula de Riemann-Hurwitz

Consideremos una función holomorfa no-constante

$$f : S_1 \rightarrow S_2$$

entre dos superficies de Riemann compactas. Supongamos que S_j tiene género g_j .

Teorema 2.11.1. — *Para cada $q \in S_2$ se tiene que la suma*

$$\sum_{p \in f^{-1}(q)} \text{mult}_p(f)$$

es independiente de q . Este número recibe el nombre de grado de f ; denotado por el símbolo $\text{deg}(f)$.

El resultado anterior es consecuencia de la conectividad de S_2 menos los valores de ramificación de f .

Consideremos ahora una triangulación (suficientemente pequeña) \mathcal{T}_2 de S_2 de manera que los valores de ramificación de f estén contenidos en los vértices de tal triangulación. Denotemos por v el número de vértices, por e el número de ejes y por c el número de caras de \mathcal{T}_2 .

Por la característica de Euler, obtenemos la igualdad

$$2 - 2g_2 = v - e + c.$$

Podemos levantar por f la triangulación \mathcal{T}_2 para obtener una triangulación \mathcal{T}_1 de S_1 . Se puede ver directamente que esta nueva triangulación tiene $\text{deg}(f)e$ ejes y $\text{deg}(f)c$ caras.

El conteo de vértices de \mathcal{T}_1 es un poco más complicado debido al hecho que hay puntos críticos allí. De todas maneras, si un vértice de \mathcal{T}_2 no es valor crítico de f , entonces este produce por levantamiento exactamente $\text{deg}(f)$ vértices de \mathcal{T}_1 .

Notemos, en todo caso, que

$$\begin{aligned} \text{deg}(f) &= \sum_{p \in f^{-1}(q)} \text{mult}_p(f) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} (1 + (\text{mult}_p(f) - 1)) = \\ &= v_q + \sum_{p \in f^{-1}(q)} (\text{mult}_p(f) - 1), \end{aligned}$$

donde v_q es la cantidad de preimágenes de q por f (es decir, el número de vértices en \mathcal{T}_1 sobre q). Luego, el número de vértices que tiene \mathcal{T}_1 es igual a

$$\text{deg}(f)v - \sum_{p \in S_1} (\text{mult}_p(f) - 1).$$

Usando la característica de Euler, ahora en S_1 y la triangulación \mathcal{T}_1 , obtenemos que

$$2 - 2g_1 = \left(\deg(f)v - \sum_{p \in S_1} (\text{mult}_p(f) - 1) \right) - \deg(f)e + \deg(f)c,$$

de donde obtenemos la siguiente fórmula.

Teorema 2.11.2 (Fórmula de Riemann-Hurwitz). — Si $f : S_1 \rightarrow S_2$ es una función holomorfa no-constante entre las superficies de Riemann compactas S_1 y S_2 , donde S_j tiene género g_j , entonces

$$2(g_1 - 1) - 2\deg(f)(g_2 - 1) = \sum_{p \in S_1} (\text{mult}_p(f) - 1).$$

Ejemplo 16. — Sea S una superficie compacta de género $g \geq 1$ y sea $f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una función holomorfa no-constante de grado dos, es decir, para cada $y \in \widehat{\mathbb{C}}$, el conjunto $f^{-1}(y)$ tiene cardinalidad a lo más dos. Aquellos valores y donde la cardinalidad es exactamente uno, son los valores de ramificación de f (es decir, la imagen por f de sus puntos crítico). Como f es no-constante, la cantidad de puntos críticos (y luego el número de valores de ramificación) es finito. Si N es el número de los valores de ramificación de f , entonces la parte derecha de fórmula de Riemann-Hurwitz es exactamente N , luego, tal fórmula nos dice que $N = 2(g-1) - 4(0-1) = 2g+2$.

Ejemplo 17 (Curvas generalizadas de Fermat). — Consideremos la superficie de Riemann compacta definida por la curva generalizada de Fermat de tipo (k, m) siguiente :

$$C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{m-2}}^{(k)} := \left\{ \begin{array}{l} x_1^k + x_2^k + x_3^k = 0 \\ \lambda_1 x_1^k + x_2^k + x_4^k = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{m-2} x_1^k + x_2^k + x_{m+1}^k = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{P}^m.$$

y la función meromorfa no-constante

$$\begin{aligned} \pi : C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{m-2}}^{(k)} &\rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \\ \pi([x_1 : \dots : x_{m+1}]) &= - \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^k. \end{aligned}$$

Esta función tiene grado k^n y sus valores críticos son dado por los puntos

$$\infty, 0, 1, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-2}.$$

Además, cada preimágen de cada uno de esos valores es un punto crítico con multiplicidad igual a k .

Por la fórmula de Riemann-Hurwitz, obtenemos en este caso que

$$g = \frac{m-1}{2}k^m - \frac{m+1}{2}k^{m-1} + 1.$$

Por ejemplo, si $k = 2$ y $m = 3$, obtenemos $g = 2^3 - 2^3 + 1 = 1$.

Si $m = 2$, entonces estamos en presencia de una curva de Fermat de grado k y su género es $g = (k-1)(k-2)/2$.

2.12. Automorfismos de superficies de Riemann

2.12.1. Automorfismos holomorfos. — Un biholomorfismo $f : S \rightarrow S$, donde S es una superficie de Riemann, es llamado un *automorfismo holomorfo* de S . La colección de todos los automorfismos de la superficie de Riemann S es un grupo bajo la composición y es denotado por $\text{Aut}^+(S)$.

2.12.2. Automorfismos anti-holomorfos. — Un homeomorfismo $f : S \rightarrow S$, donde S es una superficie de Riemann, es llamado un *automorfismo anti-holomorfo* de S si f es anti-holomorfa (su inversa es automáticamente anti-holomorfa). La colección de todos los automorfismos (holomorfos y anti-holomorfos) de la superficie de Riemann S es un grupo bajo la composición y es denotado por $\text{Aut}(S)$. En este caso, $\text{Aut}^+(S)$ es un subgrupo de índice 1 o 2.

Ejemplo 18. — $\text{Aut}^+(\widehat{\mathbb{C}}) \cong \text{PGL}_2(\mathbb{C})$. La matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{PGL}_2(\mathbb{C})$$

actúa como la transformación de Möbius

$$T_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Los automorfismos anti-holomorfos de $\widehat{\mathbb{C}}$ son de la forma

$$L_A(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}.$$

Ejemplo 19. —

$$\text{Aut}^+(\mathbb{C}) = \{A(z) = az + b; a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$$

$$\text{Aut}(\mathbb{C}) = \langle \text{Aut}^+(\mathbb{C}), J(z) = \bar{z} \rangle$$

Ejemplo 20. — $\text{Aut}^+(\mathbb{H}) \cong \text{PSL}_2(\mathbb{R})$. La matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$$

actúa como la transformación de Möbius

$$T_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

$$\text{Aut}(\mathbb{H}) = \langle \text{Aut}^+(\mathbb{H}), E(z) = -\bar{z} \rangle$$

Ejemplo 21. — Consideremos la curva de Fermat de grado $k \geq 3$

$$F_k := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 : x^k + y^k + z^k = 0\}.$$

$$\text{Aut}^+(F_k) = \langle a_1, a_2 \rangle \rtimes \langle b_1, b_2 \rangle \cong \mathbb{Z}_k^2 \rtimes \mathfrak{S}_3,$$

donde

$$a_1[x : y : z] = [e^{2\pi i/k} x : y : z],$$

$$a_2[x : y : z] = [x : e^{2\pi i/k} y : z],$$

$$b_1[x : y : z] = [y : x : z],$$

$$b_2[x : y : z] = [z : x : y].$$

$$\text{Aut}(F_k) = \langle \text{Aut}^+(F_k), J([x : y : z] = [\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}]) \rangle \cong \text{Aut}^+(F_k) \times \mathbb{Z}_2.$$

Ejemplo 22. — Consideremos la superficie de Riemann compacta definida por la curva generalizada de Fermat de tipo (k, m) siguiente :

$$C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{m-2}}^{(k)} := \left\{ \begin{array}{l} x_1^k + x_2^k + x_3^k = 0 \\ \lambda_1 x_1^k + x_2^k + x_4^k = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{m-2} x_1^k + x_2^k + x_{m+1}^k = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{P}^m.$$

Como ya hemos observado en el Ejemplo 17, las funciones $a_1, \dots, a_m \in \text{PGL}_{m+1}(\mathbb{C})$, donde a_j es multiplicación en la coordenada x_j por $e^{2\pi i/k}$, entonces $H = \langle a_1, \dots, a_m \rangle \cong \mathbb{Z}_k^m$ es un grupo de automorfismos holomorfos de $C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{m-2}}^{(k)}$ y

$$\pi : C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{m-2}}^{(k)} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} : [x_1 : \dots : x_{m+1}] \mapsto - \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^k$$

resulta ser un cubriente ramificado regular con grupo cobertor H .

1. Si $m = 2$, entonces estamos en presencia de la curva clásica de Fermat F_k . Ya hemos visto en el Ejemplo 21 que debe haber un grupo de automorfismos extra isomorfo a \mathfrak{S}_3 de manera que el grupo total de automorfismos holomorfos de la curva F_k es $H \rtimes \mathfrak{S}_3$.
2. Si $m = 3$, entonces podemos construir un subgrupo de automorfismos $A < \text{Aut}(C_{\lambda_1}^{(k)})$ tal que $H \triangleleft A$ y $A/H \cong \mathbb{Z}_2^2$. En la situación genérica, no hay mas automorfismos holomorfos.
3. Si $m \geq 4$, entonces genéricamente $\text{Aut}(C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{m-2}}^{(k)}) = H$.

Ejemplo 23. — Sean $\tau \in \mathbb{H}$, $G_\tau = \langle A(z) = z + 1, B_\tau(z) = z + \tau \rangle \cong \mathbb{Z}^2$ y la superficie de Riemann de género uno dada por $T_\tau = \mathbb{C}/G_\tau$.

1. Las translaciones $T(z) = z + r$, donde $r \in \mathbb{C}$, inducen automorfismos holomorfos del toro T_τ que no tienen puntos fijos. Todos estos automorfismos definen un grupo isomorfo a $S^1 \times S^1$.
2. La transformación $E(z) = -z$ también induce un automorfismo holomorfo de orden 2 sobre T_τ , actuando con 4 puntos fijos.
3. Cuando $\tau \in \{i, (1 - i\sqrt{3})/2\}$, entonces T_τ tiene más automorfismos.

2.12.3. Teorema de Hurwitz. —

Teorema 2.12.1. — *Si S es una superficie de Riemann de género $g \geq 2$, entonces $\text{Aut}(S)$ es un grupo finito. De hecho,*

$$|\text{Aut}^+(S)| \leq 84(g - 1).$$

Existen infinitos valores de $g \geq 2$ para los cuales existe una superficie de Riemann de género g con $\text{Aut}^+(S)$ de orden $84(g - 1)$ (estas superficies de Riemann son llamadas *curvas de Hurwitz*). El primer género donde existe una curva de Hurwitz es $g = 3$ y esta es única módulo isomorfismos; dada por la curva de Klein $\{x^3y + y^3z + z^3x = 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. El siguiente género admitiendo curvas de Hurwitz es $g = 7$ (curva de Fricke-Macbeath). También se sabe que existen infinitos valores de g para los cuales no hay curvas de Hurwitz.

CAPÍTULO 3

EL TEOREMA DEL DESCENSO DE WEIL

3.1. Cuerpos de definición de superficies de Riemann

Sea S una superficie de Riemann compacta. Un subcuerpo \mathbb{K} de \mathbb{C} es llamado un *cuerpo de definición* de S si existe una curva algebraica proyectiva suave C , definida por polinomios homogéneos con coeficientes en \mathbb{K} , que es isomorfa a S como superficie de Riemann. También decimos que S es *definible* sobre \mathbb{K} .

3.2. Cuerpos de móduli de superficies de Riemann

Consideremos una superficie de Riemann compacta S y sea C una curva algebraica proyectiva suave, definida por los polinomios homogéneos P_1, \dots, P_r , la cual define una superficie de Riemann isomorfa a S .

Sea $\text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$, el grupo de los automorfismos de cuerpo de \mathbb{C} .

Para $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ y $j = 1, \dots, r$, definimos el polinomio P_j^σ como aquel obtenido a partir de P_j al reemplazar cada uno de sus coeficientes por su imagen por σ . La curva algebraica C^σ , definida por estos nuevos polinomios homogéneos $P_1^\sigma, \dots, P_r^\sigma$, sigue siendo suave y define una superficie de Riemann compacta homeomorfa a S (pero podría no ser isomorfa).

Si consideremos el grupo

$$G_C = \{\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q}) : C^\sigma \cong C\},$$

entonces el cuerpo fijo $\mathcal{M}(S)$ de G_C es llamado el *cuerpo de móduli* de S .

Observemos en lo anterior que si $C \cong \widehat{C}$, entonces $G_C = G_{\widehat{C}}$. Luego, la definición anterior no depende de la elección de C que represente a S . De esta manera, el cuerpo de módulos de S queda bien definido.

Teorema 3.2.1 (Koizumi). — *Sea S una superficie de Riemann compacta. Entonces :*

1. S es definible sobre una extensión finita de $\mathcal{M}(S)$.
2. $\mathcal{M}(S)$ es igual a la intersección de todos los cuerpos de definición de S .

3.2.1. Género cero. — Por el teorema de uniformización, toda superficie de Riemann de género cero es isomorfa a $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$; en particular, ellas son definidas sobre su cuerpo de módulos el cual es \mathbb{Q} .

3.2.2. Género uno. — Toda superficie de Riemann de género uno puede ser descrita por una curva elíptica

$$E_{\lambda} = \{y^2z = x(x-z)(x-\lambda z)\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, \quad (\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}).$$

El cuerpo de módulos de E_{λ} es $\mathbb{Q}(j(\lambda))$, donde j es la j -función modular de Klein

$$j(\lambda) = \frac{4(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{27\lambda^2(\lambda - 1)^2}.$$

Se sabe que E_{λ} (so $C_{\lambda}^{(2)}$) es definible sobre $\mathbb{Q}(j(\lambda))$; de manera más concreta, $E_{\lambda} \cong C_{\lambda}^{(2)}$ es isomorfa a

1. (si $j(\lambda) \notin \{0, 1728\}$)

$$x_1^2x_2 + x_0x_1x_2 - x_0^3 + \frac{36}{j(\lambda) - 1728}x_0x_2^2 + \frac{1}{j(\lambda) - 1728}x_2^3 = 0,$$

2. (si $j(\lambda) = 0$)

$$x_1^2x_2 + x_1x_2^2 - x_0^3 = 0,$$

3. (si $j(\lambda) = 1728$)

$$x_1^2x_2 - x_0^3 - x_0x_2^2 = 0.$$

Se puede verificar que toda superficie de Riemann de género uno puede ser descrita por una curva de Fermat generalizada de tipo (2, 3). De hecho, E_{λ} es isomorfa a la curva

$$C_{\lambda}^{(2)} := \left\{ \begin{array}{l} x_1^k + x_2^k + x_3^k = 0 \\ \lambda x_1^k + x_2^k + x_4^k = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{P}^3$$

3.2.3. Género al menos dos. — Ahora, si la superficie de Riemann tiene género $g \geq 2$, entonces el cuerpo de móduli no es necesariamente un cuerpo de definición. Ejemplos de esta situación fueron provistos por Earle [10], Shimura [37] y Huggins [20, 21] para el caso de superficies de Riemann hiperelípticas. Para el caso de superficies de Riemann no-hiperelípticas, tales ejemplos fueron provistos por Hidalgo [18] y Kontogeorgis [29].

3.3. El teorema del descenso de Weil

El siguiente teorema, llamado el teorema del descenso de Galois de Weil, nos entrega condiciones suficientes para que una curva definida sobre una extensión de Galois finita de un cuerpo dado se pueda definir sobre este último.

Teorema 3.3.1 (Teorema del descenso de Galois de Weil [41])

Sea C una curva algebraica compleja proyectiva suave, definida sobre un subcuerpo \mathbb{F} de \mathbb{C} . Sea \mathbb{K} un subcuerpo de \mathbb{F} de manera que la extensión \mathbb{F}/\mathbb{K} sea de grado finito y Galois.

Supongamos que para cada $\sigma \in \Gamma = \text{Aut}(\mathbb{F}/\mathbb{K})$ existe un isomorfismo $f_\sigma : C \rightarrow C^\sigma$, definido sobre \mathbb{F} , satisfaciendo, para cada par $\sigma, \tau \in \Gamma$, la condición de compatibilidad $f_{\tau\sigma} = f_\sigma^\tau \circ f_\tau$.

Entonces existe una curva algebraica proyectiva suave E , definida sobre \mathbb{K} , y existe un isomorfismo $Q : C \rightarrow E$, definido sobre \mathbb{F} , de manera que, para cada $\sigma \in \Gamma$, se satisface que $Q^\sigma \circ f_\sigma = Q$.

En el supuesto que el género de la curva sea al menos dos (luego su grupo de automorfismos es finito), tenemos la siguiente consecuencia del Teorema 3.3.1.

Teorema 3.3.2 (teorema del descenso de Weil). — *Sea C una curva algebraica compleja proyectiva suave de género $g \geq 2$ y sea \mathbb{K} un subcuerpo de \mathbb{C} .*

Supongamos que para cada $\sigma \in \Gamma = \text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{K})$ existe un biholomorfismo $f_\sigma : C \rightarrow C^\sigma$ satisfaciendo, para cada par $\sigma, \tau \in \Gamma$, la condición de compatibilidad $f_{\tau\sigma} = f_\sigma^\tau \circ f_\tau$.

Entonces existe una curva algebraica proyectiva suave E , definida sobre \mathbb{K} , y existe un biholomorfismo $Q : C \rightarrow E$ de manera que, para cada $\sigma \in \Gamma$, se satisface que $Q^\sigma \circ f_\sigma = Q$.

Demostración. — la idea es ver que podemos usar el Teorema 3.3.1 en esta situación.

Sabemos que el cuerpo de módulos de C está contenido en \mathbb{K} . También sabemos que C puede definirse sobre una extensión finita de su cuerpo de módulos [28]. De esta manera, podemos suponer que C está definida sobre una extensión finita de Galois \mathbb{L} de \mathbb{K} .

Sea $\bar{\mathbb{L}}$ la clausura algebraica de \mathbb{L} en \mathbb{C} (que resulta también en ser clausura algebraica de \mathbb{K}). Como cada $\sigma \in \Gamma$ actúa como la identidad en \mathbb{K} , este define un automorfismo de $\bar{\mathbb{K}} = \bar{\mathbb{L}}$. Luego, de la teoría clásica de Galois, tenemos que σ actúa como un automorfismo de $\bar{\mathbb{L}}$.

Si $\tau \in \text{Aut}(\mathbb{C}/\bar{\mathbb{L}})$, entonces $C^\tau = C$ y, en particular, $\tau \in \Gamma$ and $f_\tau \in \text{Aut}(C)$. Además, para cada $\sigma \in \Gamma$ vale que $f_\sigma^\tau : C \rightarrow C^{\tau\sigma} = C^\sigma$. Como $f_\sigma \circ f_\sigma^\tau \in \text{Aut}(C)$, y este grupo es finito (ya que C tiene género al menos dos), podemos concluir que necesariamente f_σ está definido sobre $\bar{\mathbb{L}}$ (toda extensión finita de un cuerpo algebraicamente cerrado es trivial).

Consideremos la función

$$\begin{aligned} \Theta : \text{Aut}(\mathbb{C}/\bar{\mathbb{L}}) &\rightarrow \text{Aut}(C) \\ \sigma &\mapsto f_\sigma^{-1}. \end{aligned}$$

Ya que, para cada $\sigma \in \Gamma$ el isomorfismo f_σ está definido sobre $\bar{\mathbb{L}}$, la condición $f_{\eta\tau} = f_\tau^\eta \circ f_\eta$ nos asegura que Θ es un homomorfismo de grupos.

Como $\text{Aut}(C)$ es finito, el núcleo de Θ es un subgrupo de índice finito de $\text{Aut}(\mathbb{C}/\bar{\mathbb{L}})$. De esta manera, su cuerpo fijo \mathbb{N} es una extensión finita de $\bar{\mathbb{L}}$. Como este último cuerpo es algebraicamente cerrado, debemos tener $\mathbb{N} = \bar{\mathbb{L}}$. Luego, el núcleo de Θ es todo $\text{Aut}(\mathbb{C}/\bar{\mathbb{L}})$. Todo esto nos permite asegurar que si $\tau, \sigma \in \Gamma$ tienen la misma restricción a $\bar{\mathbb{L}}$, entonces $f_\tau = f_\sigma$.

Ya que \mathbb{L} es una extensión finita de Galois de \mathbb{K} , vemos que sólo hay un número finito de curvas de la forma C^τ , donde $\tau \in \text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{K})$. En particular, solo un número finitas de ellas isomorfas a C . Esto último (junto con el hecho que $\text{Aut}(C)$ es finito) nos asegura que sólo hay un número finito de isomorfismos f_σ , para $\sigma \in \Gamma$. Luego, podemos agrandar \mathbb{L} a una extensión finita de Galois de \mathbb{K} si es necesario para asumir que C y todos los isomorfismos f_σ están definidos sobre \mathbb{L} y que además $f_\sigma \neq f_\tau$ si

$\sigma, \tau \in \text{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ son diferentes. Ahora, podemos usar el Teorema 3.3.1 par obtener nuestra afirmación. \square

3.3.1. Caso genérico. — Genéricamente, toda superficie de Riemann compacta de género $g \geq 3$ no tiene automorfismos holomorfos (salvo la identidad). En tal caso, el teorema del descenso de Weil nos permite concluir que ella se puede definir sobre su cuerpo de móduli.

Por otro lado, Wolfart [42] ha verificado que si $S/\text{Aut}^+(S)$ es de género cero y tiene tres valores cónicos (se dice que S es casiplatónica), entonces S se puede definir sobre su cuerpo de móduli. De hecho, esto es algo más general, si $S/\text{Aut}^+(S)$ es de género cero y tiene una cantidad impar de valores cónicos, entonces S se puede definir sobre su cuerpo de móduli (resultados de Dèbes-Emsalem [9]).

De esta manera, vemos que aquellas superficies de Riemann que no se pueden definir sobre su cuerpo de móduli son bastante raras de encontrar.

