



MONOGRAFÍAS MATEMÁTICAS
UFRO

*GRUPOS KLEINIANOS
Y
VARIETADES
HIPERBÓLICAS
Una Introducción*

Rubén A. Hidalgo



Departamento de Matemática y Estadística
Universidad de La Frontera

Rubén A. Hidalgo

**GRUPOS KLEINIANOS
Y
VARIEDADES HIPERBÓLICAS**

PRIMERA EDICIÓN

Rubén A. Hidalgo

Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de La Frontera, Temuco, Chile.

E-mail : ruben.hidalgo@ufrontera.cl

Url : <http://dme.ufro.cl/rhidalgo>

Clasificación matemática por tema (2000). — 30F10, 30F40, 57M10, 57M25, 57M50, 57M60, 57S30.

Palabras claves. — Grupos Discretos, Grupos Kleinianos, Variedades Hiperbólicas.

Este trabajo fue parcialmente financiado por Fondecyt 1150003 y Anillo ACT 1415 PIA-CONICYT.

**GRUPOS KLEINIANOS
Y
VARIETADES HIPERBÓLICAS**

PRIMERA EDICIÓN

Rubén A. Hidalgo

A Betty, Cata y Bucky

INTRODUCCIÓN

Esta monografía tiene como propósito general mostrar algunos conceptos y resultados en el área de grupos Kleinianos (grupos discretos de isometrías del espacio hiperbólico) y *variedades hiperbólicas*, con énfasis en dimensión tres. Los ejercicios propuestos debieran permitir al lector poder entender las nociones expuestas. Se darán algunos ejemplos que permitan aclarar teoremas difíciles, aunque algunos ejemplos son en si no muy fáciles. Hay muchos temas que no trataremos, por ejemplo, laminaciones geodésicas medibles, herramienta desarrollada y utilizada por W.P. Thurston [21] para obtener gran parte de sus resultados en el problema de hiperbolización de variedades 3-dimensionales y la compactificación del Espacio de Teichmüller. Tampoco se incorporan la teoría de homeomorfismos casi-conformes, importante para entender las deformaciones de estructuras hiperbólicas, la teoría ergódica en $\widehat{\mathbb{C}}$ de los grupos Kleinianos, clasificación, moduli, etc. Buenas referencias para complementar estas notas son por ejemplo los libros [3], [11] y [20].

El primer capítulo está dedicado a la definición y a algunas de las propiedades del espacio hiperbólico n -dimensional \mathbb{H}^n y sus isometrías. Se relaciona por medio de la extensión de Poincaré la geometría hiperbólica n -dimensional y sus isometrías con la geometría conformal en la esfera $(n - 1)$ -dimensional S^{n-1} , el borde natural del espacio hiperbólico, y las transformaciones de Möbius, los automorfismos conformales/anticonformes de la esfera. Las isometrías hiperbólicas de \mathbb{H}^n son en particular transformaciones de Möbius de la esfera S^n . En el segundo capítulo tratamos los grupos discretos y discontinuos de transformaciones de Möbius y, en particular, de isometrías hiperbólicas. Se verifica que si bien hay grupos discretos de transformaciones de Möbius que no son discontinuos en la esfera, esto no es así para las isometrías hiperbólicas. En el capítulo tres miramos algunas propiedades de las variedades hiperbólicas de dimensión tres e indicamos algunos aspectos de la teoría de hiperbolización (de manera muy superficial) de W.P. Thurston.

Esperamos que esta monografía pueda servir de base tanto a los no especialistas como a los estudiantes principiantes de postgrado y/o terminales de pregrado interesados en conocer el tema.