3.3.2. Caso hiperelíptico. — En el caso que S sea una superficie de Riemann hiperelíptica, se sabe lo siguiente. Sea $\iota : S \rightarrow S$ la involución hiperelíptica (la cual es única). Como ι pertenece al centro de $\text{Aut}^+(S)$, entonces podemos mirar el grupo cociente $\text{Aut}_{red}^+(S) = \text{Aut}^+(S)/\langle \iota \rangle$, llamado el *grupo reducido de automorfismos* de S .

1. Si $g = 2$ y $\text{Aut}_{red}^+(S)$ no es trivial, entonces S se puede definir sobre su cuerpo de móduli (Quer-Cardona [3]).
2. Existen superficies de Riemann de género $g = 2$ con $\text{Aut}_{red}^+(S)$ trivial, que no se pueden definir sobre su cuerpo de móduli (Earle [10], Shimura [37]).
3. Si $g \geq 3$ es impar y $\text{Aut}_{red}^+(S)$ es trivial, entonces S se puede definir sobre su cuerpo de móduli (Lercier-Rithenzhler [31]).
4. Si $g \geq 3$ y $\text{Aut}_{red}^+(S)$ no es trivial ni cíclico, entonces S se puede definir sobre su cuerpo de móduli (Huggins [20, 21]).
5. Existen superficies de Riemann hiperelípticas de género $g \geq 3$ y $\text{Aut}_{red}^+(S)$ cíclico no-trivial que no se pueden definir sobre su cuerpo de móduli (Huggins [20, 21]).

Se conjetura (esto lo aprendí de J. Wolfart) que toda superficie de Riemann compacta se puede definir sobre un cuerpo que es extensión de grado

a lo más 2 de su cuerpo de móduli. He logrado ver que esta propiedad vale en muchos casos.

Teorema 3.3.3. — *Si S una superficie de Riemann tal que $S/\text{Aut}^+(S)$ es (i) de género a lo más 2 o bien (ii) una superficie hiperelítica, entonces S se puede definir sobre una extensión de grado dos de su cuerpo de móduli. En particular, esto vale para superficies de Riemann de género $g \leq 4$, superficies de Riemann hiperelíticas y superficies de Riemann de Fermat generalizadas.*

En los ejemplos conocidos, de superficies de Riemann compactas que no se pueden definir sobre su cuerpo de móduli, se tiene que este cuerpo de móduli es un subcuerpo de \mathbb{R} , pero que \mathbb{R} no es un cuerpo de definición (volveremos a esta situación en el próximo capítulo). En particular, en tales ejemplos conocidos, la superficie se define sobre una extensión de grado 2 no-real.

No conozco en la literatura un ejemplo de una superficie de Riemann que tenga cuerpo de móduli \mathbb{Q} , que este no sea cuerpo de definición, y que se pueda definir sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Al parecer, junto a S. Quispes hemos logrado construir ejemplos explícitos de superficies de Riemann (tanto hiperelíticas como no-hiperelíticas) que están definidas sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, cuyo cuerpo de móduli es \mathbb{Q} , pero que no se pueden definir sobre \mathbb{Q} .

CAPÍTULO 4

SUPERFICIES DE RIEMANN REALES

4.1. Superficies de Riemann reales

Hemos ya visto que una superficie de Riemann compacta S puede ser descrita por una curva algebraica proyectiva suave $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$. La curva C es definida por una colección finita de polinomios homogéneos con coeficientes en \mathbb{C} . La curva C no es única y es posible encontrar otras tales curvas definiendo S .

Diremos que S es una *superficie de Riemann real* (*superficie de Riemann simétrica*) si es posible encontrar una curva C de manera que los polinomios que la definen tengan coeficientes en \mathbb{R} .

4.2. Condición necesaria y suficiente para ser superficie de Riemann real

4.2.1. Una condición necesaria. — Supongamos que la superficie de Riemann compacta S es real, es decir, existe una curva algebraica proyectiva suave $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, definida como los ceros comunes de los polinomios homogéneos

$$P_1, \dots, P_{n-1} \in \mathbb{R}[z_0 : \dots : z_n].$$

Consideremos la conjugación

$$\begin{aligned} J : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n &\rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \\ [z_0 : \dots : z_n] &\mapsto [\bar{z}_0 : \dots : \bar{z}_n]. \end{aligned}$$

Esta función J deja invariante C y define (por restricción a ella) un automorfismo anti-holomorfo de orden 2. Es decir, S admite un automorfismo anti-holomorfo de orden 2 (llamada una *simetría* de S). Hemos concluido la siguiente condición necesaria.

Proposición 4.2.1. — *Toda superficie de Riemann real admite una simetría.*

4.2.2. La condición necesaria anterior es suficiente. — Supongamos ahora que tenemos una superficie de Riemann compacta S que admite una simetría, es decir, un automorfismo anti-holomorfo de orden 2, digamos $\tau : S \rightarrow S$.

En el caso no-hiperelíptico, se puede encontrar una base de diferenciales holomorfas de S , digamos $\omega_1, \dots, \omega_g$, que es invariante bajo la acción de τ (en el sentido que al hacer un pull-back de cualquiera de ellas obtenemos la conjugada de alguna de ellas). Al considerar la incrustación holomorfa

$$\begin{aligned} \phi : S &\rightarrow \phi(S) = C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{g-1} \\ p &\mapsto [\omega_1(p) : \dots : \omega_g(p)] \end{aligned}$$

la simetría τ define una simetría de C , la cual se puede asumir tener la forma

$$\begin{aligned} R : C &\rightarrow C \\ [z_0 : \dots : z_n] &\mapsto [R_0(\bar{z}_0, \dots, \bar{z}_n) : \dots : R_n(\bar{z}_0, \dots, \bar{z}_n)] \end{aligned}$$

donde $R_0, \dots, R_n \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ son polinomios homogéneos del mismo grado.

En el caso que S es hiperelíptica, la situación anterior también funciona usando diferenciales holomorfas de mayor orden.

Supongamos que la curva algebraica proyectiva suave $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, está definida como los ceros comunes de los polinomios homogéneos

$$P_1, \dots, P_{n-1} \in \mathbb{C}[z_0 : \dots : z_n],$$

que define a S (es decir, como superficies de Riemann son isomorfas).

Sea $\bar{C} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ la curva definida por los polinomios

$$\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_{n-1} \in \mathbb{C}[z_0 : \dots : z_n],$$

donde \bar{P}_j se obtiene del polinomio P_j al reemplazar sus coeficientes por sus conjugados complejos. Se puede verificar que \bar{C} es suave, luego define una nueva superficie de Riemann compacta, digamos \bar{S} .

La conjugación J antes definida satisface que $J(C) = \bar{C}$ y, además,

$$J : C \rightarrow \bar{C}$$

resulta un isomorfismo anti-holomorfo entre superficies de Riemann. Luego,

$$F := J \circ R : C \rightarrow \overline{C}$$

resulta ser un isomorfismo holomorfo.

$\overline{F} = J \circ F \circ J = R \circ J$ es la función obtenida de F al reemplazar cada uno de sus coeficientes por su complejo conjugado.

Notemos que

$$\overline{F} : \overline{C} \rightarrow C$$

es un isomorfismo holomorfo y que

$$\overline{F} \circ F = I.$$

El Teorema del descenso de Weil asegura que existe una curva algebraica proyectiva suave $D \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^m$, definida por polinomios homogéneos con coeficientes reales, que es isomorfa a C .

En resumen :

Teorema 4.2.2. — *Sea S una superficie de Riemann compacta. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes.*

1. S es simétrica.
2. S es una superficie de Riemann real.

4.3. Ejemplos

Ejemplo 24. — La esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ admite muchas simetrías; por ejemplo, $T(z) = \bar{z}$ (la cual tiene puntos fijos) y $L(z) = -1/\bar{z}$ (la cual no tiene puntos fijos). Como esta superficie es isomorfa a $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, vemos que es real.

Ejemplo 25. — Sea $\tau \in \mathbb{H}$, y consideremos el toro $S_{\tau} = \mathbb{C}/G_{\tau}$, donde G_{τ} está generado por las translaciones $A(z) = z + 1$ y $B_{\tau}(z) = z + \tau$. Si se tiene que $|\tau| = 1$ o bien $\text{Re}(\tau) \in \{0, 1/2\}$, entonces se puede verificar que S_{τ} es simétrica. De manera más general, S_{τ} es simétrica si y sólo si τ se puede llevar por $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) < \text{Aut}^+(\mathbb{H})$ a un τ como arriba.

Ejemplo 26. — La curva de Fermat de grado k ,

$$F_k := \{x^k + y^k + z^k = 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$$

es simétrica. Una simetría es dada por la restricción de la conjugación

$$\begin{aligned} J : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 &\rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \\ [x : y : z] &\mapsto [\bar{x} : \bar{y} : \bar{z}] \end{aligned}$$

Ejemplo 27. — La curva generalizada de Fermat de tipo $(k, 3)$

$$C_{\lambda}^{(k)} := \left\{ \begin{array}{l} x_1^k + x_2^k + x_3^k = 0 \\ \lambda x_1^k + x_2^k + x_4^k = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$$

donde $\lambda \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ es simétrica si y sólo si

$$j(\lambda) = \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2} \in \mathbb{R}.$$

Ejemplos de tales valores de λ son :

1. $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
2. $|\lambda| = 1, \lambda \neq 1$.
3. $\lambda = \frac{1 + ai}{2}, a \in \mathbb{R}$.

CAPÍTULO 5

CURVAS DE BELYI

5.1. Curvas de Belyi, funciones de Belyi y pares de Belyi

Una superficie de Riemann compacta S es llamada una *curva de Belyi* si existe una función meromorfa no-constante

$$\beta : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

cuyos valores de ramificación están contenidos en $\{\infty, 0, 1\}$.

La función β anterior es llamada una *función de Belyi* y el par (S, β) es llamado un *par de Belyi*. El género de S es también llamado el género del par de Belyi (S, β) .

Ejemplo 28 (Esfera de Riemann). — La esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ es una curva de Belyi. Por ejemplo, $\beta(z) = z$ es una función de Belyi (la cual no tiene valores de ramificación).

Otras funciones de Belyi para $\hat{\mathbb{C}}$, son por ejemplo,

1. $\beta(z) = z^n$, donde $n \in \{2, 3, \dots\}$. En estos casos, los únicos valores de ramificación son 0 y ∞ .
2. $\beta(z) = 4z(1 - z)$. Esta función de Belyi tiene como valores de ramificación a 1 y ∞ .
3. Los siguientes ejemplos provienen de los *polinomios de Tchebyshev* $T_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$, definidos como

$$T_1(z) = z$$

$$T_2(z) = 2z^2 - 1$$

$$T_{n+1}(z) = 2zT_n(z) - T_{n-1}(z), \quad n \geq 2.$$

El polinomio de Tchebyshev T_n tiene grado n y satisface las siguientes propiedades :

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

$$T_n : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$$

T_n tiene sus ceros (todos simples) en los puntos

$$\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad k = 1, \dots, n,$$

entre dos ceros consecutivos de T_n hay un cero doble de $T_n - 1$ o un cero doble de $T_n + 1$, y

$$T_n(-1), T_n(1) \in \{-1, 1\}.$$

Vemos que T_1 y T_2 son funciones de Belyi, pero T_n no lo es para $n \neq 3$. De todas maneras, $\beta_n(z) = T_n^2(z)$ sí resulta ser una función de Belyi.

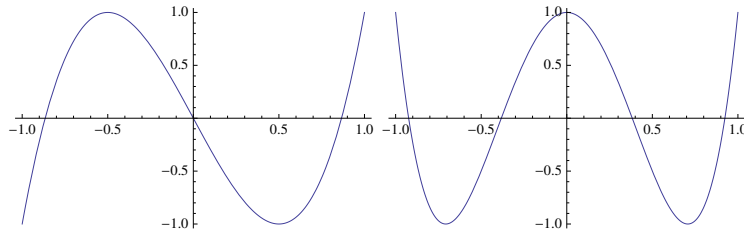


FIGURA 5.1. Gráficas de $T_3(z) = 4z^3 - 3z$ y $T_4(z) = 8z^4 - 8z^2 + 1$

Ejemplo 29 (Curvas de Fermat). — La curva de Fermat

$$F_k := \{x^k + y^k + z^k = 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$$

es una curva de Belyi. Una función de Belyi es dada, por ejemplo,

$$\beta([x : y : z]) = -\left(\frac{y}{x}\right)^k$$

la cual tiene como valores de ramificación a ∞ , 0 y 1 (cada uno de orden k).

Ejemplo 30. — Sea $H < \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ un grupo no-trivial finito de transformaciones de Möbius. Sea sabe que debemos tener alguna de las siguientes posibilidades :

1. $H \cong \mathbb{Z}_n$ (grupo cíclico de orden n); en cuyo caso $\mathcal{O}_{(n,n)} = \widehat{\mathbb{C}}/H$ es la esfera de Riemann con dos puntos cónicos de orden n .
2. $H \cong \mathbb{D}_n$ (grupo dihedral de orden $2n$); en cuyo caso $\mathcal{O}_{(2,2,n)} = \widehat{\mathbb{C}}/H$ es la esfera de Riemann con tres puntos cónicos de ordenes 2, 2 y n .
3. $H \cong \mathcal{A}_4$ (grupo alternante de orden 12); en cuyo caso $\mathcal{O}_{(2,3,3)} = \widehat{\mathbb{C}}/H$ es la esfera de Riemann con tres puntos cónicos de ordenes 2, 3 y 3.
4. $H \cong \mathcal{A}_5$ (grupo alternante de orden 60); en cuyo caso $\mathcal{O}_{(2,3,5)} = \widehat{\mathbb{C}}/H$ es la esfera de Riemann con tres puntos cónicos de ordenes 2, 3 y 5.
5. $H \cong \mathfrak{S}_4$ (grupo simétrico de orden 24); en cuyo caso $\mathcal{O}_{(2,3,4)} = \widehat{\mathbb{C}}/H$ es la esfera de Riemann con tres puntos cónicos de ordenes 2, 3 y 4.

En cada uno de los casos posible, podemos encontrar una función racional $\beta_H : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ de grado $|H|$ tal que $\beta_H(h(z)) = \beta_H(z)$, para cada $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ y cada $h \in H$, de manera que sus valores de ramificación estén contenidos en el conjunto $\{\infty, 0, 1\}$ (luego una función de Belyi para $\widehat{\mathbb{C}}$).

Ahora, supongamos que tenemos una superficie de Riemann S y una función meromorfa no-constante $f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, de manera que sus valores de ramificación estén contenidos en el conjunto de los puntos fijos de los elementos no-triviales de H . Entonces, $\beta = \beta_H \circ f$ resulta ser una función de Belyi de S , en particular, que S es una curva de Belyi.

Ejemplo 31 (Un caso particular del ejemplo anterior)

Consideremos la superficie de Riemann (de género 1) asociada a la curva generalizada de Fermat

$$C_{-1}^{(2)} := \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ -x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}.$$

Tenemos la función meromorfa

$$f : C_{-1}^{(2)} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$$

$$f([x_1 : x_2 : x_3 : x_4]) = - \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2.$$

Los valores de ramificación de F son dados por $\infty, 0, 1$ y -1 .

En este ejemplo tomamos $H = \langle h(z) = -z \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ y $\beta_H(z) = z^2$. Entonces,

$$\beta([x_1 : x_2 : x_3 : x_4]) = \beta_H \circ f([x_1 : x_2 : x_3 : x_4]) = \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^4$$

es una función de Belyi para $C_{-1}^{(2)}$.

5.2. Teorema de Belyi

Como consecuencia del teorema del descenso de Weil, se puede obtener una caracterización algebraica de las curvas de Belyi.

Teorema 5.2.1 (Teorema de Belyi, 1980). — *Sea S una superficie de Riemann compacta. Entonces las siguientes son equivalentes.*

1. S es una curva de Belyi.
2. S es definible sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.

La implicancia (1) hacia (2) es consecuencia del teorema del descenso de Weil. Para ver la otra dirección, Belyi construye de manera explícita una función de Belyi.

5.3. Equivalencia de pares de Belyi

Una consecuencia directa del teorema de Belyi es el siguiente. Si (S, β) es un par de Belyi, entonces podemos encontrar un par de Belyi (C, β_C) , donde C es una curva algebraica proyectiva suave definida sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ (y β_C es una función racional también definida sobre $\overline{\mathbb{Q}}$) y un biholomorfismo $f : S \rightarrow C$ tal que $\beta_C \circ f = \beta$.

Diremos que dos pares de Belyi, (S_1, β_1) y (S_2, β_2) , son *isomorfos* (denotado esto con el símbolo $(S_1, \beta_1) \cong (S_2, \beta_2)$) si existe un biholomorfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ tal que $\beta_2 \circ f = \beta_1$.

5.4. Automorfismos de pares de Belyi

Consideremos un par de Belyi (S, β) .

Un *automorfismo holomorfo* de (S, β) es un automorfismo holomorfo $f : S \rightarrow S$ tal que $\beta = \beta \circ f$.

Un *automorfismo anti-holomorfo* de (S, β) es un automorfismo anti-holomorfo $h : S \rightarrow S$ tal que $\beta \circ h = J \circ \beta$, donde $J(z) = \bar{z}$.

Denotaremos por $\text{Aut}(S, \beta)$ al grupo de todos los automorfismos (holomorfos y anti-holomorfos) del par de Belyi (S, β) y por $\text{Aut}^+(S, \beta)$ a su subgrupo de los automorfismos holomorfos.

Ejemplo 32. — Sea $S = \widehat{\mathbb{C}}$ y $\beta(z) = z^3$. Entonces (S, β) es un par de Belyi. Podemos ver que

$$f(z) = e^{2\pi i/3}z \in \text{Aut}^+(S, \beta)$$

$$h(z) = \bar{z} \in \text{Aut}(S, \beta) \setminus \text{Aut}^+(S, \beta).$$

De hecho, se puede verificar que

$$\mathbb{Z}_3 \cong \langle f \rangle = \text{Aut}^+(S, \beta)$$

$$\mathfrak{S}_3 \cong \langle f, h \rangle = \text{Aut}(S, \beta).$$

5.5. Par de Belyi regular

Un par de Belyi (S, β) es llamado *regular* si el grado de β coincide con el orden de $\text{Aut}^+(S, \beta)$; en otras palabras, la función β es un cubriente ramificado regular dado por la acción del grupo $\text{Aut}^+(S, \beta)$.

Del ejemplo anterior, podemos ver que $(\widehat{\mathbb{C}}, \beta(z) = z^3)$ es un par de Belyi regular. Otros ejemplos de tal tipo son los dados anteriormente en el Ejemplo 30 usando $H < \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ finito y β_H .

5.6. Pares de Belyi reales

Diremos que un par de Belyi (S, β) es *real* si existe una simetría de S , digamos $R : S \rightarrow S$, de manera que $\beta \circ R = J \circ \beta$, donde $J(z) = \bar{z}$.

Luego, por lo visto anteriormente, S es definible sobre \mathbb{R} . Por otro lado, por el teorema de Belyi, S también es definible sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.

Un resultado debido a Köck-Singerman [26] y Koeck-Lau [27], asegura que es posible definir S sobre $\mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Q}}$.

5.7. Acción del grupo absoluto de Galois sobre pares de Belyi

Consideremos un par de Belyi (S, β) . Sabemos, por el teorema de Belyi, que (S, β) es isomorfa un par de Belyi (C, β_C) , donde C es una curva algebraica proyectiva suave y β_C es una función racional, ambas definidas sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.

Supongamos que C está definida por los polinomios homogéneos P_1, \dots, P_r , con coeficientes en $\overline{\mathbb{Q}}$, y que $\beta_C = P/Q$, donde P y Q son polinomios homogéneos del mismo grado, también definidos sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.

Si $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, entonces podemos considerar los nuevos polinomios homogéneos, $P_1^\sigma, \dots, P_r^\sigma, P^\sigma$ y Q^σ . Sea C^σ la curva algebraica proyectiva suave definida por $P_1^\sigma, \dots, P_r^\sigma$ y sea $\beta^\sigma = P^\sigma/Q^\sigma$. Entonces, (C^σ, β^σ) es otro par de Belyi, del mismo género que (C, β) , pero que podrían no ser isomorfos.

El cuerpo fijo del grupo $G_{(C, \beta)} = \{\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) : (C^\sigma, \beta^\sigma) \cong (C, \beta)\}$ es llamado el *cuerpo de módulos del par de Belyi* (C, β) . Esta definición no depende de la elección de (C, β) y luego esto permite definir, sin ambigüedad, el cuerpo de módulos del par de Belyi (S, β) .

El proceso anterior permite definir de manera natural una acción del grupo absoluto de Galois $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sobre el espacio de clases de equivalencia de isomorfía de pares de Belyi de un género dado.

Ejemplo 33 (Curva de Fermat). — Consideremos el par de Belyi (F_k, β) , donde

$$F_k := \{x^k + y^k + z^k = 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$$

$$\beta([x : y : z]) = -\left(\frac{y}{x}\right)^k.$$

En este caso, como F_k y β están definidas sobre \mathbb{Q} , tenemos que, la clase del par de Belyi (F_k, β) es un punto fijo para cada $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Teorema 5.7.1. — *La acción del grupo absoluto de Galois $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sobre el espacio de clases de equivalencia de isomorfía de pares de Belyi de un género dado es fiel.*

Para el caso de pares de Belyi de género $g = 1$, lo anterior fue observado por Grothendieck. Para $g = 0$, esto fue verificado por Schneps [36]. Para $g \geq 2$, esto fue observado por González-Diez y Gironde (para el caso hiperelíptico) [15]. En el caso no-hiperelíptico esto es observado en [19].

CAPÍTULO 6

UNIFORMIZACIÓN

6.1. Grupos Kleinianos

Otra manera de construir superficies de Riemann es por medio de *grupos Kleinianos*, es decir, subgrupos discretos del grupo $\mathbb{M} \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ de automorfismos holomorfos de la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$.

Hay una biyección natural entre \mathbb{M} y $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ dada por

$$\Theta : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{M}$$

donde, si

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$$

entonces

$$\Theta(A)(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Diremos que un grupo $G < \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ *actúa discontinuamente* sobre el punto $z \in \hat{\mathbb{C}}$ si :

1. el G -estabilizador de z

$$G_z = \{A \in G : A(z) = z\}$$

es finito, y

2. existe una vecindad abierta U de z tal que

$$A(U) \cap U = \emptyset, \quad A \in G - G_z.$$

La *región de discontinuidad* de un grupo $G < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ es el conjunto abierto $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ (el cual puede ser o no vacío) consistiendo de todos los puntos sobre los cuales G actúa discontinuamente.

Teorema 6.1.1. — Si $G < \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ tiene región de discontinuidad no vacía, entonces G es un grupo Kleiniano.

Ejemplo 34 (Grupos Kleinianos con región de discontinuidad vacía)

El grupo $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[i])$ es un grupo Kleiniano con región de discontinuidad vacía.

Teorema 6.1.2. — Sea $G < \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ un grupo Kleiniano con región de discontinuidad $\Omega \neq \emptyset$. Sea Δ una colección de componentes conexas de Ω que forma una órbita bajo la acción de G . Si cada punto de Δ tiene G -estabilizador trivial, entonces Δ/G es una superficie de Riemann.

Ejemplo 35 (Grupos abelianos de rango 2). — Sea $G = \langle A(z) = z + 1, B(z) = z + \tau \rangle \cong \mathbb{Z}^2$, donde $\tau \in \mathbb{H}$. La región de discontinuidad de G es \mathbb{C} . Es claro que todo punto de \mathbb{C} es sólo estabilizado por la identidad en G . De esta manera, el teorema anterior nos dice que \mathbb{C}/G es una superficie de Riemann (de género $g = 1$).

Ejemplo 36 (Grupos cíclicos infinitos). — Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| \notin \{0, 1\}$. Consideremos $G = \langle A(z) = \lambda z \rangle \cong \mathbb{Z}$. En este caso, la región de discontinuidad de G es $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y cada punto allí tiene G -estabilizador trivial. Se tiene que $\mathbb{C} \setminus \{0\}/G$ es una superficie de Riemann (de género $g = 1$).

Ejemplo 37 (Grupos cíclicos finitos). — Sea $n \geq 2$ un entero y consideremos $G = \langle A(z) = e^{2\pi i/n} z \rangle \cong \mathbb{Z}_n$. En este caso, la región de discontinuidad de G es $\hat{\mathbb{C}}$ y cada punto en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tiene G -estabilizador trivial. Se tiene que $\mathbb{C} \setminus \{0\}/G$ es una superficie de Riemann no compacta isomorfa a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. El cociente $\hat{\mathbb{C}}/G$ es un orbifold de género cero con dos puntos cónicos, ambos de orden n .

Ejemplo 38 (Grupos finitos). — Sea G un grupo finito de \mathbb{M} y no cíclico (luego, dihedral o alternante $\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5$ o simétrico \mathfrak{S}_4). En este caso, la región de discontinuidad de G es $\hat{\mathbb{C}}$. Se tiene que $\hat{\mathbb{C}}/G$ es un orbifold de género cero con tres puntos cónicos.

6.2. Lema de Selberg

Recordemos el siguiente resultado que nos permite asegurar la existencia de ciertos subgrupos de índice finito de grupos finitamente generados de matrices (nuestro caso).

Teorema 6.2.1 (Lema de Selberg). — *Todo subgrupo de matrices que es finitamente generado tiene un subgrupo de índice finito que es normal y sin torsión.*

Una consecuencia bonita del Lema de Selberg es el siguiente. Si G es un grupo infinito de matrices que es finitamente generado, entonces G debe tener un elemento de orden infinito.

6.3. Teoremas de uniformización

Teorema 6.3.1 (Klein, Koebe, Poincaré). — *Toda superficie de Riemann simplemente conexa es isomorfa a una (y sólo una) de las siguientes :*

$$\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{H}.$$

Una consecuencia directa del Teorema de uniformización es el siguiente.

Teorema 6.3.2. — *Sea S una superficie de Riemann. Entonces S es isomorfa a una superficie de Riemann de la forma \tilde{S}/G , donde $\tilde{S} \in \{\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, $G < \text{Aut}^+(\tilde{S})$ es un grupo Kleiniano que actúa discontinuamente en \tilde{S} y el G -estabilizador de cada punto de \tilde{S} es trivial.*

6.3.1. Caso $\tilde{S} = \hat{\mathbb{C}}$. — Como toda transformación de Möbius actúa con puntos fijos, el único grupo G que satisface las condiciones del Teorema 6.3.2 es el trivial $G = \{I\}$ y en consecuencia S es isomorfa a $\hat{\mathbb{C}}$.

6.3.2. Caso $\tilde{S} = \mathbb{C}$. — Como

$$\text{Aut}^+(\mathbb{C}) = \{A(z) = az + b; a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$$

y toda transformación del tipo $A(z) = az + b$, con $a \neq 0, 1$ tiene puntos fijos en \mathbb{C} , un grupo G como en el Teorema 6.3.2 debe satisfacer que

$$G < \{T(z) = z + b; b \in \mathbb{C}\}.$$

Por otro lado, la discretitud de G obliga a tener sólo tres posibilidades :

1. $G = \{I\}$.
2. $G = \langle A(z) = z + b \rangle \cong \mathbb{Z}; \quad (b \neq 0)$.
3. $G = \langle A(z) = z + b, B(z) = z + c \rangle \cong \mathbb{Z}^2; \quad (b, c \text{ son } \mathbb{R}\text{-linealmente independientes})$.

En el caso 1., tenemos que S es isomorfa a \mathbb{C} .

En el caso 2., tenemos que S es isomorfa a $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

En el caso 3., tenemos que S es una superficie de Riemann de género 1.

6.3.3. Caso $\tilde{S} = \mathbb{H}$. — De lo anterior, observamos que para toda superficie de Riemann S que no es isomorfa a $\hat{\mathbb{C}}$ o \mathbb{C} o \mathbb{C}^* o a un toro, se tiene que en el Teorema 6.3.2 vale que $\tilde{S} = \mathbb{H}$. En este caso decimos que S es una superficie de Riemann *hiperbólica*.

6.4. Grupos Fuchsianos

Un *grupo Fuchsiano* es un grupo Kleiniano que deja invariante el semiplano superior

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\},$$

es decir, un subgrupo discreto de $\text{Aut}^+(\mathbb{H})$.

Teorema 6.4.1. — *Sea $G < \text{Aut}^+(\mathbb{H})$. Entonces, G es discreto si y sólo si actúa discontinuamente sobre \mathbb{H} .*

El resultado anterior nos dice que si G es un grupo Fuchsiano para el cual todo punto de \mathbb{H} tiene G -estabilizador trivial, entonces \mathbb{H}/G es una superficie de Riemann hiperbólica.

En \mathbb{H} podemos considerar la métrica hiperbólica

$$ds = \frac{|dz|}{\text{Im}(z)}.$$

La estructura geométrica (\mathbb{H}, ds) es llamado el *plano hiperbólico*.

Teorema 6.4.2. —

$$\text{Isom}(\mathbb{H}, ds) = \text{Aut}(\mathbb{H})$$

Las líneas rectas en el plano hiperbólico, llamadas *rectas o líneas hiperbólicas*, son de dos tipos (ver Figura 6.1) :

1. semi-rectas euclidianas perpendiculares al borde \mathbb{R} .
2. semi-círculos euclidianos perpendiculares al borde \mathbb{R} .

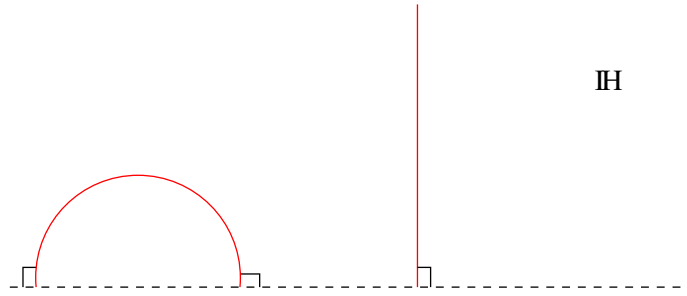


FIGURA 6.1. Rectas hiperbólicas

Una manera de construir grupos Fuchsianos es considerar un polígono geodésico $P \subset \mathbb{H}$ e identificar pares de sus lados usando algunas isometrías (con algunas restricciones técnicas). El grupo G generado por tales isometrías resulta ser un grupo Fuchsiano (el polígono P es un *polígono fundamental para G*). Este hecho es conocido como *teorema del polígono de Poincaré*. En la próxima sección veremos un ejemplo usando triángulos.

6.5. Grupos triangulares

Consideremos un triángulo geodésico $\Delta(a, b, c)$, cuyos ángulos son de la forma

$$\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{b}, \frac{\pi}{c}$$

donde $a, b, c \in \{2, 3, \dots\} \cup \{\infty\}$ y tal que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1.$$

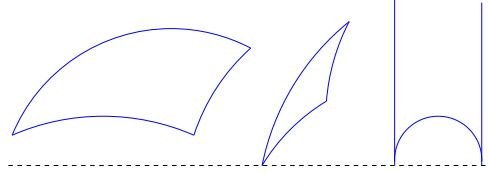


FIGURA 6.2. Triángulos geodésicos

Sea σ_k la reflexión en el lado opuesto al vértice de ángulo π/k , donde $k \in \{a, b, c\}$, y $\widehat{G}(a, b, c)$ el grupo generado por las reflexiones σ_a, σ_b y σ_c . Entonces, $\widehat{G}(a, b, c)$ resulta ser un grupo discontinuo en \mathbb{H} (que contiene isometrías que revierten la orientación), donde el triángulo $\Delta(a, b, c)$ es un polígono fundamental, y tiene una presentación de la forma :

$$\widehat{G}(a, b, c) = \langle \sigma_a, \sigma_b, \sigma_c : \sigma_a^2 = \sigma_b^2 = \sigma_c^2 = (\sigma_c \sigma_a)^b = (\sigma_b \sigma_a)^c = (\sigma_c \sigma_b)^a = 1 \rangle.$$

Sea $G(a, b, c)$ el subgrupo de índice 2 de $\widehat{G}(a, b, c)$ que consiste de aquellas isometrías que preservan la orientación. Así, $G(a, b, c)$ es un grupo Fuchsiano y, si tomamos

$$\gamma_1 = \sigma_c \sigma_b, \quad \gamma_2 = \sigma_a \sigma_c,$$

entonces

$$G(a, b, c) = \langle \gamma_1, \gamma_2 : \gamma_1^a = \gamma_2^b = (\gamma_2 \gamma_1)^c = 1 \rangle.$$

Un polígono fundamental para $G(a, b, c)$ es dado por la unión de $\Delta(a, b, c) \cup \sigma_c(\Delta(a, b, c))$ (Ver Figura 6.3).

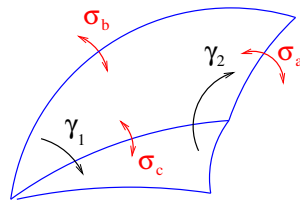


FIGURA 6.3. Polígono fundamental para $G(a, b, c)$

El espacio cociente $\mathbb{H}/\widehat{G}(a, b, c)$ es una copia de $\Delta(a, b, c)$ y el espacio cociente $\mathcal{O}(a, b, c) = \mathbb{H}/G(a, b, c)$ es una esfera con tres puntos cónicos,

de ordenes a , b y c (un punto cónico de orden ∞ es una pinchadura, es decir, no está presente). Este cociente $\mathcal{O}(a, b, c)$ es llamada una *orbifold de Riemann de signatura* $(0; a, b, c)$. Este orbifold tiene como superficie de Riemann subyacente la dada por la esfera de Riemann menos aquellos puntos cónicos con orden ∞ .

6.5.1. $\Gamma(2)$: el caso $(a, b, c) = (\infty, \infty, \infty)$. — Como caso particular, supongamos $a = b = c = \infty$. En este caso, podemos poner como $\Delta(\infty, \infty, \infty)$ al triángulo geodésico cuyos vértices son 0, 1 y ∞ (ver Figura 6.4).

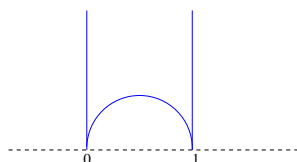


FIGURA 6.4. $\Delta(\infty, \infty, \infty)$

En este caso

$$G(\infty, \infty, \infty) = \Gamma(2) = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z},$$

$$\gamma_1(z) = z + 2, \quad \gamma_2(z) = \frac{z}{1 - 2z},$$

$$\mathcal{O}(\infty, \infty, \infty) = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}.$$

6.6. Grupos triangulares y curvas de Belyi

Consideremos un subgrupo K , de índice finito, de un grupo triangular $G(a, b, c)$, donde $a, b, c \in \{2, 3, \dots\} \cup \{\infty\}$ y

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1.$$

Si K no tiene torsión, entonces $S = \mathbb{H}/K$ resulta ser una superficie de Riemann (compacta si y sólo si $a, b, c \in \{2, 3, \dots\}$). En el caso que alguno de los valores a, b, c sea ∞ , S resulta ser el complemento de un número finito de puntos de una superficie de Riemann compacta (la cual es única módulo isomorfismos).

Para lo que sigue, sólo necesitamos asumir que K tiene índice finito N en $G(a, b, c)$ (pero K puede tener torsión). La orbifold de Riemann \mathbb{H}/K

tiene una estructura natural de superficie de Riemann (compacta si ninguno de los valores a , b o c es igual a ∞). En este caso, tenemos una función meromorfa no-constante natural (de grado N)

$$\beta : \mathbb{H}/K \rightarrow \mathbb{H}/G(a, b, c) \subset \widehat{\mathbb{C}},$$

la cual resulta ser, por la construcción, una función de Belyi (considerando la superficies de Riemann compacta asociada).

Por ejemplo, al considerar $\Gamma(2) = G(\infty, \infty, \infty)$ en lo anterior (luego K no tiene torsión), tenemos que \mathbb{H}/K es el complemento de una colección finita de puntos de una superficie de Riemann S , la cual resulta ser una curva de Belyi.

Ahora, consideremos un par de Belyi (S, β) . Sea $S^0 = S \setminus \beta^{-1}(\{\infty, 0, 1\})$ y consideremos la función holomorfa (no-ramificada) $\beta^0 : S^0 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Por el teorema de uniformización, existe un subgrupo K of $\Gamma(2)$ (de índice igual al grado de β) tal que, módulo isomorfismos, $S^0 = \mathbb{H}/K$ y β es inducido por la inclusión de K en $\Gamma(2)$.

Todos los argumentos anteriores permiten obtener los siguientes teoremas; mayores detalles pueden encontrarse, por ejemplo, en [23].

Teorema 6.6.1. — *Existe una biyección natural entre las clases de equivalencia de los pares de Belyi y las clases de conjugación de los subgrupos de índice finito de $\Gamma(2)$.*

Más aún, si (S, β) is un par de Belyi y

$$a = \text{lcm}\{\deg(v) : v \in S, \beta(v) = 0\}$$

$$b = \text{lcm}\{\deg(v) : v \in S, \beta(v) = 1\}$$

$$c = \text{lcm}\{\deg(v) : v \in S, \beta(v) = \infty\}$$

satisfacen que $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} < 1$, entonces existe un subgrupo K del grupo triangular Fuchsiano $G(a, b, c)$ (de índice igual al grado de β) tal que la estructura de superficie de Riemann del orbifold \mathbb{H}/K es (isomorfa a) S y β es equivalente a la proyección natural dada por la inclusión de K en $G(a, b, c)$.

La situación anterior es similar si reemplazamos \mathbb{H} por $\widehat{\mathbb{C}}$ (respectivamente, \mathbb{C}) si $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} > 1$ (respectivamente, $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = 1$).

Teorema 6.6.2. — *Existe una biyección natural entre las clases de equivalencia de los pares de Belyi, con a , b y c como antes, y las clases de conjugación de los subgrupos de índice finito de $G(a, b, c)$.*

CAPÍTULO 7

ACCIÓN DE GRUPOS Y $\text{Aut}(\mathfrak{S}_n)$

7.1. Acción de Grupos

Consideremos un conjunto $E \neq \emptyset$ y denotemos por $\text{Sym}(E)$ (con la operación de composición) al grupo de las permutaciones (simetrías) de E . Cuando $E = \{1, \dots, n\}$ (donde $n \geq 1$), es clásico denotar este grupo por el símbolo \mathfrak{S}_n . Consideremos también un grupo G .

Una *acción* del grupo G en el conjunto E es un homomorfismo

$$\theta : G \rightarrow \text{Sym}(E).$$

Si tal homomorfismo es inyectivo, entonces hablamos de una *Acción fiel*. Recordar que la condición para que θ sea un homomorfismo es tener la igualdad

$$\theta(gh) = \theta(g) \circ \theta(h), \quad \forall g, h \in G.$$

Si $e \in E$, entonces usaremos la notación

$$g(e) := \theta(g)(e)$$

en cuyo caso, la propiedad de ser θ un homomorfismo se lee como

$$g_1 g_2(e) = g_1(g_2(e)).$$

El G -estabilizador de e por tal acción es definido por el subgrupo

$$G_e = \{g \in G : g(e) = e\}$$

El *grupo de automorfismos* es el centralizador $C_G < \text{Sym}(E)$ del subgrupo $\theta(G)$.

Observación 7.1.1. — Si tenemos una acción, la cual no es fiel, se puede obtener una fiel considerando la acción natural del grupo cociente $G/\ker(\theta)$. Es por esta razón que sólo nos centraremos en acciones fieles.

La acción $\theta : G \rightarrow \text{Sym}(E)$ es llamada :

1. *Semiregular* si, para cada $e \in E$, vale que $|G_e| = 1$ (estabilizador trivial).
2. *Transitiva* si, para todo par $e_1, e_2 \in E$, existe $g \in G$ con $g(e_1) = e_2$.
3. *Regular* si es semiregular y transitiva.

El siguiente resultado muestra ciertas relaciones entre los objetos antes definidos.

Teorema 7.1.2. — *Sea $\theta : G \rightarrow \text{Sym}(E)$ una acción transitiva y $C_G < \text{Sym}(E)$ el centralizador de $\theta(G)$ en $\text{Sym}(E)$. Entonces las siguientes propiedades valen.*

1. C_G actúa semiregularmente en E (en su acción natural por simetrías).
2. C_G actúa regularmente sí y sólo si G actúa regularmente.
3. Si G actúa regularmente, entonces $G \cong C_G$.
4. Para $e \in E$ vale que $C_G \cong N_G(G_e)/G_e$, donde $N_G(G_e)$ es el subgrupo normalizador de G_e en G .

Demostración. — Sea $e \in E$ fijo. Entonces (por la transitividad) tenemos una biyección

$$\phi : G/G_e \rightarrow E : gG_e \mapsto g(e) = \theta(g)(e).$$

Esta biyección permite trasladar nuestra acción $\theta : G \rightarrow \text{Sym}(E)$ a la acción

$$\phi^{-1} \circ \theta \circ \phi : G \rightarrow \text{Sym}(G/G_e)$$

dada por, para cada $h \in G$, como

$$h(gG_e) := hgG_e.$$

Por lo anterior, podemos asumir que $E = G/G_e$ y que la acción θ es dada por

$$\theta(h)(gG_e) = hgG_e.$$

Calculemos ahora el centralizador C_G para esta acción. Para que $\alpha \in \text{Sym}(G/G_e)$ esté en C_G es necesario y suficiente tener la igualdad

$$\alpha \circ \theta(h) = \theta(h) \circ \alpha, \quad \forall h \in G,$$

es decir,

$$\alpha(hgG_e) = h\alpha(gG_e), \quad \forall h, g \in G.$$

Tomando $g = 1$ (el elemento neutro de G), lo anterior dice :

$$\alpha(hG_e) = h\alpha(G_e), \quad \forall h \in G.$$

Sea $b \in G$ tal que $\alpha(G_e) = bG_e$. Entonces debemos tener

$$\alpha(hG_e) = h\alpha(G_e) = (hb)G_e, \quad \forall h \in G.$$

Ahora, α definida como arriba está bien definida sí y sólo si $b \in N_G(G_e)$. De esta manera,

$$C_G = \{\alpha_a : G/G_e \rightarrow G/G_e : hG_e \mapsto ha^{-1}G_e : a \in N_G(G_e)\}.$$

Arriba hemos usado a^{-1} para asegurar que $\alpha_{ab} = \alpha_a \circ \alpha_b$:

$$\alpha_{ab}(hG_e) = h(ab)^{-1}G_e = (hb^{-1})a^{-1}G_e = \alpha_a(hb^{-1}G_e) = \alpha_a(\alpha_b(hG_e)).$$

De esta manera, obtenemos un homomorfismo sobreyectivo

$$\Phi : N_G(G_e) \rightarrow C_G : a \mapsto \alpha_a$$

cuyo kernel es G_e , es decir,

$$C_G \cong_{\Phi} N_G(G_e)/G_e.$$

Notemos que hemos obtenido la parte 4. del teorema. Si G actúa regularmente, entonces $G_e = \{1\}$ y $N_G(G_e) = G$, de donde obtenemos que $G \cong C_G$, obteniendo la parte 3.

Veamos la parte 1. Sea $\rho \in C_G$ tal que $\rho(e_0) = e_0$, para algún $e_0 \in E$. La condición de que $\rho \in C_G$ quiere decir que $g(\rho(e)) = \rho(g(e))$, para cada $e \in E$ y cada $g \in G$. Si $e \in E$, entonces (por la transitividad) existe algún $g \in G$ tal que $e = g(e_0)$. Luego,

$$\rho(e) = \rho(g(e_0)) = g(\rho(e_0)) = g(e_0) = e,$$

de donde obtenemos que ρ es la permutación identidad.

Veamos ahora la parte 2. Supongamos que C_G actúa regularmente en E . Entonces esta acción es transitiva y, por la parte 1. del teorema aplicada a esta acción, tenemos que el centro C_{C_G} de C_G actúa de manera semiregular. Como $\theta(G) < C_{C_G}$, tenemos que la acción de G es semiregular y (como ya era una acción transitiva), es una acción regular.

Veamos ahora en la otra dirección. Al tener que la acción de G es regular, tenemos que $G_e = \{1\}$ para cada $e \in E$. Luego, en la forma de la acción descrita al comienzo, tenemos que (ya que en este caso $N_G(G_e) = G$)

$$C_G = \{\alpha_a : G \rightarrow G : h \mapsto ha^{-1} : a \in G\},$$

de donde vemos que la acción de C_G es regular. \square

7.2. Automorfismos de \mathfrak{S}_n

Nosotros estaremos interesados en acciones de un grupo finito sobre un conjunto finito E . En este caso, podemos asumir que $E = \{1, \dots, n\}$ para cierto $n \geq 1$.