TABLA DE MATERIAS

Introducción	ix
1. Transformaciones de Möbius y el Espacio Hiperbólico	1
1.1. La Compactificación de Alexandroff $\widehat{\mathbb{R}^n}$	1
1.2. La Proyección Estereográfica.....	1
1.3. La Métrica Cordal en $\widehat{\mathbb{R}^n}$	2
1.4. Reflexiones.....	2
1.5. Transformaciones de Möbius.....	4
1.6. Puntos Fijos y Formas Canónicas.....	5
1.7. El Teorema de Liouville.....	6
1.8. Extensión de Poincaré.....	7
1.9. Esferas Isométricas.....	8
1.10. Espacio Hiperbólico n-Dimensional.....	10
1.11. Clasificación de las Transformaciones de Möbius.....	15
1.12. Isometrías del Espacio Hiperbólico.....	16
2. Grupos Discretos y Discontinuos	19
2.1. Grupos Discretos.....	19
2.2. Grupos Discontinuos.....	21
2.3. Relación Discreto :Discontinuo.....	22
2.4. Variedades Hiperbólicas/Variedades Conformales.....	24
2.5. Caso n=3 : Análisis Complejo / Geometría Hiperbólica.....	25
2.6. Grupos de Schottky.....	25
2.7. Grupos de Schottky Anodados.....	28
2.8. Grupos de Schottky Anodados Topológicamente Equivalentes.....	29
2.9. Teorema de Retrosección Anodado.....	30
3. Variedades Hiperbólicas 3-Dimensionales	31
3.1. Variedades Hiperbólicas 3-Dimensionales.....	31
3.2. Variedades Hiperbólicas son Atoroidales.....	32
3.3. Complemento de Nudos.....	36
3.4. Fibrados sobre S^1	37

3.5. Ejemplo 3 : Picarones :=Handlebodies.....	45
3.6. Ejemplo 4 : Grupos CasiFuchsianos.....	46
Referencias	47
Indice	49

CAPÍTULO 1

TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS Y EL ESPACIO HIPERBÓLICO

1.1. La Compactificación de Alexandroff $\widehat{\mathbb{R}}^n$

La compactificación de Alexandroff del espacio Euclidiano \mathbb{R}^n es definido como $\widehat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, cuya topología es la generada por los abiertos usuales de \mathbb{R}^n y los conjuntos de la forma $K^c \cup \{\infty\}$, donde K recorre los subconjuntos compactos de \mathbb{R}^n . Se tiene que \mathbb{R}^n es un espacio denso en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ y este último es un espacio compacto Hausdorff.

Ejercicio 1. — Dotar a $\widehat{\mathbb{R}}^n$ de la estructura de una variedad diferenciable orientada.

Podemos identificar el espacio $\widehat{\mathbb{R}}^n$ con el subespacio de $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ dado por

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\} \cup \{\infty\}$$

Ejercicio 2. — Construir un homeomorfismo para verificar lo dicho arriba.

1.2. La Proyección Estereográfica

La esfera unitaria n -dimensional es

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

con la topología inducida por la de $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$. Podemos construir la función $\Pi : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow S^n$ definida por

$$\Pi(x) = \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right)$$
$$\Pi(\infty) = \infty$$

llamada la *proyección estereográfica*. Su interpretación geométrica se puede ver en la figura 1.1.

Sea $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Una k -esfera en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ es por definición una esfera de dimensión k en \mathbb{R}^n ó bien la unión de $\{\infty\}$ con un k -plano. De manera similar, una k -esfera en S^n es la intersección ortogonal de S^n con una esfera de dimensión $(k+1)$ en \mathbb{R}^{n+1} .

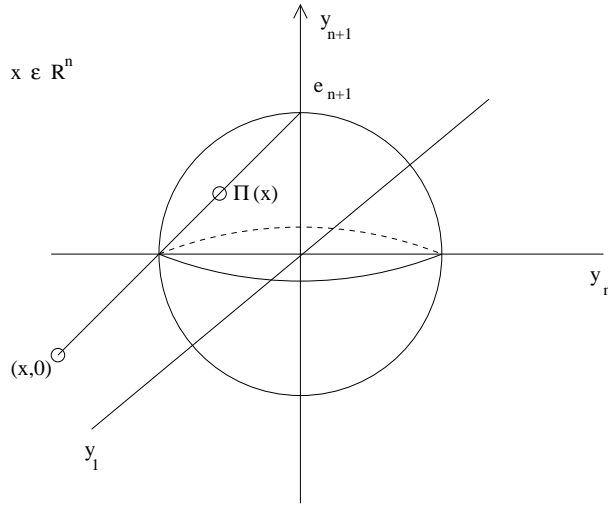


FIGURA 1.1

Ejercicio 3. — Verificar que $\Pi : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow S^n$ es un homeomorfismo, de hecho un difeomorfismo, que preserva tanto ángulos como orientación. Ver también que cada k -esfera de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ es enviada en una k -esfera de S^n .