Recordemos que el conjunto de todos los automorfismos de un grupo dado K forman a su vez un grupo (con la regla de composición) denotado $\text{Aut}(K)$. Cada elemento $k \in K$ define un automorfismo

$$\phi_k : K \rightarrow K : h \mapsto khk^{-1}$$

Este tipo de automorfismos se llaman *automorfismos interiores* y forman un subgrupo normal $\text{Inn}(K)$ de $\text{Aut}(K)$. Consideramos el homomorfismo sobreyectivo

$$K \rightarrow \text{Inn}(K) : k \mapsto \phi_k,$$

podemos ver que $\text{Inn}(K) \cong K/C_K$, donde C_K es el subgrupo centralizador de K . En particular, si C_K es trivial, se tiene que $\text{Inn}(K) \cong K$ (como es el caso de $K = \mathfrak{S}_n$, $n \geq 3$).

Un automorfismo que no es interior es llamado un *automorfismo exterior* y el grupo cociente $\text{Out}(K) = \text{Aut}(K)/\text{Inn}(K)$ es llamado el *grupo de automorfismos exteriores*.

El siguiente resultado determina estos grupos de automorfismos para el caso particular $K = \mathfrak{S}_n$, $n \geq 1$.

Teorema 7.2.1. — *Sea $n \geq 1$. Entonces*

1. *Si $n \in \{1, 2\}$, entonces $\text{Aut}(\mathfrak{S}_n)$ es trivial.*
2. *El subgrupo $\text{Inn}(\mathfrak{S}_6) \cong \mathfrak{S}_6$ es un subgrupo de índice dos de $\text{Aut}(\mathfrak{S}_6)$.*
3. *Si $n \geq 3$ y $n \neq 6$, entonces $\text{Aut}(\mathfrak{S}_n) = \text{Inn}(\mathfrak{S}_n) \cong \mathfrak{S}_n$.*

Demostración. — Como \mathfrak{S}_1 el grupo trivial y $\mathfrak{S}_2 \cong \mathbb{Z}_2$, se tiene que sus grupos de automorfismos son el grupo trivial. Supongamos ahora que $n \geq 3$. En este caso, como el centralizador es trivial, tenemos que $\text{Inn}(\mathfrak{S}_n) \cong \mathfrak{S}_n$.

Consideremos algún elemento $\phi \in \text{Aut}(\mathfrak{S}_n)$ diferente de la identidad. Denotemos por \mathcal{C} al conjunto de las clases de conjugación de los elementos de K . Los elementos de \mathcal{C} son subconjuntos de \mathfrak{S}_n de la forma $[\tau] = \{\sigma\tau\sigma^{-1} : \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$, donde $\tau \in \mathfrak{S}_n$. En particular, ϕ induce una biyección $\hat{\phi} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, definido por $\hat{\phi}([\tau]) = [\phi(\tau)]$.

Si τ tiene orden dos, entonces sabemos que esta permutación es un producto disjunto de una cierta cantidad de $k \geq 1$ transposiciones (donde $2k \leq n$). Más aún, dos elementos de orden dos son conjugados en \mathfrak{S}_n

sí y sólo si tienen la misma cantidad de transposiciones en sus descomposiciones anteriores. De esta manera, podemos observar que en la clase de conjugación de τ tiene cardinalidad

$$\left(\binom{n}{2} \binom{n-2}{2} \cdots \binom{n-2(k-1)}{2} \right) / k! = \frac{n!}{2^k (n-2k)! k!}.$$

Ahora, si miramos la clase de conjugación del elemento $\tau = (1, 2)$, entonces $\phi(\tau)$ debe ser un elemento de orden dos, digamos con $k \geq 1$ transposiciones. Como la clase de $[\tau]$ y $[\phi(\tau)]$ deben tener la misma cardinalidad, lo anterior nos dice que

$$2(n-2)! = 2^k (n-2k)! k!$$

La igualdad anterior funciona sólo para $k = 1$ en el caso $n \neq 6$. En el caso $n = 6$ también funciona para $k = 3$.

Supongamos ahora que $n \neq 6$. En este caso, lo anterior nos dice que $\hat{\phi}$ fija la clase $[(1, 2)]$, es decir, si tomamos una transposición $(a, b) \in \mathfrak{S}_n$, entonces $\phi((a, b))$ sigue siendo una transposición. Consideremos las transposiciones $\tau_j = (j, j+1)$, donde $j = 1, \dots, n-1$. Sabemos que estas transposiciones generan \mathfrak{S}_n . Sean $\phi(\tau_j) = \sigma_j$, las cuales ahora sabemos deben ser transposiciones. Como τ_1 y τ_2 no conmutan, tampoco lo pueden hacer σ_1 y σ_2 . Así es que podemos asumir que $\sigma_1 = (l_1, l_2)$ y $\sigma_2 = (l_2, l_3)$, donde l_1, l_2 y l_3 son diferentes. Ahora, como τ_1 y τ_3 conmutan y τ_2 y τ_3 no conmutan, lo mismo debe ocurrir con σ_1, σ_2 y σ_3 ; luego podemos ver que $\sigma_3 = (l_3, l_4)$, donde $l_4 \notin \{l_1, l_2, l_3\}$. Procediendo de manera inductiva, obtendremos que $\sigma_j = (l_j, l_{j+1})$, donde $l_{j+1} \notin \{l_1, \dots, l_j\}$. Si $\eta \in \mathfrak{S}_n$ es la permutación definida por $\eta(l_j) = j$, tenemos que $\eta^{-1} \sigma_j \eta = \tau_j$ (estamos usando la multiplicación de permutaciones por la izquierda). Luego, (si ϕ_η denota como antes el automorfismo interior definido por η) tenemos que $\phi_\eta \circ \phi$ fija cada τ_j y (como estas transposiciones forma un conjunto de generadores) debemos tener que es el automorfismo identidad, es decir, $\phi = \phi_\eta^{-1} = \phi_{\eta^{-1}} \in \text{Inn}(\mathfrak{S}_6)$.

En el caso $n = 6$, notemos que el argumento anterior nos dice que si ϕ deja invariante la clase de conjugación de $(1, 2)$, entonces este es un automorfismo interior. Pero en este caso podríamos tener que ϕ enviase la clase de $(1, 2)$ en la clase de $(1, 2)(3, 4)(5, 6)$, en cuyo caso ϕ es un automorfismo exterior (un automorfismo interior necesariamente preserva las clases de conjugación). En esta última posibilidad, notemos que ϕ debe llevar la clase de $(1, 2)(3, 4)(5, 6)$ en la clase de $(1, 2)$, es decir, ϕ^2 debe ser un automorfismo interior, es decir, $[\text{Aut}(\mathfrak{S}_6) : \text{Inn}(\mathfrak{S}_6)] \leq 2$. Lo que

quedaría por verificar es la existencia de un automorfismo exterior. Esto es un poco más complicado, pero la idea es la siguiente.

En \mathfrak{S}_6 tenemos que el estabilizador de un punto es isomorfo a \mathfrak{S}_5 (tenemos seis de tales subgrupos, ellos formando una clase de conjugación de subgrupos) y no es subgrupo transitivo. Todo automorfismo interior necesariamente permuta esos subgrupos.

Ahora, en \mathfrak{S}_6 existen otros seis subgrupos isomorfos a \mathfrak{S}_5 (formando una clase de conjugación de subgrupos) que son transitivos. Una manera de ver estos subgrupos es de la siguiente manera. Primero observemos que en $\mathfrak{S}_5 = \langle \alpha = (1, 2), \beta = (1, 2, 3, 4, 5) \rangle$ hay exactamente seis 5-subgrupos de Sylow (cada uno de ellos isomorfo a \mathbb{Z}_5): $H_1 = \langle (1, 2, 3, 4, 5) \rangle$, $H_2 = \langle (1, 2, 3, 5, 4) \rangle$, $H_3 = \langle (1, 2, 4, 3, 5) \rangle$, $H_4 = \langle (1, 2, 4, 5, 3) \rangle$, $H_5 = \langle (1, 2, 5, 3, 4) \rangle$ and $H_6 = \langle (1, 2, 5, 4, 3) \rangle$. Ahora podemos considerar la acción por conjugación

$$\begin{aligned} \theta : \mathfrak{S}_5 &\rightarrow \text{Sym}(\{H_1, \dots, H_6\}) \\ \sigma(H_j) &= \sigma^{-1}H_j\sigma. \end{aligned}$$

Se puede calcular que :

$$\begin{aligned} \alpha(H_1) &= H_6, \alpha(H_2) = H_4, \alpha(H_3) = H_5, \\ \beta(H_1) &= H_1, \beta(H_2) = H_4, \beta(H_3) = H_2, \\ \beta(H_4) &= H_6, \beta(H_5) = H_3, \beta(H_6) = H_5. \end{aligned}$$

Esta acción nos determina el siguiente subgrupo transitivo de \mathfrak{S}_6 :

$$\langle (1, 6)(2, 4)(3, 5), (2, 4, 6, 5, 3) \rangle \cong \mathfrak{S}_5.$$

La idea es ver que es posible encontrar un automorfismo de \mathfrak{S}_6 que lleva los primeros seis subgrupos (que no eran transitivos) en los segundos (que si son transitivos). \square

CAPÍTULO 8

GRAFOS Y GRAFOS BIPARTITOS

8.1. Grafos

Un *grafo* es un triple $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$, donde $V \neq \emptyset$ y E son conjunto disjuntos, y $\iota : E \rightarrow 2^V$ es una función tal que, para cada $e \in E$, la imagen $\iota(e)$ tiene cardinalidad 1 or 2. Los elementos de V son llamados los *vértices* y los de E los *ejes*.

Si $\iota(e) = \{v_1, v_2\} \in E$ (donde podría ocurrir que $v_1 = v_2$), decimos que v_1 y v_2 son *vecinos* y que v_1 y v_2 son adyacentes al eje e .

Si V y E son ambos conjuntos finitos, entonces decimos que \mathcal{G} es un *grafo finito*. En este caso, el *grado* de un vértice es igual al número de ejes adyacentes a él (con el cuidado de contar por dos cada eje de cardinalidad 1, los cuales son llamados bucles).

El grafo es llamado *conexo* si dados dos vértices cualesquiera, $v, w \in V$, es posible encontrar una colección finita de ejes $e_1, \dots, e_n \in E$, tales que : $v \in \iota(e_1)$, $w \in \iota(e_n)$ y, para cada $j = 1, \dots, n-1$, $\iota(e_j) \cap \iota(e_{j+1}) \neq \emptyset$ (es decir, podemos viajar desde uno de ellos hasta el otro a través de ejes sin tener que saltar).

Observación 8.1.1. — En esta exposición, nuestros grafos serán finitos (y en el caso de dibujos de niños también serán conexos, con cada uno de sus vértices de grado al menos uno y no tendrán bucles). Además, si el grafo es conexo y no hay ejes ($E = \emptyset$), entonces $V = \{v\}$.

Dos grafos $\mathcal{G}_1 = (V_1, E_1, \iota_1)$ y $\mathcal{G}_2 = (V_2, E_2, \iota_2)$ se llaman *isomorfos* si existen biyecciones $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ y $\psi : E_1 \rightarrow E_2$ que preservan las adyacencias, es decir, si $e = \{v, w\} \in E_1$, entonces $\psi(e) = \{\phi(v), \phi(w)\}$.

Cuando $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}$, un isomorfismo es llamado un *automorfismo* del grafo \mathcal{G} . El conjunto de todos los automorfismos del grafo \mathcal{G} , con la operación de composición) resulta ser un ejemplo de un grupo (el cual es finito cuando el grafo es finito) denotado por $\text{Aut}(\mathcal{G})$.

Ejemplo 39 (Grafos completos). — Sea $n \geq 1$. El grafo completo $K_n = (V, E, \iota)$ (ver Figura 8.1) es dado por

$$V = \{v_1, \dots, v_n\}$$

$$E = \{e_{i,j} : i, j \in \{1, \dots, n\}, i < j\} \text{ (si } n = 1, \text{ entonces } E = \emptyset)$$

$$\iota(e_{i,j}) = \{v_i, v_j\}$$

En este ejemplo, $\text{Aut}(K_n) \cong S_n$.

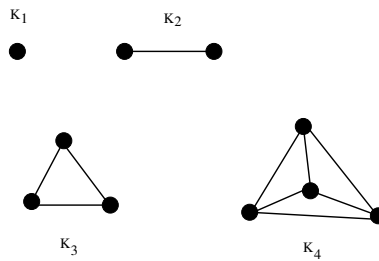


FIGURA 8.1. Grafos completos K_1, K_2, K_3 y K_4

8.2. Dibujando grafos en superficies compactas orientables : mapas

Recordemos que una *superficie orientable* es un espacio topológico X , Hausdorff, conexo y segundo numerable (es decir, hay una base para su topología con una cantidad numerable de elementos), junto con una colección $\mathcal{A} = \{(U_j, z_j) : j \in J\}$, donde :

1. cada $U_j \subset X$ es un abierto,
2. $\bigcup_{j \in J} U_j = X$,
3. cada $z_j : U_j \rightarrow V_j$, donde V_j es un abierto del plano \mathbb{R}^2 , es un homeomorfismo, y
4. si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces $z_j \circ z_i^{-1} : z_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una función diferenciable con jacobiano positivo.

Una superficie compacta orientable es homeomorfa a la esfera unitaria S^2 (género $g = 0$) o bien a una suma conexa finita de $g \geq 1$ (llamada su género) copias del toro $S^1 \times S^1$.

Consideremos un grafo finito $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$. Una *incrustación* de \mathcal{G} en una superficie compacta orientable X corresponde a un grafo $\hat{\mathcal{G}} = (\hat{V}, \hat{E}, \hat{\iota})$ que es isomorfo a \mathcal{G} , donde

1. $\hat{V} \subset X$;

2. cada elemento de \widehat{E} es una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$, cuya restricción al intervalo abierto $(0, 1)$ es inyectiva, de manera que $\alpha(0), \alpha(1) \in \widehat{V}$ y $\alpha((0, 1)) \cap \widehat{V} = \emptyset$ (así, podemos pensar que un eje es nada más que arco simple conectando dos puntos de \widehat{V}),
3. si $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ son dos elementos diferentes de \widehat{E} , entonces $\alpha((0, 1)) \cap \beta((0, 1)) = \emptyset$,
4. si $\alpha \in \widehat{E}$, entonces $\widehat{i}(\alpha) = \{\alpha(0), \alpha(1)\}$.

Usaremos el símbolo $\mathcal{G} \hookrightarrow X$ para denotar una incrustación de \mathcal{G} en X . Es importante notar que pueden haber muchas incrustaciones “diferentes” de \mathcal{G} en la misma superficie X (por diferentes nos referimos que no existe un homeomorfismo que preserve la orientación $T : X \rightarrow X$ que lleve una incrustación en la otra). La idea de una incrustación de un grafo es que podamos dibujar tal grafo en una superficie.

Proposición 8.2.1. — *Todo grafo finito \mathcal{G} se puede incrustar en alguna superficie compacta orientable X .*

Idea. — Primer, observemos que podemos incrustar nuestro grafo en \mathbb{R}^3 . Considere una vecindad tubular del grafo para obtener un objeto tres-dimensional (llamado un cuerpo de asas) cuya frontera es una superficie compacta orientable. Ahora empujamos el grafo hacia la frontera adecuadamente para obtener el resultado. \square

Una incrustación $\mathcal{G} \hookrightarrow X$ se dice que define un *mapa* en X si cada componente de $X \setminus \mathcal{G}$, las que llamaremos *caras* del mapa, es topológicamente un disco (podemos pensar en que cada cara es un país y los ejes de \mathcal{G} son las fronteras entre países). Notemos que para que obtengamos un mapa, es necesario que \mathcal{G} sea conexo (esto es lo que asegura que cada cara es un disco topológico). Usualmente, denotaremos un mapa por el par (X, \mathcal{G}) .

Proposición 8.2.2. — *Todo grafo finito y conexo \mathcal{G} se puede incrustar en alguna superficie compacta orientable X de manera que produzca un mapa en X .*

Idea. — Si el grafo no tiene ejes (es decir, $E = \emptyset$), entonces \mathcal{G} es tan sólo un vértice y lo podemos incrustar en S^2 . Supongamos ahora que $E \neq \emptyset$. Tomemos una incrustación $\mathcal{G} \hookrightarrow X$. Identifiquemos \mathcal{G} con su grafo incrustado (y que arriba hemos denotado por el símbolo $\widehat{\mathcal{G}}$). Al cortar X por \mathcal{G} obtenemos una colección finita de componentes conexas, X_1, \dots, X_n , cada una de ellas siendo una superficie orientable y no compacta. Si cada una de ellas es topológicamente un disco, entonces estamos listos.

Supongamos que en alguna de ellas, digamos X_r , no es topológicamente un disco. Se pueden dibujar una cantidad finita (y dos dos disjuntas) de curvas cerradas simples que dividen a X_r en una colección de superficies, cada una de ellas no es topológicamente un disco (es decir, en cada una de esas componentes vemos en su borde parte del grafo). Podemos cortar X_r por tales curvas y pegamos discos a los bordes que se obtienen (ver Figura 8.2) para así obtener una superficie (no necesariamente conexa) \hat{X}_r cuyas componentes resultan ser topológicamente discos. Si reemplazamos X_r por \hat{X}_r y volvemos a agregar \mathcal{G} a estas nuevas componentes, observamos que obtenemos una nueva superficie compacta orientable, de género menor que X , y una incrustación de \mathcal{G} en ella que define un mapa.

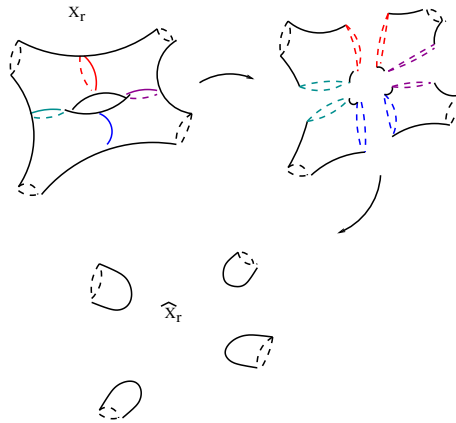


FIGURA 8.2. El proceso de cortar y pegar

□

8.3. Fórmula de Euler

Supongamos que tenemos una incrustación $\mathcal{G} \hookrightarrow X$ del grafo finito $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ en una superficie compacta orientable X de género g , la cual induce un mapa. Denotemos por γ el número de caras de tal mapa (notemos que necesariamente $\gamma \geq 1$). La *Fórmula de Euler* nos entrega hay una relación entre el género g de X y los datos del grafo \mathcal{G} , la cual dice :

$$2 - 2g = |V| - |E| + \gamma,$$

donde $|V|$ y $|E|$ y γ denotan las cardinalidades de V y E , respectivamente. Lo anterior nos dice que

$$g = 1 + (|E| - |V| - \gamma)/2,$$

es decir, γ debe tener la misma paridad que $|E| - |V|$, y que minimizar el valor de $g \geq 0$ es equivalente a maximizar el valor de γ tal que $1 \leq \gamma \leq 2 + |E| - |V|$ manteniendo la paridad antes mencionada. Este problema de minimización de g sigue siendo una pregunta abierta; se sabe que un problema del tipo NP-difícil y que el problema de determinar cuando un grafo con n vértices tiene género minimal g es NP-completo [40].

Ejemplo 40. — El grafo completo K_n se puede incrustar en S^2 sólo para $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. El grafo K_5 puede incrustarse en un toro ($g = 1$). De manera más general, se sabe que para K_n el género minimal de una incrustación definido un mapa es $\mu(K_n) = \lceil (n-3)(n-4)/12 \rceil$ (see, [34]).

8.4. Conjeturas SE y CDC

Consideremos un grafo finito y conexo \mathcal{G} y una incrustación $\mathcal{G} \hookrightarrow X$ sobre alguna superficie compacta y orientable que induce un mapa sobre X . En el caso que cada cara de tal mapa es frontera de un ciclo de \mathcal{G} (un camino simple y cerrado), entonces se dice que el mapa es *circular*. Este concepto “circular” aparece en [35]. Ejemplos de mapas no-circulares son dados por aquellos que tienen una sola cara. Una condición necesaria para la existencia de un mapa circular (para \mathcal{G}) es que este grafo sea 2-conexo (al quitar cualquier vértice, el grafo resultante sigue siendo conexo). La “Conjetura SE” (strong embedding conjecture) [22] dice que la propiedad de ser 2-conexo es también una condición suficiente. Relacionada a la conjetura anterior es la “Conjetura CDC” (cycle double cover conjecture) establecida por Szekeres [39] y Seymour [38] (ver también [35, pag. 10]) la cual asegura que todo grafo finito, conexo y sin puentes (quitando cualquier eje del grafo mantiene la conectividad) admite una lista de ciclos de manera que cada eje está contenido en exactamente dos de ellos. La Conjetura CDC se ha verificado para ciertos tipos de grafos en [43] y también se sabe que es válida para los grafos completos K_n . La Conjetura SE implica la Conjetura CDC, pero no son equivalentes.

8.5. Matriz de adyacencia de grafos finitos

Todo grafo finito, con n vértices, puede describirse mediante una matriz de tamaño $n \times n$, llamada su *matriz de adyacencia*. Esta matriz se construye enumerando cada vértice con un valor en $\{1, \dots, n\}$ (sin repetir)

y colocando en la posición (i, j) el número de ejes que conectan los dos vértices con índices i y j . Por construcción, esta matriz es simétrica.

Observación 8.5.1. — Si escogemos otra enumeración de los vértices, la matriz de adyacencia cambia por conjugación por una matriz de permutación (es decir, en cada columna y en cada fila sólo hay ceros salvo un y único lugar donde hay un uno). Esto define una acción natural del grupo de permutaciones \mathfrak{S}_n , de manera que la órbita de cada matriz de adyacencia consiste de las matrices de adyacencias del mismo grafo obtenidas usando otras enumeraciones de sus vértices. El estabilizador de tal acción de una matriz de adyacencia corresponde a la acción del grupo de automorfismos del grafo asociado sobre los vértices. En el caso que el grafo sea simple (es decir, no hay bucles y cada par de vértices están conectados por a lo más un eje), entonces su grupo de automorfismos es isomorfo a tal estabilizador. En el caso que hayan bucles o multiejes, entonces debemos también mirar la acción a nivel de sus ejes.

Describir un grafo por medio de sus matrices de adyacencia permite trabajar con ellos usando programas matemáticos computacionales (por ejemplo, con GAP [13]).

Proposición 8.5.2. — Sea A una matriz de adyacencia del grafo \mathcal{G} . Para determinar si existe un camino de longitud k que conecta el vértice i con el vértice j , debemos mirar A^k y ver si su coeficiente (i, j) es diferente de cero. Esto permite decidir, usando A , cuando \mathcal{G} es conexo.

Pregunta 1. — ¿Cómo determinaríamos la 2-conexidad del grafo por medio de su matriz de adyacencia?

Ejemplo 41. — El grafo completo K_n tiene una única matriz de adyacencia, siendo esta aquella matriz con todos sus coeficientes fuera de la diagonal igual a 1 y los sobre la diagonal igual a 0.

Ejemplo 42. — Consideremos el grafo (ver Figura 8.3) $\mathcal{G} = (V = \{v_1, v_2, v_3\}, E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}, \iota)$, donde

$$\iota(e_1) = \iota(e_2) = \{v_1\}, \quad \iota(e_3) = \{v_1, v_2\}, \quad \iota(e_4) = \iota(e_5) = \{v_2, v_3\}.$$

En este caso, una matriz de adyacencia de \mathcal{G} es dada por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

En este caso, cada elemento de $\text{Aut}(\mathcal{G})$ debe fijar cada vértice, deja invariante los conjuntos de ejes $\{e_1, e_2\}$, $\{e_4, e_5\}$ y fija el eje e_3 . Luego, sólo hay

cuatro de tales automorfismos (representados de manera permutacional de los ejes) :

$$\rho_1 = (e_1)(e_2)(e_3)(e_4)(e_5), \quad \rho_2 = (e_1, e_2)(e_3)(e_4)(e_5),$$

$$\rho_3 = (e_4, e_5)(e_1)(e_2)(e_3), \quad \rho_4 = (e_1, e_2)(e_3)(e_4, e_5),$$

de donde podemos observar que $\text{Aut}(\mathcal{G}) \cong \mathbb{Z}_2^2$.

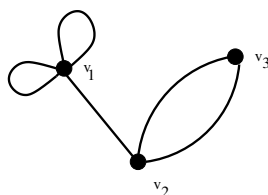


FIGURA 8.3. El grafo \mathcal{G} del Ejemplo 42

8.6. Grafos bipartitos

Hay ciertos grafos que permiten una coloración de sus vértices usando dos colores (por ejemplo, blanco y negro), de manera que vértices vecinos tienen diferentes colores. Notar que en este caso, para cada eje $e \in E$ del grafo debemos tener que $\iota(e)$ es de cardinalidad dos (es decir, no podemos tener bucles). Un grafo con una coloración por dos colores es llamado un grafo *bipartito*.

Si tenemos un grafo finito y queremos ver si podemos particionar sus conjunto de vértices V en dos conjuntos disjuntos V_N y V_B de manera dos vértices del mismo conjunto no estén conectados por un eje, entonces necesitamos ver los circuitos en \mathcal{G} (caminos cerrados).

Proposición 8.6.1. — *Un grafo finito es bipartito sí y sólo si cada circuito tiene longitud par.*

Dos grafos bipartitos son llamados *isomorfos como grafos bipartitos* si existe un isomorfismo entre ellos como grafos pero con la propiedad extra que el isomorfismo preserva los colores (es decir, envía vértices negros en vértices negros). Esto también permite definir el concepto de un *automorfismo de un grafo bipartito*. El conjunto de todos los automorfismos del grafo bipartito \mathcal{G} , con la operación de composición) resulta ser un subgrupo de $\text{Aut}(\mathcal{G})$, el cual denotaremos por $\text{Aut}_{bip}(\mathcal{G})$. Este subgrupo tiene índice a lo más dos (genéricamente coinciden, por ejemplo, si existe un vértice negro cuyo grado no es igual a ningún grado de un vértice blanco).

Notar que si partimos con un grafo bipartito, entonces podemos permutar los colores de sus vértices. Estos dos grafos bipartitos son considerados diferentes (independiente de si son o no isomorfos).

Una matriz de adyacencia de un grafo bipartito finito es siempre de la forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ {}^t A_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 43. — Consideremos el grafo bipartito (ver Figura 8.4) con matriz de adyacencia dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

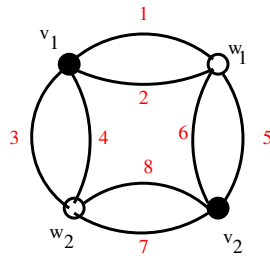


FIGURA 8.4. El grafo bipartito del Ejemplo 43

Ejemplo 44 (Grafos bipartitos completos). — Sean $n, m \geq 1$. El grafo completo $K_{n,m} = (V = V_N \cup V_B, E, \iota)$ es dado por (ver Figura 8.5)

$$V_N = \{v_1, \dots, v_n\}, \quad V_B = \{w_1, \dots, w_m\}$$

$$E = \{e_{i,j} : i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}\}$$

$$\iota(e_{i,j}) = \{v_i, w_j\}$$

En este ejemplo,

$$\text{Aut}(K_{n,m}) \cong \begin{cases} S_n \times S_m, & n \neq m \\ (S_n \times S_n) \rtimes \mathbb{Z}_2, & n = m \end{cases}$$

$$\text{Aut}_{bip}(K_{n,m}) \cong S_n \times S_m$$

Una matriz de adyacencia de $K_{n,m}$ es de la forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & B \\ {}^t B & 0 \end{bmatrix}$$

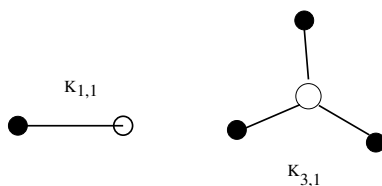


FIGURA 8.5. Grafos bipartitos completos $K_{1,1}$ y $K_{3,1}$

donde B es una matriz de tamaño $n \times m$ y todos sus coeficientes igual a 1.

8.7. Una descripción permutacional de grafos bipartitos finitos

Consideremos un grafo bipartito finito $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$. Este grafo puede no ser conexo, pero pediremos que cada vértice tenga grado al menos 1. Sean $V_N \subset V$ (respectivamente, $V_B \subset V$) el conjunto de los vértices negros (respectivamente, blancos). Sea α (respectivamente, β) la cardinalidad de V_N (respectivamente, V_B), es decir, el número de vértices negros es α y el de blancos es β . Tenemos dos particiones $E_N = \{N_1, \dots, N_\alpha\}$ y $E_B = \{B_1, \dots, B_\beta\}$ del conjunto de los ejes E , donde los N_j (respectivamente, B_i) se obtienen considerando los ejes adyacentes a los vértices negros (respectivamente, blancos). El hecho que cada eje sólo es adyacente a un sólo vértice de un color dado, garantiza que lo efectivamente E_N y E_B son dos particiones de E . Así, al grafo bipartito le hemos asociado el par (E_N, E_B) .

Observación 8.7.1. — Si el conjunto de ejes E de un grafo bipartito tiene cardinalidad finita $n \geq 1$, entonces podemos considerar una biyección entre E y $\{1, \dots, n\}$. Usando esta identificación, podemos describir los grafos bipartitos finitos con n ejes (y cada uno de sus vértices con grado al menos 1) por medio de pares de particiones de $\{1, \dots, n\}$.

Ejemplo 45. — Consideremos el grafo bipartito \mathcal{G} del Ejemplo 43. En este caso (usando las enumeraciones dadas a los ejes), tenemos

$$E_N = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\}\}, \quad E_B = \{\{1, 2, 5, 6\}, \{3, 4, 7, 8\}\}.$$

En este ejemplo se puede ver que

$$\text{Aut}_{\text{bip}}(\mathcal{G}) = \langle \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6 \rangle \cong (((\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2,$$

donde

$$\begin{aligned} \rho_1 &= (1, 2), \quad \rho_2 = (3, 4), \quad \rho_3 = (5, 6), \quad \rho_4 = (7, 8), \\ \rho_5 &= (1, 3)(2, 4)(5, 7)(6, 8), \quad \rho_6 = (1, 5)(2, 6)(4, 8)(3, 7). \end{aligned}$$

Ahora, consideramos otro grafo bipartito $\widehat{\mathcal{G}} = (\widehat{V}, \widehat{E}, \widehat{\iota})$, con respectivo par $(\widehat{E}_N, \widehat{E}_B)$ de particiones de \widehat{E} . Si ambos grafos bipartitos \mathcal{G} y $\widehat{\mathcal{G}}$ son isomorfos, entonces hay (por la definición) una biyección $\psi : E \rightarrow \widehat{E}$ que preserva las adyacencias. Tal biyección envía la partición E_N (respectivamente, E_B) a la partición \widehat{E}_N (respectivamente, \widehat{E}_B). Recíprocamente, si existe una biyección entre E y \widehat{E} preservando las particiones, entonces \mathcal{G} y $\widehat{\mathcal{G}}$ son isomorfos.

Proposición 8.7.2. — Sean $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ y $\widehat{\mathcal{G}} = (\widehat{V}, \widehat{E}, \widehat{\iota})$ dos grafos bipartitos finitos (donde cada uno de los vértices tenga grado al menos uno). Sean (E_N, E_B) y $(\widehat{E}_N, \widehat{E}_B)$ sus respectivos pares de particiones. Entonces ambos grafos bipartitos son isomorfos sí y sólo si existe una biyección $\psi : E \rightarrow \widehat{E}$ que envía la partición E_N (respectivamente, E_B) a la partición \widehat{E}_N (respectivamente, \widehat{E}_B).

Observación 8.7.3. — Como ya habíamos visto en la Observación 8.7.1, todo grafo bipartito finito con $n \geq 1$ ejes se puede identificar con un par (E_N, E_B) , donde E_N y E_B son dos particiones del conjunto $\{1, \dots, n\}$. El resultado anterior nos dice, en esta identificación, que dos tales pares (E_N, E_B) y $(\widehat{E}_N, \widehat{E}_B)$ corresponden a grafos bipartitos isomorfos (luego, ambos tienen la misma cantidad n de ejes) sí y sólo si existe una permutación $\eta \in \text{Sym}(\{1, \dots, n\}) = S_n$ tal que $\eta(E_N) = \widehat{E}_N$ y $\eta(E_B) = \widehat{E}_B$.

8.8. Una equivalencia

Como hemos visto arriba, a cada grafo bipartito finito con conjunto $E \neq \emptyset$ de ejes le podemos asociar un par (E_N, E_B) , donde E_N y E_B son dos particiones de E .

Ahora, de manera recíproca, consideremos un par (P, Q) , donde P y Q son particiones de un conjunto $E \neq \emptyset$. Supongamos que $P = \{P_1, \dots, P_\alpha\}$ y $Q = \{Q_1, \dots, Q_\beta\}$. Podemos construir un grafo bipartito finito (a priori podría no ser conexo) $\mathcal{G}_{P,Q}$ declarando los elementos de P como los vértices negros, los elementos de Q como los vértices blancos y consideramos tantos ejes entre P_j y Q_i como la cardinalidad de la intersección $P_j \cap Q_i$. Este grafo bipartito tiene la propiedad que cada uno de sus vértices tiene grado al menos 1. Se puede notar que $E_N = P$ y $E_B = Q$.

Dos pares (P, Q) y $(\widehat{P}, \widehat{Q})$ como antes son equivalentes si existe una permutación de E que lleve la partición P (respectivamente, Q) a la partición \widehat{P} (respectivamente, \widehat{Q}).

Proposición 8.8.1 (Equivalencia). — *Los procesos anteriormente descritos determinan una correspondencia biyectiva entre las clases de isomorfía de grafos bipartitos finitos (con todos sus vértices de grado positivo) y clases de equivalencias de pares (P, Q) , como arriba.*

Usando la descripción anterior, de grafos bipartitos finitos (con todos sus vértices de grado positivo) por medio de pares de permutaciones :

Pregunta 2. — *¿Qué condiciones deben tener los pares de particiones (P, Q) del conjunto E para representar un grafo bipartito conexo?*

Observación 8.8.2 (Automorfismos). — Consideremos un grafo bipartito $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ donde $V = V_N \cup V_B$, V_N los vértices negros y V_B los vértices blancos. Denotemos por $\text{Sym}(E)$ al grupo de las permutaciones de E (con la operación de composición). Cada automorfismo de \mathcal{G} como grafo bipartito (es decir, que deja invariante V_N) induce una única permutación en $\text{Sym}(E)$ que preserva ambas particiones E_N y E_B . Recíprocamente, cada permutación de E que preserva ambas particiones induce un automorfismo de \mathcal{G} . Así, se puede verificar que tenemos un homomorfismo de grupos inyectivo $\Theta : \text{Aut}_{bip}(\mathcal{G}) \rightarrow \text{Sym}(E)$ con $\Theta(\text{Aut}_{bip}(\mathcal{G}))$ siendo el subgrupo de $\text{Sym}(E)$ cuyos permutaciones son exactamente aquellas que preservan ambas particiones E_N y E_B .

8.9. Una observación de conteo

Por lo visto anteriormente, para determinar cuántos grafos bipartitos con $n \geq 1$ ejes (y todos sus vértices de grado positivo), podemos considerar $E = \{1, \dots, n\}$ y debemos mirar cuántos pares de particiones (P, Q) de E podemos obtener.

Cada partición, determina una partición de n , es decir, una tupla (l_1, \dots, l_m) , donde m es su longitud, tal que

$$1 \leq l_1 \leq \dots \leq l_m, \quad l_1 + \dots + l_m = n.$$

Hay varias maneras de representar tales particiones, uno de ellos es por medio de ciertas tablas llamadas *esquemas de Young* (estos son muy útiles en la teoría de representaciones de grupos). Un resultado muy famoso, debido a Hardy y Ramanujan (1918), dice que cuando n tiende a infinito, el valor de $p(n)$ es asintótico al valor $e^{\pi\sqrt{2n/3}}/4n\sqrt{3}$. Existe una serie convergente (pero muy complicada), debida a Rademacher (1937), que permite calcular el valor $p(n)$.

Supongamos que $P = \{P_1, \dots, P_t\}$, donde P_j tiene cardinalidad r_j . Tenemos una partición (r_1, \dots, r_t) de n . Módulo equivalencia, podemos suponer que

$$P_1 = \{1, \dots, r_1\}, P_2 = \{r_1+1, \dots, r_1+r_2\}, \dots, P_t = \{r_1+\dots+r_{t-1}+1, \dots, n\}.$$

De esta manera, el número de particiones P corresponde (módulo equivalencia) a $p(n)$.

Ahora, para determinar una segunda partición Q , primero consideramos, por cada partición (s_1, \dots, s_m) de n , particiones de E de la forma $Q = \{Q_1, \dots, Q_m\}$, con Q_j de cardinalidad s_j . Esta cantidad es dada por

$$\binom{n}{s_1} \binom{n-s_1}{s_2} \dots \binom{n-(s_1+\dots+s_{m-2})}{s_{m-1}}.$$

Pero ahora, por cada una de esas particiones Q , podemos identificarlas por medio de todas las permutaciones de E que preservan la partición de P . Así podemos ver lo difícil que es intentar contar el número de grafos bipartitos (módulo equivalencia) de un número dado de ejes.

CAPÍTULO 9

DESSINS D'ENFANTS : DIBUJOS DE NIÑOS

9.1. Dessins d'enfants : Dibujos de niños

Un *dessin d'enfant* (dibujo de niños) de género g es un mapa bipartito (X, \mathcal{G}) , es decir, X es una superficie compacta orientable de género g y $\mathcal{G} \subset X$ es un grafo bipartito (vértices están coloreados en blanco y negro y vértices adyacentes tienen coloración diferente) tal que cada componente conexa de $X \setminus \mathcal{G}$ (es decir, cada una de sus caras) es un disco topológico (un polígono).

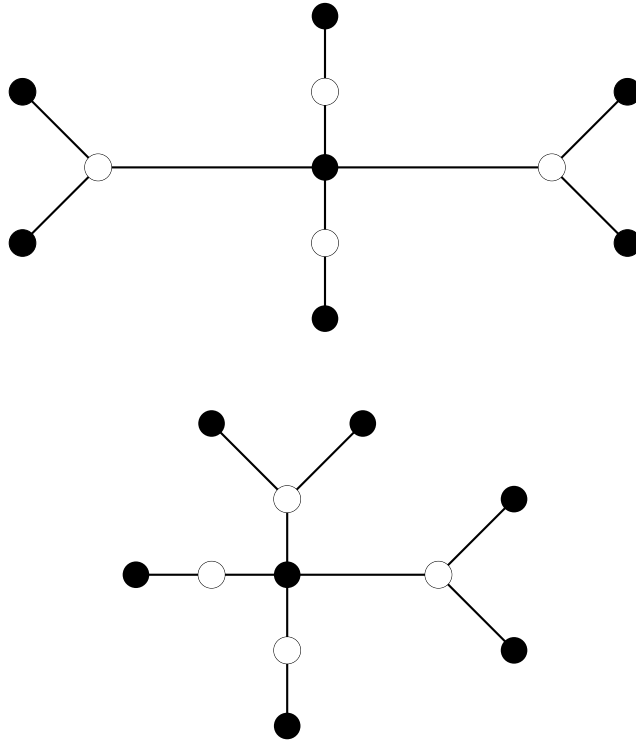
Si α es el número de vértices negros, β es el número de vértices blancos, e es el número de ejes y γ el número de caras, entonces la fórmula de Euler dice que

$$2 - 2g = \alpha + \beta + \gamma - e.$$

9.2. La signatura de un dessin d'enfant

Si (X, \mathcal{G}) es un dessin d'enfant de género g , entonces cada vértice tiene asociado un grado (como vértice de un grafo) y cada cara tiene asociado un grado : la mitad de ejes que hay en su frontera (ejes interiores son contados dos veces).

La *signatura o tipo del dessin d'enfant* (X, \mathcal{G}) es la tupla $(g; r, s, t)$, donde g es el género de X , r es el mínimo común múltiplo de los grados de los vértices negros, s es el mínimo común múltiplo de los grados de los vértices blancos y t es el mínimo común múltiplo de los grados de las caras.

FIGURA 9.1. Un par de dessins d'enfants de género $g = 0$

Ejemplo 46. — Ambos dessins d'enfants en la Figura 9.1 tienen signatura $(0; 4, 6, 10)$. Observe que no existe ningún homeomorfismo (que preserve o revierta la orientación) que lleve uno de los grafos en el otro.

9.3. Dessin d'enfant limpio

Un dessin d'enfant con signatura de la forma $(g; r, 2, t)$ es llamado *limpio* (*clean*).

Ejemplo 47. — Dado un mapa $M \subset X$ sobre una superficie compacta orientable, podemos pintar sus vértices con color negro. En cada eje escogemos un punto en el interior, el cual pintamos de blanco. De esta manera construimos un dessin d'enfant limpio.

9.4. Valencia (pasaporte) de un dessin d'enfant

Otra tupla que podemos asociar a un dessin d'enfant (X, \mathcal{G}) de género g es la *valencia (pasaporte)*

$$\text{Val}(X, \mathcal{G}) = (a_1, \dots, a_\alpha; b_1, \dots, b_\beta; c_1, \dots, c_\gamma),$$

donde

1. α es el número de vértices negros;
2. β es el número de vértices blancos;
3. γ es el número de caras;
4. $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_\alpha$ son los grados de los vértices negros;
5. $1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_\beta$ son los grados de los vértices blancos;
6. $1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_\gamma$ son los grados de las caras.

Es claro que debemos tener las identidades :

$$a_1 + \dots + a_\alpha = b_1 + \dots + b_\beta = c_1 + \dots + c_\gamma = e$$

y, en particular, por la fórmula de Euler,

$$2 - 2g = \alpha + \beta + \gamma - (a_1 + \dots + a_\alpha).$$

Ejemplo 48. — Los dos dessins d'enfants mostrados en la Figura 9.1 tienen la misma valencia :

$$(1, 1, 1, 1, 1, 1, 4; 2, 2, 3, 3; 10) = (1^6, 4; 2^2, 3^2; 10).$$

9.5. Cubrimientos ramificados asociados a un dessin d'enfant

Consideremos un dessin d'enfant (X, \mathcal{G}) y por cada cara escojamos un punto interior (los cuales pintaremos de color rojo). Una vez hecha tal elección, podemos construir una función continua sobreyectiva $Q : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, de grado igual al número de ejes, que envía los vértices negros a 0, los vértices blancos a 1, los puntos rojos a ∞ , los ejes al intervalo $(0, 1)$, de manera que Q , restringida al complemento de los vértices negros, blancos y puntos rojos, resulta ser un cubrimiento. Decimos que Q es un *cubrimiento ramificado asociado al dessin d'enfant* (X, \mathcal{G}) .

El cubrimiento ramificado asociado al dessin d'enfant (X, \mathcal{G}) no es único, pero dos de ellos son homotópicos relativo los vértices del grafo.

9.6. Equivalencia de dessins d'enfants

Diremos que dos dessins d'enfants (X_1, \mathcal{G}_1) y (X_2, \mathcal{G}_2) son *isomorfos* si existe un homeomorfismo que preserva la orientación $h : X_1 \rightarrow X_2$ de manera que h induce un isomorfismo entre los grafos bipartitos \mathcal{G}_1 and \mathcal{G}_2 (es decir, envía vértices negros a vértices negros y vértices blancos a vértices blancos). Decimos que tal homeomorfismo h es un *isomorfismo* entre los dessins d'enfants.

Observemos que si $Q_1 : X_1 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es un cubrimiento ramificado asociado a (X_1, \mathcal{G}_1) , entonces $Q_2 = Q_1 \circ h^{-1} : X_2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es cubrimiento ramificado asociado a (X_2, \mathcal{G}_2) .

Observación 9.6.1. — Dessins d'enfants isomorfos siempre tienen la misma signatura y la misma valencia. Pero, como lo muestran los dos dessins d'enfants mostrados en la Figura 9.1, que no son isomorfos, tienen la misma signatura y valencia (pasaporte).

9.7. Automorfismos de dessins d'enfants

9.7.1. Un *automorfismo* del dessin d'enfant (X, \mathcal{G}) es un automorfismo del grafo bipartito (es decir, preservando el color de los vértices) que es inducido por un homeomorfismo (que puede revertir o no la orientación) $h : X \rightarrow X$.

Notemos que si h preserva la orientación, entonces h produce un isomorfismo de (X, \mathcal{G}) consigo mismo.