El ejercicio anterior nos permite hablar de manera indistinta tanto de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ como de S^n .

1.3. La Métrica Cordal en $\widehat{\mathbb{R}}^n$

La proyección estereográfica $\Pi : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow S^n$ permite transferir la métrica Euclidiana de S^n a $\widehat{\mathbb{R}}^n$ como

$$d(x, y) = \|\Pi(x) - \Pi(y)\| = \begin{cases} \frac{2\|x-y\|}{\sqrt{(1+\|x\|^2)}\sqrt{(1+\|y\|^2)}}, & x, y \in \mathbb{R}^n \\ \frac{2}{\sqrt{(1+\|x\|^2)}}, & x \in \mathbb{R}^n, y = \infty \end{cases}$$

La métrica así obtenida en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ es llamada la *métrica cordal*. Como la topología inducida en S^n esta inducida por la norma Euclidiana en \mathbb{R}^{n+1} y Π es homeomorfismo, tenemos que la métrica cordal define la misma topología antes definida en $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Por construcción, tenemos que con tal métrica cordal tenemos que $\Pi : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow S^n$ resulta ser una isometría.

1.4. Reflexiones

Una esfera $(n-1)$ -dimensional en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ que pasa por el punto ∞ es de la forma $\Sigma \cup \{\infty\}$, donde Σ es un hiperplano de \mathbb{R}^n . El hiperplano Σ está únicamente determinado por una dirección ortogonal $\pm v \in S^{n-1}$ y un punto $p \in \Sigma$

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x - p, v \rangle = 0\}$$

La reflexión en esta esfera es la usual; desde cada punto $x \notin \Sigma$ proyectamos en la dirección ortogonal hacia Σ y continuamos en la misma dirección desde Σ la distancia $d(x, \Sigma)$. De manera más precisa, la reflexión es dada por

$$\sigma_{\Sigma}(x) = x - 2\langle x - p, v \rangle v$$

Una esfera $(n - 1)$ -dimensional que no pasa por ∞ es una esfera Euclidiana en \mathbb{R}^n . Ahora, toda esfera en \mathbb{R}^n está únicamente determinada por su radio $r > 0$ y su centro $p \in \mathbb{R}^n$, esta esfera la denotaremos por $S(p, r)$. La reflexión $\sigma_{S(p, r)}$ es definida como sigue: si x está en contenido en la región no acotada determinada por $S(p, r)$, entonces consideramos una recta por x tangente a $S(p, r)$ y desde el punto de tangencia proyectamos ortogonalmente en el rayo determinado por x y el centro p . De manera más precisa, la reflexión en este caso es dada por

$$\sigma_{S(p, r)}(x) = r^2(x - p)/\|x - p\|^2 + p$$

Para el caso $n = 3$, al identificar \mathbb{R}^3 con $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$, las reflexiones anteriores pueden ser escritas de la siguiente manera.

- (1) Si \mathcal{C} es el círculo en el plano complejo de centro p y radio $R > 0$, entonces la ecuación de la semiesfera en \mathbb{H}^3 que ella genera es

$$\{(z, t) \in \mathbb{H}^3 : |z - p|^2 + t^2 = R^2\}.$$

La reflexión en \mathcal{C} es

$$\sigma(z) = \frac{R^2}{\overline{z - p}} + p$$

y su extensión es dada por la reflexión en la semiesfera generada, es decir

$$\sigma(z, t) = \frac{R^2(z - p, t)}{|z - p|^2 + t^2} + (p, 0)$$

- (2) Si \mathcal{C} es la recta L unión ∞ , pasando por el punto $p \in \mathbb{C}$ y haciendo un ángulo θ con el eje $\{Im(z) = 0\}$, entonces la semiesfera generada por L en \mathbb{H}^3 es un semiplano ortogonal al borde en L , dada por la ecuación

$$\{(z, t) \in \mathbb{H}^3 : z \in L\}.$$

La reflexión en \mathcal{C} es

$$\sigma(z) = e^{2i\theta} \overline{z - p} + p$$

y su extensión es dada por

$$\sigma(z, t) = (e^{2i\theta} \overline{z - p} + p, t)$$

De la definición de reflexión en esferas $(n - 1)$ -dimensionales de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ tenemos las siguientes propiedades.

Proposición 1.4.1. — Sea σ una reflexión en una esfera $(n - 1)$ -dimensional $\mathcal{S} \subset \widehat{\mathbb{R}}^n$. Entonces:

- (i) $\sigma^2(x) = x$, para todo $x \in \widehat{\mathbb{R}}^n$.
- (ii) $\sigma(x) = x$ si y sólo si $x \in \mathcal{S}$.
- (iii) σ es un difeomorfismo de $\widehat{\mathbb{R}}^n$.

(iv) Si \mathcal{S} es de la forma $\Sigma \cup \{\infty\}$, donde

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x - p, v \rangle = 0\}$$

entonces

$$\|\sigma(x) - \sigma(y)\| = \|x - y\|$$

para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$, es decir, σ resulta ser una isometría Euclidiana. Además,

$$D\sigma(x) = I - 2A$$

donde $A = {}^t v v$, es una matriz ortogonal de determinante -1 , es decir, σ es un automorfismo anticonformal de $\widehat{\mathbb{R}}^n$.

(v) Si \mathcal{S} es una esfera $S(p, r)$, entonces

$$D\sigma(x) = \frac{r^2}{\|x - p\|^2} (I - 2A)$$

donde $A = {}^t w w$ y $w = \frac{x-p}{\|x-p\|} \in S^{n-1}$. La Matriz $I - 2A$ es ortogonal de determinante -1 , es decir, σ no preserva distancias Euclidiana pero es automorfismo anticonformal de $\widehat{\mathbb{R}}^n$.

(vi) Si \mathcal{Q} es una esfera k -dimensional en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, entonces $\sigma(\mathcal{Q})$ también lo es.

Demonstración. — Las propiedades (i), (ii), (iii) y (vi) son fáciles de verificar. La forma de la matriz Jacobiana en casos (iv) y (v) son un cálculo directo y observar que si $u \in S^{n-1}$, entonces $u {}^t u = 1$ y la matriz $U = {}^t u u$ es simétrica y $U^2 = U$. Como el determinante no cambia bajo conjugaciones, podemos conjugar por una rotación para suponer $u = e_1$. En este caso $I - 2A$ resulta ser la matriz diagonal $\text{diag}[-1, 1, \dots, 1]$, cuyo determinante es -1 . \square

1.5. Transformaciones de Möbius

Las reflexiones en esferas $(n-1)$ -dimensionales de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ generan un grupo, con la regla de composición, llamado el *grupo extendido de transformaciones de Möbius* y denotado por $\widehat{\mathbb{M}}^n$. Su subgrupo de índice dos formado por las composiciones pares de estas reflexiones es denotado por \mathbb{M}^n y llamado el *grupo de transformaciones de Möbius*. Las transformaciones de \mathbb{M}^n son llamadas *transformaciones de Möbius* y las de $\widehat{\mathbb{M}}^n - \mathbb{M}^n$ son llamadas *transformaciones extendidas de Möbius*.

Proposición 1.5.1. — El grupo $\widehat{\mathbb{M}}^n$ es generado por

- (i) *Traslaciones* $T(x) = x + a$, donde $a \in \mathbb{R}^n$;
- (ii) *Dilataciones* $D(x) = rx$, donde $r > 0$;
- (iii) *Rotaciones* $R(x)$, donde $R \in O_n$;
- (iv) y la *reflexión* $J(x) = x/\|x\|^2$ en S^{n-1} .