9.7.2. Denotaremos por $\text{Aut}(X, \mathcal{G})$ al grupo de automorfismos of (X, \mathcal{G}) y por $\text{Aut}^+(X, \mathcal{G})$ su subgrupo de automorfismos que están inducidos por homeomorfismos que preservan la orientación. Esos grupos son finitos y, si no son iguales, entonces $\text{Aut}^+(X, \mathcal{G})$ tiene índice 2 en $\text{Aut}(X, \mathcal{G})$.

Ejemplo 49. — El dessin d'enfant (X, \mathcal{G}) , donde X es la esfera y \mathcal{G} es el grafo bipartito mostrado en el Ejemplo 32, tiene $\text{Aut}(X, \mathcal{G}) \cong \mathfrak{S}_3$ y $\text{Aut}^+(X, \mathcal{G}) \cong \mathbb{Z}_3$.

Ejemplo 50. — Los dessins d'enfants mostrados en la Figura 9.1 tienen grupos de automorfismos diferentes. Por ejemplo, el que aparece en la izquierda admite un automorfismo de orden 2 que preserva la orientación (dado por una rotación en 180° en el vértice negro central) y también un automorfismo de orden 2 que revierte la orientación (dado por reflexión en cualquiera de las dos rectas que pasan por el vértice negro central y contiene ejes). Este grupo de automorfismos es isomorfo a \mathbb{Z}_2^2 . El dessin d'enfant de la derecha sólo tiene un automorfismo de orden 2 que revierte la orientación (dado al reflejar de una recta diagonal que pasa por el vértice negro central). Su grupo de automorfismos es isomorfo a \mathbb{Z}_2 .

9.7.3. Observación. — Si $Q_1, Q_2 : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ son cubrimientos ramificados asociados al dessin d'enfant (X, \mathcal{G}) , entonces existe un homeomorfismo que preserva la orientación $h : X \rightarrow X$, induciendo un automorfismo del grafo bipartito \mathcal{G} , tal que $Q_2 = Q_1 \circ h$ y h es homotópico a la identidad relativo a los vértices de \mathcal{G} .

Fijemos un cubrimiento ramificado asociado al dessin d'enfant (X, \mathcal{G}) , digamos $Q : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Sea $h : X \rightarrow X$ un homeomorfismo que preserva la orientación (respectivamente, que revierte la orientación) el cual induce un automorfismo de \mathcal{G} como grafo bipartito. Módulo homotopía, podemos asumir que $Q \circ h = Q$ (respectivamente, $Q \circ h = J \circ Q$, donde $J(z) = \bar{z}$). Esto determina de manera única esta deformación h . Definimos como $\text{Aut}^+(X, \mathcal{G}, Q)$ al grupo de los homeomorfismos $h : X \rightarrow X$ que preservan la orientación y que inducen un automorfismo del grafo bipartito \mathcal{G} tal que $Q \circ h = Q$, por $\text{Aut}^-(X, \mathcal{G}, Q)$ la colección de aquellos h que revierten la orientación y tales que $J \circ Q \circ h = Q$ y, finalmente, el grupo $\text{Aut}(X, \mathcal{G}, Q) = \text{Aut}^+(X, \mathcal{G}, Q) \cup \text{Aut}^-(X, \mathcal{G}, Q)$.

Proposición 9.7.1. — Si Q_1 y Q_2 son cubrimientos ramificados asociados al mismo dessin d'enfant, entonces existe un isomorfismo $\theta : \text{Aut}(X, \mathcal{G}, Q_1) \rightarrow \text{Aut}(X, \mathcal{G}, Q_2)$ de manera que este restringe a un isomorfismo $\theta : \text{Aut}^+(X, \mathcal{G}, Q_1) \rightarrow \text{Aut}^+(X, \mathcal{G}, Q_2)$.

Demostración. — Observemos que hay un homeomorfismo que preserva la orientación $h : X \rightarrow X$ tal que $Q_2 = Q_1 \circ h$ (además h es homotópico a la identidad relativo los vértices de \mathcal{G}). \square

Proposición 9.7.2. — Si Q es un cubrimiento ramificado asociados a un dessin d'enfant (X, \mathcal{G}) , entonces existe un isomorfismo $\theta : \text{Aut}(X, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Aut}(X, \mathcal{G}, Q)$ de manera que este restringe a un isomorfismo $\theta : \text{Aut}^+(X, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Aut}^+(X, \mathcal{G}, Q)$.

9.8. Dessins d'enfants y pares de Belyi

9.8.1. Asociando pares de Belyi a un dessin d'enfant. — Sea (X, \mathcal{G}) un dessin d'enfant y sea $Q : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ un cubrimiento ramificado asociado a éste.

Podemos levantar la estructura de superficie de Riemann de $\widehat{\mathbb{C}}$ por Q para así obtener una estructura de superficie de Riemann S en X de manera que $Q : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es meromorfa. De esta manera, hemos obtenido un par de Belyi (S, Q) , donde \mathcal{G} se obtiene como preimágen por Q del intervalo $[0, 1]$ (las preimágenes de 0 son los vértices negros y las preimágenes de 1 son los vértices blancos).

Sabemos que Q no es único y la estructura de superficie de Riemann S construida depende de Q . Pero sabemos que Q es único módulo homotopía relativo los vértices de \mathcal{G} . Luego, las estructuras de superficies de Riemann son isomorfas (el biholomorfismo es dado por un homeomorfismo $U : X \rightarrow X$ que preserva la orientación y que es homotópico a la identidad relativo a los vértices de \mathcal{G}).

Supongamos que (X_1, \mathcal{G}_1) y (X_2, \mathcal{G}_2) son dessins d'enfants isomorfos, $Q_1 : X_1 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ y $Q_2 : X_2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ son cubrimientos ramificados asociados. Al proceder como arriba, para estos dos dessins d'enfants, obtenemos estructuras de superficies de Riemann S_1 y S_2 inducidas por Q_1 and Q_2 , respectivamente, sobre X_1 y X_2 . Como los dessins d'enfants son isomorfos, existe un homeomorfismo que preserva la orientación $h : X_1 \rightarrow X_2$ tal que $Q_2 \circ h = Q_1$. Entonces $h : S_1 \rightarrow S_2$ es biholomorfismo y obtenemos que los pares de Belyi (S_1, Q_1) y (S_2, Q_2) son isomorfos.

9.8.2. Asociando un dessin d'enfant a un par de Belyi. — Si partimos con un par de Belyi (S, β) , entonces tenemos determinado un dessin d'enfant (X, \mathcal{G}) , donde X es la superficie topológica de S y \mathcal{G} es $\beta^{-1}([0, 1])$ (las preimágenes de 0 son los vértices negros y las preimágenes de 1 son los vértices blancos).

Es claro que si partimos de dos pares de Belyi isomorfos, entonces los correspondientes dessins d'enfants son isomorfos.

Ejemplo 51. — El par de Belyi $(\widehat{\mathbb{C}}, \beta(z) = z^3)$ determina el dessin d'enfant mostrado en la Figura 9.2.

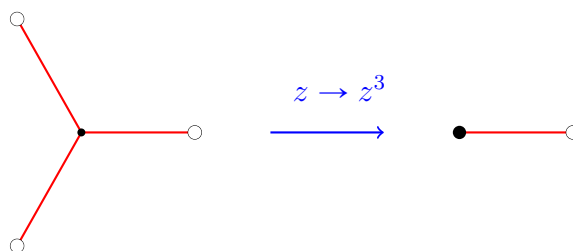


FIGURA 9.2. Dessin d'enfant para $(\widehat{\mathbb{C}}, \beta(z) = z^3)$

Ejemplo 52. — El par de Belyi $(\widehat{\mathbb{C}}, \beta(z) = 4z^3(1 - z^3))$ determina el dessin d'enfant mostrado en la Figura 9.3.

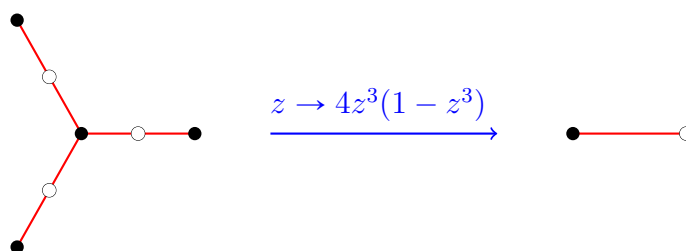


FIGURA 9.3. Dessin d'enfant para $(\widehat{\mathbb{C}}, \beta(z) = 4z^3(1 - z^3))$

Observación 9.8.1. — 1. Dado un par de Belyi (S, β) podríamos haber construido otros dessins d'enfants tomando las preimágenes de $[1, +\infty]$ o $[-\infty, 0]$. Estos dos nuevos dessins d'enfants corresponden al dessin d'enfant asociado a los pares de Belyi $(S, 1/(1 - \beta))$ y $(S, (\beta - 1)/\beta)$ usando $[0, 1]$.

2. Otro dessin d'enfant que podemos construir a partir de (S, β) es usando $(S, 4\beta(1 - \beta))$. Esto corresponde a tomar el dessin d'enfant asociado a (S, β) y pintar todos sus vértices del mismo color negro (es decir, los que antes eran blancos ahora pasan a ser negros)

y tomar de cada eje un punto medio el cual pintamos como vértice blanco.

3. Otro dessin d'enfant es usar el par de Belyi $(S, 4\beta/(\beta + 1)^2)$. Esto corresponde a agregar los puntos medios de caras (los polos de β) como vértices negros y agregar ejes de estos nuevos vértices a los vértices blancos que viven en el borde de la cara que les contiene.

9.8.3. Equivalencia entre pares de Belyi y dessins d'enfants. — El proceso descrito anteriormente nos da el siguiente resultado.

Teorema 9.8.2. — *Hay una equivalencia entre*

1. *Clases de isomorfía de pares de Belyi de tipo (p, q, r) .*
2. *Clases de isomorfía de dessins d'enfants de tipo (p, q, r) .*
3. *Clases de conjugación de subgrupos de índice finito del grupo triangular $\Delta(p, q, r)$.*

Hay una equivalencia entre clases de isomorfía de dessins d'enfants, pares de Belyi y clases de conjugación de subgrupos de índice finito de $\Gamma(2)$.

9.9. Acción del grupo absoluto de Galois en dessins d'enfants

El Teorema 9.8.2 nos da una equivalencia entre clases de equivalencia de dessins d'enfants y clases de equivalencia de pares de Belyi. Vimos, por el Teorema de Belyi, que tenemos una acción natural (fiel) del grupo absoluto de Galois $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sobre los pares de Belyi; luego, tenemos una acción fiel sobre los dessins d'enfants. Grothendieck usó esta idea para poder estudiar la estructura de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ desde un punto de vista combinatorio (esto es lo que son los dessins d'enfants).

Dado un dessin d'enfant (X, \mathcal{G}) y $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, denotemos por el símbolo $(X, \mathcal{G})^\sigma$ al dessin d'enfant (la clase) obtenido por la acción antes descrita del grupo absoluto de Galois.

Preguntas naturales son, por ejemplo :

1. ¿Cómo saber si dos dessins d'enfants son equivalentes por la acción de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$?
2. ¿Cómo determinar $(X, \mathcal{G})^\sigma$ en términos de σ y (X, \mathcal{G}) ?

Algunos invariantes bajo la acción del grupo $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ son las siguientes.

1. (X, \mathcal{G}) y $(X, \mathcal{G})^\sigma$ tienen la misma cantidad de vértices negros, de vértices blancos y caras y sus respectivos grados.
2. (X, \mathcal{G}) y $(X, \mathcal{G})^\sigma$ tienen la misma signatura y valencia.
3. $\text{Aut}(X, \mathcal{G}) \cong \text{Aut}(X, \mathcal{G})^\sigma$.

9.10. El grupo de monodromía de un dessin d'enfant

Consideremos un dessin d'enfant (X, \mathcal{G}) de género g , con e ejes, α vértices negros, β vértices blancos y γ caras.

Consideremos un cubrimiento ramificado $Q : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ asociado a (X, \mathcal{G}) . Ahora podemos mirar el grupo de monodromía asociado a Q , un subgrupo transitivo del grupo de permutaciones \mathfrak{S}_e generado por dos elementos. Observemos que cambiar Q por otro cubrimiento ramificado asociado a (X, \mathcal{G}) no cambia la clase de conjugación en \mathfrak{S}_e del grupo de monodromía. Este grupo de monodromía (su clase de conjugación) se puede construir como sigue.

Enumeremos los ejes de \mathcal{G} con números en $\{1, 2, \dots, e\}$, de manera que ejes diferentes tienen diferente enumeración (ver Figura 9.4).

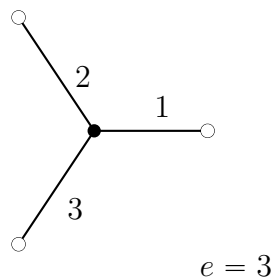


FIGURA 9.4. Una enumeración de ejes de \mathcal{G}

A cada vértice negro le asociamos un ciclo, de longitud igual a su grado, usando las enumeraciones de los ejes adyacentes a tal vértice siguiendo la orientación positiva en X . Por ejemplo, en la Figura 9.4 sólo tenemos un vértice negro y tiene como ciclo asociado a $(1, 2, 3) \in \mathfrak{S}_3$.

Con el proceso anterior, obtenemos α ciclos disjuntos, uno por cada vértice negro y de longitud igual al grado de éste. Definimos la permutación $\sigma \in \mathfrak{S}_e$ siendo el producto de todos tales ciclos.

Podemos ahora proceder de la misma manera para los vértices blancos para obtener una permutación $\tau \in \mathfrak{S}_e$, siendo el producto de β ciclos disjuntos.

El grupo $G(X, \mathcal{G}) = \langle \sigma, \tau \rangle < \mathfrak{S}_e$ es llamado el *grupo de monodromía* de (X, \mathcal{G}) .

Ejemplo 53. — En el dessin d'enfant de la Figura 9.4 tenemos que

$$\begin{aligned}\sigma &= (1, 2, 3), \quad \tau = (1)(2)(3) \\ G(\hat{\mathbb{C}}, \mathcal{G}) &= \langle (1, 2, 3) \rangle \cong \mathbb{Z}_3.\end{aligned}$$

Otra enumeración de los ejes de \mathcal{G} determina una permutación $\eta \in \mathfrak{S}_e$ de manera que, si $\hat{\sigma}$ y $\hat{\tau}$ son las permutaciones obtenidas con esta nueva enumeración, entonces $\hat{\sigma} = \eta\sigma\eta^{-1}$ y $\hat{\tau} = \eta\tau\eta^{-1}$. Este hecho lo resumimos en la siguiente.

Proposición 9.10.1. — *Otra enumeración de los lados de \mathcal{G} determina una permutación $\eta \in \mathfrak{S}_e$ de manera que $\eta\sigma\eta^{-1}$ y $\eta\tau\eta^{-1}$ son las permutaciones correspondientes a los vértices negros y blancos, de manera respectiva. En otras palabras, el grupo de monodromía se determina, módulo conjugación, por el dessin d'enfant.*

Proposición 9.10.2. — *El grupo de monodromía es un subgrupo transitivo de \mathfrak{S}_e generado por dos elementos.*

Demostración. — Ya sabemos que el grupo de monodromía es generado por σ y τ (una vez que hemos fijado una enumeración de los ejes de \mathcal{G}).

La conectividad del grafo \mathcal{G} nos asegura que dados dos ejes diferentes, digamos e_1 y e_2 de \mathcal{G} , entonces existe una colección finita de ejes, digamos

q_1, \dots, q_n , de manera que $q_1 = e_1$, $q_n = e_2$ y los ejes q_{j-1} y q_j tienen un vértice en común. Ahora, por la definición, podemos usar una potencia de σ o τ (dependiendo del color del vértice común entre q_{j-1} y q_j) que envía la enumeración de q_{j-1} a la enumeración del eje q_j . Luego, podemos construir una permutación en $G(X, \mathcal{G})$ que lleva la enumeración del eje e_1 en la de e_2 (ver Figura 9.5).

□

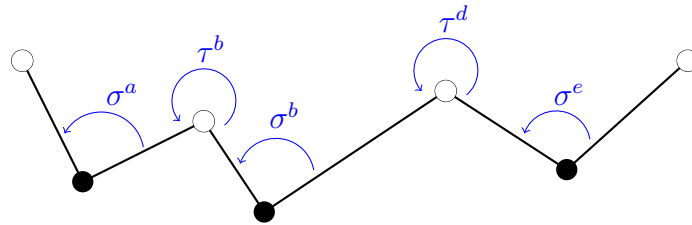


FIGURA 9.5. a, b, c, d, e enteros apropiados

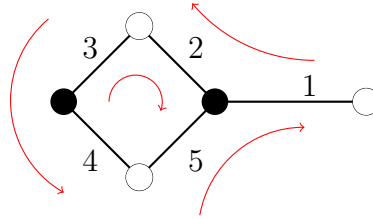
Proposición 9.10.3. — *La permutación $\tau\sigma$ (usaremos la multiplicación de izquierda a derecha) es producto de γ ciclos disjuntos, cada ciclo corresponde a cada cara de (X, \mathcal{G}) y la longitud de un ciclo es igual al grado de la cara correspondiente y los números apareciendo en este ciclo son los números dados a los lados de la cara yendo desde un vértice negro a uno blanco en la orientación negativa de la cara.*

Ejemplo 54. — Consideremos el dessin d'enfant de género cero mostrado en la Figura 9.6. Con la enumeración mostrada, tenemos que

$$\sigma = (1, 2, 5)(3, 4), \quad \tau = (1)(2, 3)(4, 5)$$

$$\tau\sigma = (1, 2, 4)(3, 5).$$

Observación 9.10.4. — Las ideas anteriores de usar permutaciones parecen haber sido ya utilizadas por Hamilton en lo que ahora llamamos ciclos Hamiltonianos.

FIGURA 9.6. Un dessin d'enfant de género $g = 0$

Observemos que el orden de σ (respectivamente, de τ y $\tau\sigma$) es el mínimo común múltiplo de las longitudes de sus ciclos (disjuntos). Luego, obtenemos la siguiente.

Proposición 9.10.5. — Sea $G = \langle \sigma, \tau \rangle$ grupo de monodromía del dessin d'enfant (X, \mathcal{G}) con e ejes. Entonces, el orden $|\sigma|$ de σ , el orden $|\tau|$ de τ y el orden de $|\tau\sigma|$ de $\tau\sigma$ son, respectivamente,

$$|\sigma| = \text{lcm}\{\deg(v) : v \text{ vértice negro}\},$$

$$|\tau| = \text{lcm}\{\deg(v) : v \text{ vértice blanco}\},$$

$$|\tau\sigma| = \text{lcm}\{\deg(f) : f \text{ cara}\}.$$

La *signatura* de (X, D) es $(g; |\sigma|, |\tau|, |\tau\sigma|)$ y

$$2 - 2g = l(\sigma) + l(\tau) - e + l(\tau\sigma),$$

donde $l(\eta)$ denota el número de ciclos disjuntos que tiene η .

Observación 9.10.6. — Como el grupo de monodromía $G = \langle \sigma, \tau \rangle < \mathfrak{S}_e$ actúa de manera transitiva en el conjunto $\{1, \dots, e\}$, tenemos una biyección natural entre $\{1, 2, \dots, e\}$ y las clases $G_1 \backslash G$, donde G_1 es el G -estabilizador de 1. La acción de G sobre los ejes es equivalente a la acción

$$G \times G_1 \backslash G \rightarrow G_1 \backslash G$$

$$(\eta, G_1 \rho) \mapsto G_1 \rho \eta^{-1}.$$

Se puede definir un dessin d'enfant como una tupla (G, H, x, y) , donde G es un grupo finito, $x, y \in G$ son generadores de G y H es un subgrupo de G de manera que $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = \{e\}$, donde $e \in G$ denota el elemento neutro. En este contexto, dos tuplas (G_1, H_1, x_1, y_1) y (G_2, H_2, x_2, y_2) definen dessins isomorfos sí y sólo si existe un isomorfismo $\theta : G_1 \rightarrow G_2$ tal que $\theta(x_1) = x_2$, $\theta(y_1) = y_2$ y $\theta(H_1)$ es G_2 -conjugado a H_2 .

Observación 9.10.7. — Los grupos de monodromía de los dessins d'enfants son subgrupos transitivos generados por dos elementos del grupo de permutaciones \mathfrak{S}_e . En general, tales subgrupos son \mathcal{A}_e (su subgrupo alterante) y \mathfrak{S}_e . Hay casos, donde hay más de tales subgrupos. Los próximos tres ejemplos son de este tipo.

Ejemplo 55. — Consideremos el dessin d'enfant mostrado en la Figura 9.7 y la enumeración de ejes allí mostrada. En este caso

$$\sigma = (1, 2, 3)(4, 6, 5)(7)(8)$$

$$\tau = (1, 2)(3, 4)(5, 7)(6, 8)$$

$$\tau\sigma = (1, 3, 6, 8, 5, 7, 4)(2)$$

Usando el programa computacional GAP podemos verificar que

$$\langle \sigma, \tau \rangle \cong \text{PSL}(3, 2) \cong \text{PSL}(2, 7) \quad (\text{grupo simple de orden } 168).$$

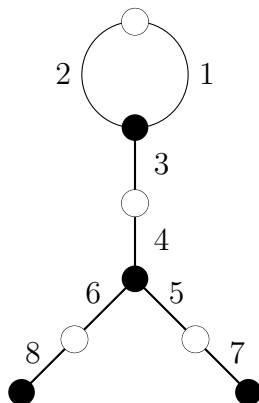


FIGURA 9.7. Un dessin d'enfant de género $g = 0$

Ejemplo 56. — Consideremos el dessin d'enfant mostrado en la Figura 9.8 y la enumeración de ejes allí mostrada. En este caso

$$\sigma = (1, 2, 3)(4, 7, 5)(6)(9, 8, 10)(11)(12)$$

$$\tau = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8)(9, 11)(10, 12)$$

$$\tau\sigma = (1, 3, 7, 10, 12, 9, 11, 8, 5, 6, 4)(2)$$

Usando el programa computacional GAP podemos verificar que

$$\langle \sigma, \tau \rangle \cong M_{12} \quad (\text{Grupo de Mathieu de orden } 95040).$$

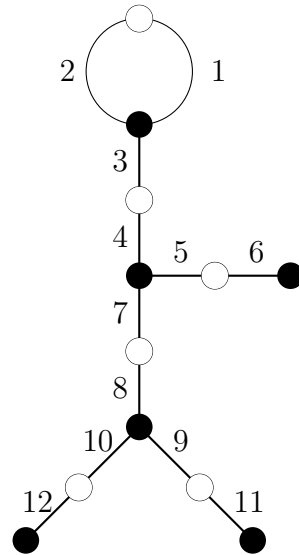


FIGURA 9.8. Un dessin d'enfant de género $g = 0$

Ejemplo 57. — Consideremos el dessin d'enfant mostrado en la Figura 9.9 y la enumeración de ejes allí mostrada. En este caso

$$\sigma = (1)(2, 5, 8)(3)(4, 7, 6)(9, 10, 11)(12, 14, 13)(15)(16, 18, 17)(20)(21, 19, 22)(23)(24)$$

$$\tau = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 10)(8, 9)(11, 12)(13, 15)(14, 16)(17, 19)(18, 20)(21, 23)(22, 24)$$

$$\tau\sigma = (1, 5, 4, 3, 7, 11, 14, 18, 20, 17, 22, 24, 21, 23, 19, 16, 13, 15, 12, 9, 2)(6, 8, 10)$$

Usando el programa computacional GAP podemos verificar que

$$\langle \sigma, \tau \rangle \cong M_{24} \quad (\text{Grupo de Mathieu de orden } 244823040).$$

El siguiente resultado nos asegura que la clase de isomorfía de un dessin d'enfant es determinado por su (clase de conjugación) grupo de monodromía.

Teorema 9.10.8. — Sean $\langle \sigma_1, \tau_1 \rangle$ y $\langle \sigma_2, \tau_2 \rangle$ grupos de monodromía de dessins d'enfants (X_1, \mathcal{G}_1) y (X_2, \mathcal{G}_2) , respectivamente. Entonces, los siguientes son equivalentes.

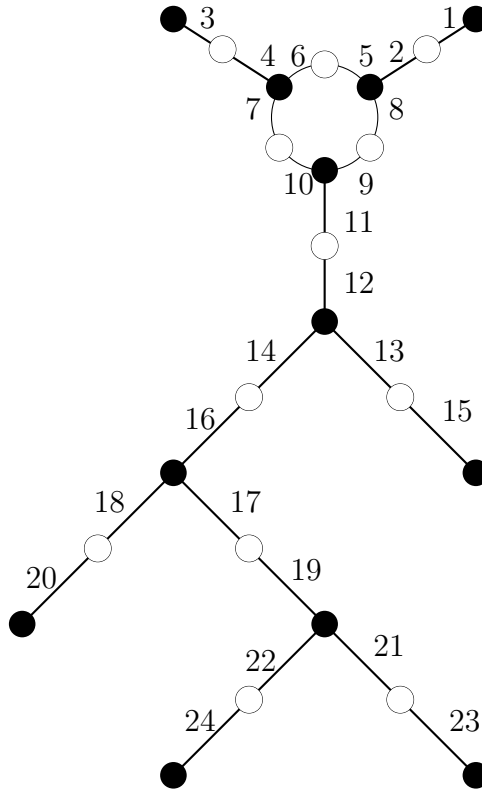


FIGURA 9.9. Un dessin d'enfant de género $g = 0$

1. (X_1, \mathcal{G}_1) y (X_2, \mathcal{G}_2) son isomorfos.
2. Existe una permutación $\eta \in \mathfrak{S}_e$ (donde e es el número de ejes) tal que

$$\sigma_2 = \eta\sigma_1\eta^{-1}, \quad \tau_2 = \eta\tau_1\eta^{-1}.$$

Demostración. — Veamos que (1) implica (2). Consideremos un homeomorfismo que preserve la orientación $h : X_1 \rightarrow X_2$ y que induce un isomorfismo entre los dos dessins d'enfants dados. Ahora, dada una enumeración de los lados de \mathcal{G}_1 (la que nos da lugar la monodromía $\langle \sigma_1, \tau_1 \rangle$ para (X_1, \mathcal{G}_1)), podemos transportarla por h para obtener una enumeración de los lados de \mathcal{G}_2 . Con esta enumeración obtenemos el mismo grupo de monodromía anterior. Ya hemos visto que con otra enumeración de los lados de \mathcal{G}_2 obtenemos una permutación η de manera que la monodromía con la nueva enumeración es de la forma $\langle \sigma_2 = \eta\sigma_1\eta^{-1}, \tau_2 = \eta\tau_1\eta^{-1} \rangle$.

Ahora veamos que (2) implica (1). En realidad, veremos un hecho más fuerte que el que necesitamos; que todo subgrupo transitivo generado por

dos elementos es el grupo de monodromía de un dessin d'enfant. Para esto, partamos con un tal grupo transitivo $G = \langle \sigma, \tau \rangle < \mathfrak{S}_e$.

Por cada ciclo $(\tau\sigma)_j$ de $\tau\sigma$ construimos un polígono P_j con tantos lados como el doble de la longitud del ciclo correspondiente. Enumeramos los lados de P_j de manera cíclica (siguiendo la orientación negativa del polígono) en forma alternada usando los números en tal ciclo. Los vértices de P_j son coloreados con blanco y negro, alternadamente, de manera de cada vértice negro está al comienzo de cada lado enumerado (siguiendo la orientación negativa). Ahora, usando σ , podemos enumerar los siguientes lados de P_j .

Procedemos a identificar todos estos polígonos por sus lados de igual enumeración para obtener el dessin d'enfant deseado. □

En el siguiente ejemplo indicamos la construcción hecha en la segunda parte de la demostración anterior.

Ejemplo 58. — Sea $\langle \sigma = (1, 2, 5)(3, 4), \tau = (1)(2, 3)(4, 5) \rangle = \mathfrak{S}_5$. En este caso,

$$\tau\sigma = (1, 2, 4)(3, 5),$$

luego debemos considerar dos polígonos, P_1 y P_2 , donde P_1 tiene 6 lados y P_2 tiene 4 lados (ver parte superior de la Figura 9.10). Ahora, en azul están las enumeraciones que damos a cada uno de los lados de los polígonos usando los ciclos de $\tau\sigma$. En rojo están aquellos que nos obliga σ . Notemos que hay dos lados consecutivos del polígono de 6 lados con el mismo número 1; esto dice que tendremos un lado interior. Usando el hecho que $2 - 2g = 5 - 5 + 2 = 2$, obtenemos que el dessin d'enfant es de género cero mostrado en la parte inferior de la Figura 9.10.

Una consecuencia directa del teorema anterior es el siguiente (parte de lo cual ya habíamos visto).

Teorema 9.10.9. — *Existe una equivalencia natural entre las siguientes.*

1. *Clases de isomorfía de dessins d'enfants.*
2. *Clases de isomorfía de pares de Belyi.*

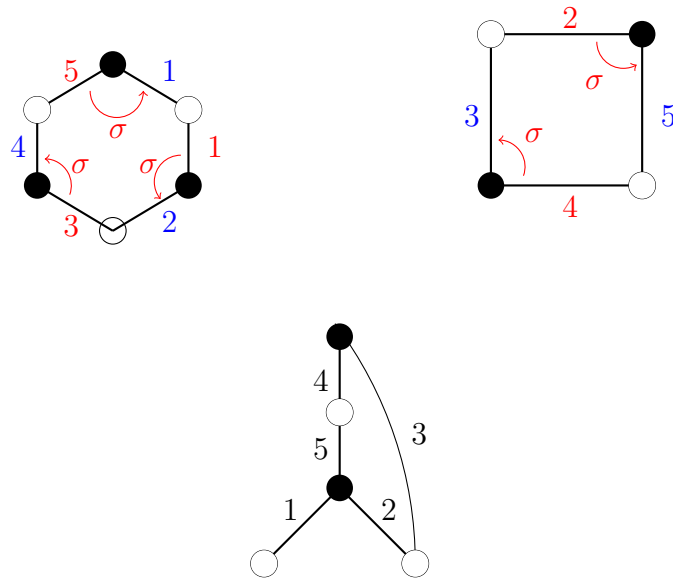


FIGURA 9.10. Los dos polígonos y sus lados

3. Clases de conjugación de subgrupos transitivos con dos generadores de grupos de permutaciones.
4. Clases de conjugación de subgrupos de índice finito de $\Gamma(2)$.

9.11. El grupo de automorfismos de un dessin d'enfant por medio de permutaciones

Consideremos un dessin d'enfant (X, \mathcal{G}) y su grupo de automorfismos $\text{Aut}(X, \mathcal{G})$.

Hagamos una enumeración de los e ejes de \mathcal{G} y construyamos su grupo de monodromía $G = \langle \sigma, \tau \rangle < \mathfrak{S}_e$.

Si $f \in \text{Aut}^+(X, \mathcal{G})$, entonces (como f es inducido por un homeomorfismo de X que preserve la orientación y envía vértices negros en vértices negros), f define una permutación $\theta(f) \in \mathfrak{S}_e$ tal que

$$\theta(f)\sigma = \sigma\theta(f), \quad \theta(f)\tau = \tau\theta(f),$$

es decir, $\theta(f) \in \mathcal{Z}(G)$ (centralizador de G en \mathfrak{S}_e). De manera recíproca, si tenemos $\eta \in \mathcal{Z}(G)$, entonces (procediendo de manera similar como hemos visto como reconstruir el dessin d'enfant a partir de G) se puede construir $f \in \text{Aut}^+(X, \mathcal{G})$ de manera que $\theta(f) = \eta$.

9.12. Uniformización de dessins d'enfants

Sea (X, \mathcal{G}) un dessin d'enfant, de signatura $(g; r, s, t)$, y sea $G = \langle \sigma, \tau \rangle \leq \mathfrak{S}_e$ su grupo de monodromía.

Consideremos el grupo triangular

$$G(r, s, t) = \langle x, y : x^r = y^s = (yx)^t = 1 \rangle$$

y el homomorfismo de monodromía

$$\Theta_{(X, \mathcal{G})} : G(r, s, t) \rightarrow G = \langle \sigma, \tau \rangle \leq \mathfrak{S}_e,$$

definido por la regla

$$\Theta_{(X, \mathcal{G})}(x) = \sigma, \quad \Theta_{(X, \mathcal{G})}(y) = \tau,$$

y tomemos

$$\Gamma_j = \Theta_{(X, \mathcal{G})}^{-1}(G(j)), \quad G(j) = \{\eta \in G : \eta(j) = j\}.$$

Sea

$$\mathbb{U} = \begin{cases} \mathbb{H}^2, & \text{if } r^{-1} + s^{-1} + t^{-1} < 1 \\ \mathbb{C}, & \text{if } r^{-1} + s^{-1} + t^{-1} = 1 \\ \widehat{\mathbb{C}}, & \text{if } r^{-1} + s^{-1} + t^{-1} > 1 \end{cases}$$

El grupo $G(r, s, t)$ es un grupo Kleiniano de isometrías de \mathbb{U} y $\mathbb{U}/G(r, s, t)$ la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ con tres puntos cónicos, que podemos asumir sean $0, 1$ y ∞ , cuyos ordenes son r, s y t , respectivamente.

Consideremos un cubriente holomorfo ramificado $\pi_{G(r, s, t)} : \mathbb{U} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, cuyo grupo deck es $G(r, s, t)$, cuyos valores de ramificación son 0 (de orden r), 1 (de orden s) y ∞ (de orden t).

La orbifold de Riemann \mathbb{U}/Γ_j tiene una estructura de superficie de Riemann S_j , topológicamente equivalente a X .

Denotemos por $\pi_{\Gamma_j} : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}/\Gamma_j$ el cubrimiento holomorfo ramificado regular con grupo deck Γ_j .

Tenemos entonces un cubrimiento ramificado $\beta_j : \mathbb{U}/\Gamma_j \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ de manera que $\pi_{G(r, s, t)} = \beta_j \circ \pi_{\Gamma_j}$.

El par (S_j, β_j) es un par de Belyi cuyo dessin d'enfant (obtenido como preimágen del intervalo $[0, 1]$) es isomorfo a (X, \mathcal{G}) .

9.13. Dessins d'enfants reales

Un dessin d'enfant (X, \mathcal{G}) es llamado un *dessin d'enfant real* si existe un automorfismo $T \in \text{Aut}(X, \mathcal{G}) \setminus \text{Aut}^+(X, \mathcal{G})$, $T^2 = I$. Decimos que T es una *simetría* de (X, \mathcal{G}) .

Supongamos que (X, \mathcal{G}) es un dessin d'enfant real, con simetría T .

Recordemos que, al levantar la estructura de superficie de Riemann de $\widehat{\mathbb{C}}$ a X , por medio de un cubrimiento ramificado asociado $Q : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, obtenemos una estructura de superficie de Riemann S tal que $Q : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es una función de Belyi y (S, Q) es un par de Belyi, luego, definible sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. Además, la simetría T define una simetría de S , es decir un automorfismo anti-holomorfo de S de orden 2. Luego, el par de Belyi (S, Q) es también definible sobre \mathbb{R} .

Teorema 9.13.1 (Köck-Singerman [26] and Köck-Lau [27])

Sea (X, \mathcal{G}) un dessin d'enfant real. Entonces, existe un par de Belyi (S, β) equivalente a (X, \mathcal{G}) donde S y β están definidas simultáneamente sobre $\mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Q}}$.

Es claro que el recíproco al resultado anterior es válido. Consideremos un par de Belyi (S, β) , definido sobre $\mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Q}}$. Tomando $J(z) = \bar{z}$ y $\widehat{J}([z_0 : \cdots : z_n]) = [\bar{z}_0 : \cdots : \bar{z}_n]$, entonces $\widehat{J}(S) = S$ y $J \circ \beta = \beta \circ \widehat{J}$. En particular, el dessin d'enfant definido por (S, β) es real.

Pregunta 3. — ¿Cómo saber si un dessin d'enfant dado es real?

Para intentar dar una respuesta a la pregunta anterior, procedemos de la siguiente manera. Hacemos una enumeración de los ejes de D y consideramos el respectivo grupo de monodromía $\langle \sigma, \tau \rangle < \mathfrak{S}_e$, donde e es el número de ejes de \mathcal{G} .

Sabemos que cada elemento $F \in \text{Aut}(X, \mathcal{G}) \setminus \text{Aut}^+(X, \mathcal{G})$ induce una permutación $\eta_F \in \mathfrak{S}_e$ tal que

$$\eta_F \sigma \eta_F^{-1} = \sigma^{-1}, \quad \eta_F \tau \eta_F^{-1} = \tau^{-1}.$$

También sabemos que cada permutación $\eta \in \mathfrak{S}_e$ tal que $\eta \sigma \eta^{-1} = \sigma^{-1}$ and $\eta \tau \eta^{-1} = \tau^{-1}$ proviene de algún $F \in \text{Aut}(X, \mathcal{G}) \setminus \text{Aut}^+(X, \mathcal{G})$.

Lo anterior permite dar la siguiente respuesta a nuestra pregunta anterior.

Teorema 9.13.2. — *Un dessin d'enfant (X, \mathcal{G}) es real si sólo si existe $\eta \in \mathfrak{S}_e$ de orden 2 tal que $\eta\sigma\eta = \sigma^{-1}$, $\eta\tau\eta = \tau^{-1}$.*

9.14. Ejemplos de dessins d'enfants de género cero

En esta sección veremos algunos ejemplos de dessins d'enfants de género cero. En este caso, la valencia de un tal dessin d'enfant $(\widehat{\mathbb{C}}, \mathcal{G})$ es de la forma

$$(a_1, \dots, a_\alpha; b_1, \dots, b_\beta; c_1, \dots, c_\gamma)$$

donde

1. α es el número de vértices negros;
2. β es el número de vértices blancos;
3. γ es el número de caras;
4. $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_\alpha$ son los grados de los vértices negros;
5. $1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_\beta$ son los grados de los vértices blancos;
6. $1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_\gamma$ son los grados de las caras;

de manera que

$$a_1 + \dots + a_\alpha = b_1 + \dots + b_\beta = c_1 + \dots + c_\gamma = e,$$

$$2 = \alpha + \beta + \gamma - (a_1 + \dots + a_\alpha).$$

Sabemos que existe una función de Belyi $\beta : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ de manera que el dessin d'enfant (X, \mathcal{G}) es isomorfo al dessin d'enfant definido por $\beta^{-1}([0, 1])$. En este caso, β es una función racional. Si :

1. p_1, \dots, p_α son los ceros de β (donde p_j corresponde al vértice negro con grado a_j);
2. q_1, \dots, q_β son los ceros de $\beta - 1$ (donde q_j corresponde al vértice blanco con grado b_j); y
3. t_1, \dots, t_γ son los polos de β (donde t_j corresponde a la cara con grado c_j);

entonces

$$\beta(z) = k \frac{(z - p_1)^{a_1} \cdots (z - p_\alpha)^{a_\alpha}}{(z - t_1)^{c_1} \cdots (z - t_\gamma)^{c_\gamma}}$$

$$\beta(z) - 1 = \mu \frac{(z - q_1)^{b_1} \cdots (z - q_\beta)^{b_\beta}}{(z - t_1)^{c_1} \cdots (z - t_\gamma)^{c_\gamma}}$$

donde $k, \mu \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Si T es una transformación de Möbius, entonces $\beta \circ T$ también nos entrega una función de Belyi asociada al mismo dessin d'enfant. Esto nos permite asumir algunos de los puntos p_j, q_j y t_j ser $\infty, 0$ y 1 . Luego, en vez de considerar las $\alpha + \beta + \gamma + 2$ parámetros involucrados, sólo tendríamos $\alpha + \beta + \gamma - 1$ a encontrar.

En general, el cálculo explícito de β es computacionalmente muy pesado. En esta sección veremos algunos ejemplos para el caso de dessins d'enfants de género cero.

Ejemplo 60. — Módulo isomorfía, sólo hay un dessin d'enfant con valencia $(4; 1^4; 4)$; es la mostrada en la Figura 9.12. En particular, este dessin d'enfant es punto fijo de cada $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, es decir, es definible sobre \mathbb{Q} . Queremos encontrar una función racional $\beta : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $\beta^{-1}([0, 1])$ sea tal dessin d'enfant. Como hemos dicho antes, podemos asumir que el vértice negro es 0 , que la única pre-imagen de ∞ es ∞ (hay sólo una cara) y que uno de los vértices blancos es 1 . Denotemos los otros tres vértices blancos como a, b y c (a determinar). De esta manera

$$\beta(z) = kz^4,$$

$$\beta(z) - 1 = \mu(z - 1)(z - a)(z - b)(z - c).$$

Usando las igualdades anteriores, podemos ver que $k = \mu$ y tomando $z = 1$ que $k = 1$, es decir, $\beta(z) = z^4$; en particular, $a = i, b = -1$ y $c = -i$.

Ejemplo 61. — Módulo isomorfía, sólo hay un dessin d'enfant con valencia $(1^2, 4; 1^2, 2^2; 6)$; es la mostrada en la Figura 9.13. En particular, este dessin d'enfant es punto fijo de cada $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, es decir, es definible sobre \mathbb{Q} . Queremos encontrar una función racional $\beta : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $\beta^{-1}([0, 1])$ sea tal dessin d'enfant. Podemos asumir que dos vértices negros son 0 y 1 (ver Figura 9.13). El otro vértice negro es a y los vértices

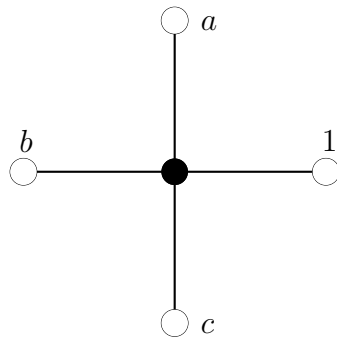


FIGURA 9.12. Dessin d'enfant de género cero y valencia $(4; 1^4; 4)$

blancos son b, c, d y e , y que la única pre-imagen de ∞ es ∞ (hay sólo una cara). De esta manera

$$\beta(z) = kz^4(z - 1)(z - a),$$

$$\beta(z) - 1 = \mu(z - b)^2(z - c)^2(z - d)(z - e).$$

Usando las igualdades anteriores, podemos ver que $k = \mu$.

Tenemos además 6 ecuaciones en las 6 incógnitas k, a, b, c, d y e . Una de esas ecuaciones es

$$1 + a - 2b - 2c - d - e = 0.$$

Las otras ecuaciones quedan un poco más complicadas. Ya en este ejemplo podemos ver lo pesado que puede ser buscar β de manera explícita.

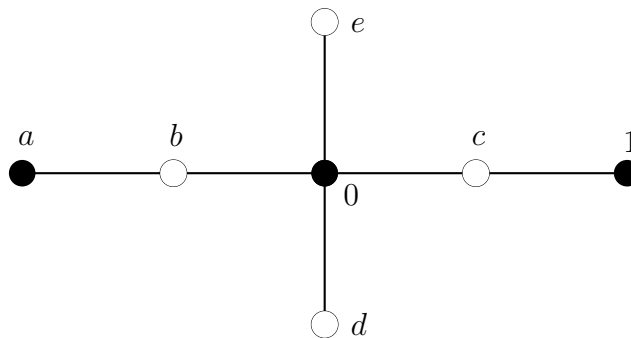


FIGURA 9.13. Dessin d'enfant de género zero y valencia $(1^2, 4; 1^2, 2^2; 6)$

Ejemplo 62. — Usando la valencia $(1^3, 2, 3, 8; 1^8, 2^2, 4; 16)$ obtenemos el dessin d'enfant mostrado en la Figura 9.14. En este caso, el intentar calcular explícitamente β es muy complicado !!

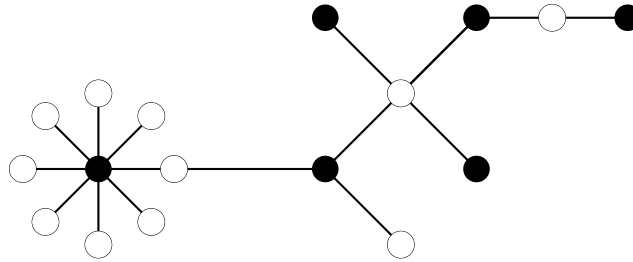


FIGURA 9.14. Dessin d'enfant con valencia $(1^3, 2, 3, 8; 1^8, 2^2, 4; 16)$

Ejemplo 63. — Consideremos el dessin d'enfant de género zero y valencia $(3; 1, 2; 1, 2)$ como se muestra en la Figura 9.15. En este caso, para buscar β , podemos asumir que un vértice blanco es 1, los vértices de centro de cara son 0 y ∞ , el vértice negro es a y el otro vértice blanco es b . En este caso

$$\beta(z) = \frac{k(z-a)^3}{z}$$

$$\beta(z) - 1 = \frac{\mu(z-1)(z-b)^2}{z}.$$

Igualando las anteriores nos dan que $\mu = k$ y

$$k(z-1)(z-b)^2 = -z + k(z-a)^3.$$

Igualando coeficientes obtenemos que

$$k = \frac{64}{27}, \quad b = \frac{-1}{8}, \quad a = \frac{1}{4}$$

es decir,

$$\beta(z) = \frac{(4z-1)^3}{27z},$$

de donde vemos directamente que este dessin d'enfant es definible sobre \mathbb{Q} .

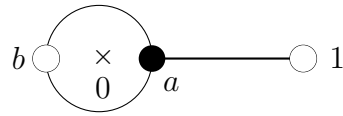


FIGURA 9.15. Dessin d'enfant de género zero y valencia $(3; 1, 2; 1, 2)$

Ejemplo 64. — Módulo isomorfía, sólo hay dos dessins d'enfants con valencia $(1^2, 4; 1^2, 2^2; 6)$ como se muestran en la Figura 9.16.

En el caso del dessin d'enfant D_1 , tenemos que su grupo de monodromía (con el enumerado dado) es $G_1 = \langle \sigma_1, \tau_1 \rangle < \mathfrak{S}_5$, donde

$$\sigma_1 = (1, 2, 3, 4)(5)(6), \quad \tau_1 = (1, 5)(3, 6)(2)(4)$$

de donde se puede ver que $|G_1| = 48$.

En el caso del dessin d'enfant D_2 , tenemos que su grupo de monodromía (con el enumerado dado) es $G_2 = \langle \sigma_2, \tau_2 \rangle < \mathfrak{S}_5$, donde

$$\sigma_2 = (1, 2, 3, 4)(5)(6), \quad \tau_2 = (1, 5)(2, 6)(3)(4)$$

de donde se puede ver que $|G_2| = 120$, es decir, $G_2 = \mathfrak{S}_5$.

En particular, vemos que D_1 y D_2 no pueden estar en la misma órbita por la acción de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, es decir, ambos dessins d'enfants son definibles sobre \mathbb{Q} .

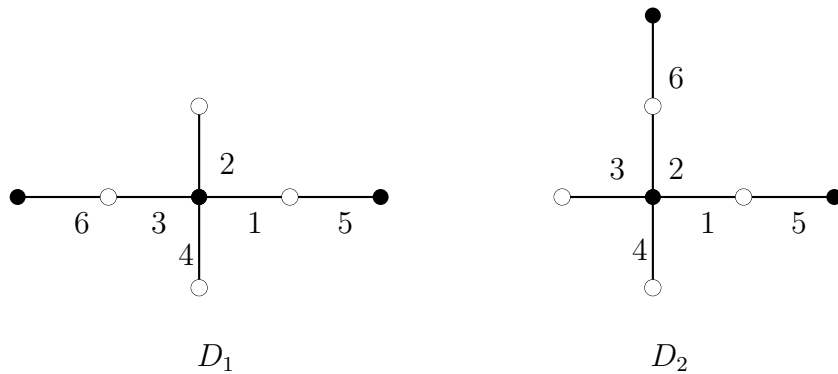


FIGURA 9.16. Dessins d'enfants de género zero y valencia $(1^2, 4; 1^2, 2^2; 6)$

Ejemplo 65. — Módulo isomorfía, sólo hay dos dessins d'enfants con valencia $(1^{22}, 5; 5^3, 6^2; 27)$ como se muestran en la Figura 9.17.

En el caso del dessin d'enfant D_1 , tenemos que su grupo de monodromía (con una enumeración adecuada) es $G_1 = \langle \sigma_1, \tau_1 \rangle < \mathfrak{S}_{27}$, donde

$$\sigma_1 = (1, 2, 3, 4, 5),$$

$$\tau_1 = (1, 6, 7, 8, 9)(2, 10, 11, 12, 13, 14)(3, 15, 16, 17, 18)(4, 19, 20, 21, 22)$$

de donde se puede ver que $G_1 = \mathcal{A}_{27}$.

En el caso del dessin d'enfant D_2 , tenemos que su grupo de monodromía (con el enumerado dado) es $G_2 = \langle \sigma_2, \tau_2 \rangle < \mathfrak{S}_{27}$, donde

$$\sigma_2 = (1, 2, 3, 4, 5),$$

$$\tau_2 = (1, 6, 7, 8, 9)(2, 10, 11, 12, 13)(3, 14, 15, 16, 17, 18)$$

$$(4, 19, 20, 21, 22, 23)(5, 24, 25, 26, 27)$$

de donde se puede ver que $G_2 = \mathcal{A}_{27}$.

Se sabe que estos dos dessins d'enfants no están en la misma órbita por el grupo $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$; luego cada uno de ellos es definible sobre \mathbb{Q} .

9.15. Funciones de Belyi de género cero y dinámica racional

Un buen texto clásico para estudiar dinámica de funciones racionales es el libro de A. F. Beardon [1].

Consideremos una función racional $R : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. La órbita de un punto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ es dada por

$$\{z, R(z), R^2(z), \dots\}.$$

El *conjunto de Fatou* de R es el abierto $F(R) \subset \widehat{\mathbb{C}}$ donde la familia de iteradas de R es normal; su complemento, $J(R)$, es el *conjunto de Julia* de R .

Hay ejemplos donde $F(R) = \emptyset$ (como veremos luego) y cuando el grado de R es al menos dos, entonces $J(R) \neq \emptyset$. Para ver esto último, notemos que si $d \geq 2$ es el grado de R y tenemos que $F(R) = \widehat{\mathbb{C}}$, entonces (por la definición del conjunto de Fatou), debe haber una sucesión de iteradas R^{n_j} que converge uniformemente en toda la esfera de Riemann a una función holomorfa T (luego una función racional de algún grado l). Pero el grado de R^{n_j} crece exponencialmente en d y por otro lado estos grados deberían tender a l ; esto es imposible para $d \geq 2$.

La función racional R es llamada *caótica* si $J(R) = \widehat{\mathbb{C}}$.

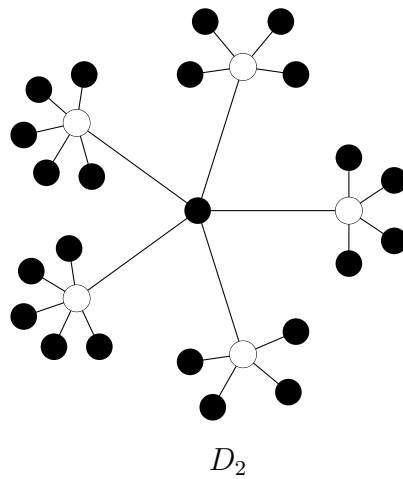
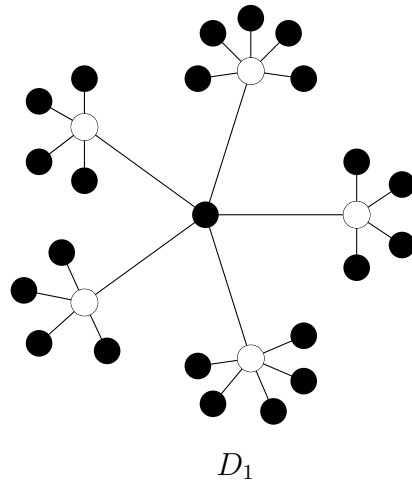


FIGURA 9.17. Dessins d'enfants de género zero y valencia $(1^{22}, 5; 5^3, 6^2; 27)$

Un punto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ es llamado un *punto periódico* de R si existe un entero $n \geq 1$ tal que $R^n(z) = z$ (en caso que n se puede escoger como 1, entonces z es llamado un *punto fijo* de R). Diremos que z es un *punto pre-periódico* de R si existe un entero $n \geq 1$ tal que $R^n(z)$ es periódico.

Teorema 9.15.1 (Sullivan). — Una función racional R , de grado $d \geq 2$, es caótica si sus puntos críticos son pre-periódicos, pero no periódicos.

Un ejemplo de una función racional caótica, dada por Sullivan, es

$$R(z) = \left(\frac{z - 2}{z} \right)^2,$$

cuyos puntos críticos son 0 y 2. En este caso

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{R} & \infty & \xrightarrow{R} & 1 & \xrightarrow{R} & \infty \\ 2 & \xrightarrow{R} & 0 & \xrightarrow{R} & \infty & \xrightarrow{R} & 1 \end{array}$$

Notemos que la función racional anterior es una función de Belyi asociado al dessin d'enfant mostrado en la Figura 9.18 que tiene la propiedad que sus valores críticos $\infty, 0$ y 1 son vértices (blancos y/o negros) y centros de cara (polos).

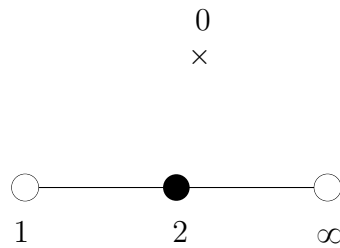


FIGURA 9.18. Dessin d'enfant de género zero y valencia $(2; 1^2; 2)$

Dessins d'enfants de género 0 permiten obtener más ejemplos de funciones racionales caóticas. Para hacer esto, consideramos funciones de Belyi $\beta : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ con la propiedad que

$$\{\beta(\infty), \beta(0), \beta(1)\} = \{\infty, 0, 1\}.$$

Este tipo de funciones de Belyi son llamadas *funciones de Belyi dinámicas*. Con esta propiedad, tenemos que cada iterada de β sigue siendo una función de Belyi.

Sea β entonces una función de Belyi dinámica. Esto lo podemos identificar en el dessin d'enfant diciendo que los puntos $\infty, 0$ y 1 están contenidos en los vértices (negros y blancos) y centros de caras. Recordemos que (pre-componiendo con una transformación de Móbius) esto siempre lo podemos asumir.

Ahora, como los puntos críticos de la función de Belyi son aquellos vértices negros y blancos y centros de cara, que tengan grado al menos 2,

podemos ver en el dessin d'enfant la condición que los puntos críticos sean pre-periódicos y no periódicos y de esta manera ver si β es o no caótica.

Ejemplo 66. — Consideremos un dessin d'enfant de género cero donde hay dos vértices blancos v_1 y v_2 , ambos de grado 1. Entonces, si colocamos $v_1 = 1$, $v_2 = \infty$ y un centro de cara siendo 0, vemos que 1 y ∞ no son puntos críticos (pero 0 si lo puede ser). En tal caso, tenemos :

1. si v_\bullet es un vértice negro, entonces su órbita es de la forma

$$v_\bullet \xrightarrow{\beta} 0 \xrightarrow{\beta} \infty \xrightarrow{\beta} 1 \xrightarrow{\beta} \infty$$

2. si v_\circ es un vértice blanco, entonces su órbita es de la forma

$$v_\circ \xrightarrow{\beta} 1 \xrightarrow{\beta} \infty$$

3. si v_\star es un centro de cara, entonces su órbita es de la forma

$$v_\star \xrightarrow{\beta} \infty \xrightarrow{\beta} 1 \xrightarrow{\beta} \infty$$

Observamos que los puntos críticos de β son pre-periódicos y no periódicos. Luego, por el teorema de Sullivan, β es caótica.

REFERENCIAS

- [1] A. F. Beardon. *Iteration of Rational Functions*. Graduate Texts in Mathematics **132**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1991).
- [2] G. V. Belyi. On Galois extensions of a maximal cyclotomic field. *Mathematics of the USSR-Izvestiya* **14** No.2 (1980), 247–256.
- [3] G. Cardona and J. Quer. Field of moduli and field of definition for curves of genus 2. In : Shaska, T. (ed.) Computational aspects of algebraic curves, *Lecture Notes Series on Computing* **13** (2005), 71–83.
- [4] P. B. Cohen, C. Itzykson and J. Wolfart. Fuchsian triangle groups and Grothendieck dessins. Variations on a theme of Belyi. *Comm. Math. Phys.* **163** (1994), 605–627.
- [5] M. D. E. Conder, G. A. Jones, M. Streit and J. Wolfart. Galois actions on regular dessins of small genera. *Revista Matemática Iberoamericana* No.1 **29** (2013), 163–181.
- [6] K. Coombes and D. Harbater. Hurwitz families and arithmetic Galois groups. *Duke Math. J.* **52** (1985), 821–839.
- [7] R. Cori and A. Machi. Maps, hypermaps and their automorphisms : a survey I, II, III. *Expositiones Math.* **10** (1992), 403–427 ; 429–447 ; 449–467.
- [8] J. M. Couveignes. Calcul et rationalité de fonctions de Belyi en genre 0. *Annales de l'Institut Fourier* **44** (1994).
- [9] P. Dèbes and M. Emsalem. On fields of moduli of curves. *J. Algebra* **211** (1999), 42–56.

- [10] C. J. Earle. On the moduli of closed Riemann surfaces with symmetries. *Advances in the Theory of Riemann Surfaces* (1971), 119–130. Ed. L.V. Ahlfors et al. (Princeton Univ. Press, Princeton).
- [11] M. Emsalem and P. Lochak. The action of the absolute Galois group on the moduli space of spheres with four marked points. In L. Schneps and P. Lochak (eds.), *The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfants. London Math. Soc. Lect. Notes Ser. 200*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994, 307–321.
- [12] H. Farkas and I. Kra. *Riemann Surfaces*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin 1980.
- [13] The GAP Group. GAP – Groups, Algorithms, and Programming. Version 4.4.12; 2008 (<http://www.gap-systems.org>)
- [14] E. Gironde and G. González-Diez. *Introduction to compact Riemann surfaces and dessins d'enfants*. London Mathematical Society Student Texts **79**. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [15] E. Gironde and G. González-Diez. A note on the action of the absolute Galois group on dessins. *Bull. London Math. Soc.* **39** No. 5 (2007), 721–723.
- [16] A. Grothendieck. Esquisse d'un Programme (1984). In Geometric Galois Actions. In L. Schneps and P. Lochak (eds.), *London Math. Soc. Lect. Notes Ser. 242*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997, 5–47.
- [17] W. R. Hamilton. Letter to John T. Graves “On the Icosian” (17th October 1856). In *Mathematical papers* Vol. **III**, Algebra (eds. H. Halberstam and R.E. Ingram). Cambridge University Press, Cambridge, 1967, pp. 612–625.
- [18] R. A. Hidalgo. Non-hyperelliptic Riemann surfaces with real field of moduli but not definable over the reals. *Archiv der Mathematik* **93** (2009), 219–222.
- [19] R. A. Hidalgo and P. Johnson. Field of Moduli of Generalized Fermat Curves of type $(k, 3)$ with an application to non-hyperelliptic dessins d'enfants. *Journal of Symbolic Computation* **77** (2015) 60-72.

- [20] B. Huggins. *Fields of moduli of hyperelliptic curves*, Ph.D. Thesis, UCLA, 2005.
- [21] B. Huggins. Fields of moduli of hyperelliptic curves. *Math. Res. Lett.* **14** (2007), 249–262.
- [22] F. Jaeger. A survey of the cycle double cover conjecture. In *Cycles in Graphs* (B. Alspach and C. Godsil, Eds.). *Ann. Discrete Math.* **27** (1985), 1–12.
- [23] G. A. Jones and M. Streit. Galois groups, Monodromy Groups and Cartographic Groups. In *Geometric Galois Actions. 2. The inverse Galois Problem, Moduli Spaces and Mapping Class Groups*. L. Schneps and P. Lochak eds., *London Math. Soc. Lect. Notes Ser.* **243**. Cambridge University Press, Cambridge, 1997, 25–65.
- [24] B. Kerékjártó. *Vorlesungen über Topologie I*. Mathematics : Theory & Applications, Springer, Berlín, 1923.
- [25] B. Köck. Belyi’s theorem revisited. *Beitr. Algebra Geom.* **45** No.1 (2004), 253–265.
- [26] B. Köck and D. Singerman. Real Belyi theory. *The Quarterly J. of Math.* **58** (2007), 463-478.
- [27] B. Köck and E. Lau. A note on Belyi’s theorem for Klein surfaces. *The Quarterly J. of Math.* **61** (2010), 103-107.
- [28] S. Koizumi. Fields of moduli for polarized abelian varieties and for curves. *Nagoya Math. J.* **48** (1972), 37–55.
- [29] A. Kontogeorgis. Field of moduli versus field of definition for cyclic covers of the projective line. *J. de Theorie des Nombres de Bordeaux* **21** (2009) 679–692.
- [30] S. K. Lando and A. K. Zvonkin. *Graphs on surfaces and their applications*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences **141** (II). Springer (2004).
- [31] R. Lercier and C. Ritzenthaler. Hyperelliptic curves and their invariants : geometric, arithmetic and algorithmic aspects. *J. Algebra* **372** (2012), 595–636.

- [32] F. Raymond. The end point compactification of manifolds. *Pacific J. Math.* **10** (1960), 947–963.
- [33] I. Richards. On the classification of noncompact surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **106** (1963), 259–269.
- [34] G. Ringel and J. W. T. Youngs. Solution of the Heawood map-coloring problem. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **60** (1968), 438–445.
- [35] R. B. Richter, P. D. Seymour and J. Širáň. Circular embeddings of planar graphs in nonspherical surfaces. *Discrete Mathematics* **126** (1994), 273–280.
- [36] L. Schneps. Dessins d’enfants on the Riemann sphere. In *The Grothendieck theory of dessins d’enfants*. Edited by Leila Schneps. *London Math. Soc. Lect. Notes Ser.* **200**. Cambridge University Press, Cambridge, 1994, 47–77.
- [37] G. Shimura. On the field of rationality for an abelian variety. *Nagoya Math. J.* **45** (1972), 167–178.
- [38] P. D. Seymour. Disjoint paths in graphs. *Discrete Mathematics* **29** (3) (1980), 293–309.
- [39] G. Szekeres. Polyhedral decomposition of cubic graphs. *Bulletin of the Australian Mathematical Society* **8** (03) (1973), 367–387.
- [40] C. Thomassen. The graph genus problem is NP-complete. *Journal of Algorithms* **10** (4) (1989), 568–576.
- [41] A. Weil. The field of definition of a variety. *Amer. J. Math.* **78** (1956), 509–524.
- [42] J. Wolfart. The Obvious part of Belyi’s theorem and Riemann surfaces with many automorphisms. In *Geometric Galois actions*, Vol. 1, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, **242**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 97–112 (1997).
- [43] C. Q. Zhang. *Circuit Double Cover of Graphs*. London Mathematical Society Lecture Note Series 399.

INDICE

- , 63
- Acción de grupos, 63
- Acción regular, 64
- Acción semiregular, 64
- Acción transitiva, 64
- Atlas analítico, 11
- Atlas diferenciable, 8
- Atlas topológico, 7
- Automorfismo anti-holomorfo, 30
- Automorfismo anti-holomorfo de un par de Belyi, 49
- Automorfismo de un dessin d'enfant, 84
- Automorfismo exterior, 66
- Automorfismo holomorfo, 30
- Automorfismo holomorfo de un par de Belyi, 49
- Automorfismo interiore, 66
- Cartas, 7
- Conjunto de fatou, 106
- Conjunto de Julia, 106
- Cubrimiento ramificado asociado a un dessin d'enfant, 83
- Cuerpo de definición, 35
- Cuerpo de funciones meromorfas, 19
- Cuerpo de módulos, 35
- Cuerpo de módulos de un par de Belyi, 50
- Curva p -gonal, 13
- Curva algebraica suave, 13
- Curva de Belyi, 45
- Curva de Fermat, 14, 15
- Curva generalizada de Fermat, 14, 15
- Curvas de Hurwitz, 33
- Dessin d'enfant, 81
- Dessin d'enfant limpio, 82
- Dessin d'enfant real, 100
- Dessins d'enfants isomorfos, 84
- Dibujo de niños, 81
- Divisor, 20
- Divisor efectivo, 20
- Divisores de grado cero, 20
- Divisores principales y canónicos, 20
- Esfera de Riemann, 12
- Espacio de fines de un espacio topológico, 9
- Fines planares, 10
- Formas meromorfas/holomorfas en superficies de Riemann, 18
- Función \wp de Weierstrass, 27
- Función analítica, 15
- Función anti-analítica, 17
- Función anti-holomorfa, 17
- Función biholomorfa, 17
- Función de Belyi, 45
- Función holomorfa, 15
- Función meromorfa, 16
- Función racional caótica, 106
- Funciones de Belyi dinámicas, 108
- Funciones de transición, 7
- Género de una superficie, 10
- Género reducido, 10
- Grado de un divisor, 20

- Grupo de automorfismos de una acción, 63
 Grupo de monodromía de un dessin d'enfant, 90
 Grupo Fuchsiano, 56
 Grupo Kleiniano, 53
 Grupo reducido de automorfismos, 39
 Grupos discontinuos, 53
 isomorfismo entre dessins d'enfants, 84
 Multiplicidad, 16
 Orbifold de Riemann, 59
 Padsaporte de un dessin d'enfant, 83
 Par de Belyi, 45
 Par de Belyi real, 49
 Par de Belyi regular, 49
 Plano hiperbólico, 57
 Polígono fundamental, 57
 Polinomios de Tchebyshev, 45
 Punto fijo de una función racional, 107
 Punto periódico de una función racional, 107
 Punto pre-periódico de una función racional, 107
 Rectas hiperbólicas, 57
 región de discontinuidad, 53
 Signatura de un dessin d'enfant, 81
 Simetría de un dessin d'enfant, 100
 Simetrías, 41
 Subsuperficies, 10
 Superficie de Riemann, 11
 Superficie de Riemann hiperbólica, 56
 Superficie de Riemann hiperelíptica, 13
 Superficie de Riemann real, 41
 Superficie de Riemann simétrica, 41
 Superficies biholomórficamente equivalentes, 17
 Superficies de tipo finito, 11
 Superficies isomorfas, 17
 Superficies topológicas, 7
 Teorema de Uniformización de superficies de Riemann, 18
 Teorema de Uniformización de superficies de Riemann simplemente conexas, 17
 Valencia de un dessin d'enfant, 83
 Variedad diferenciable, 8
 Variedad orientable, 9
 Variedad topológica, 7
 Variedades orientadas, 9