Demonstración. — Cada hiperplano en \mathbb{R}^n es imagen por una translación de un hiperplano que pasa por 0. Cada hiperplano por 0 es rotación del hiperplano $\mathbb{R}^{n-1} = \{x_n = 0\}$. En forma similar, cada esfera es imagen por una translación de una esfera centrada en 0 y cada una de estas es la imagen por una dilatación de la esfera unitaria S^{n-1} . \square

1.6. Puntos Fijos y Formas Canónicas

Proposición 1.6.1. — Sea $T \in \widehat{\mathbb{M}}^n$, $T \neq I$.

(i) Siempre podemos escribir T como

$$T(x) = rR \circ \sigma(x) + a$$

donde $r > 0$, $R \in O_n$, σ es la identidad si $T(\infty) = \infty$ ó la reflexión en la esfera de radio 1 centrada en el punto $T^{-1}(\infty)$, y $a \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Si T tiene al menos dos puntos fijos, entonces esta es conjugada por una transformación de Möbius a una transformación de la forma

$$S(x) = rR(x)$$

donde $r > 0$ y $R \in O_n$.

(iii) Si T tiene exactamente un punto fijo en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, entonces esta es conjugada por una transformación de Möbius a una transformación de la forma

$$S(x) = R(x) + a$$

donde $R \in O_n$ y $a \in \mathbb{R}^n$ es tal que $a \notin \text{Im}(I - R)$. Más aún, podemos asumir que

$$R = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & R_1 \end{bmatrix}$$

donde I es matriz identidad de tamaño k , $\det(I - R_1) \neq 0$ y $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^k + \mathbb{R}^{n-k}$ es tal que $a_1 \neq 0$.

Demonstración. — Sea $T \neq I$. Si $T^{-1}(\infty) = \infty$, entonces sea $\sigma = I$; en caso contrario, sea σ la reflexión en la esfera de radio 1 y centro en $T^{-1}(\infty)$. Entonces $T \circ \sigma$ fija ∞ . Componiendo a la izquierda por la translación $L(x) = x - T(\sigma(0))$, obtenemos que $L \circ T \circ \sigma$ fija ∞ y 0. Como esta transformación es (extendida) de Möbius, es decir, preserva ángulos y envía las líneas por el origen en ellas mismas, tenemos que existe una rotación $R \in O_n$ y un número $r > 0$ tal que $\frac{1}{r}R^{-1} \circ L \circ T \circ \sigma = I$. Al despejar la transformación T obtenemos la forma deseada en (i).

Supongamos ahora que T tiene un punto fijo $p \in \widehat{\mathbb{R}}^n$. Conjugando por una transformación de Möbius, podemos asumir que $p = \infty$. En efecto, si $p = \infty$ conjugamos por la identidad y si $p \neq \infty$, entonces conjugamos por $J \circ \sigma$, donde J es la reflexión en $\widehat{\mathbb{R}}^{n-1}$ y σ es la reflexión en la esfera $S(p, 1)$. Así, podemos suponer que $T(\infty) = \infty$. Ahora, usando (i) obtenemos necesariamente $\sigma = I$, es decir T es conjugada a una transformación de la forma $S(x) = rR(x) + a$, donde $r > 0$, $R \in O_n$ y $a \in \mathbb{R}$. Si T tiene otro punto fijo, entonces conjugando por una translación L podemos asumir que $S(0) = 0$. En este caso, $a = 0$ y obtenemos la forma deseada en (ii).

Si S no tiene puntos fijos en \mathbb{R}^n , entonces no existe solución a la ecuación

$$S(x) = x$$

lo cual es lo mismo a decir que $(\frac{1}{r} - R)x = a$ no tiene solución. Esto dice que $a \notin \text{Im}(\frac{1}{r}I - R)$. En particular, $\det(\frac{1}{r}I - R) = 0$, con lo cual obtenemos que $r > 0$ debe

ser valor propio de $R \in O_n$, es decir, $r = 1$ y por ende $a \notin \text{Im}(I - R)$ como es pedido. Sea $k > 0$ la dimensión del espacio propio asociado al valor propio 1 de R . Entonces podemos escribir (conjugando por una rotación adecuada)

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k + \mathbb{R}^{n-k}$$

donde \mathbb{R}^k denota este espacio propio y \mathbb{R}^{n-k} denota su complemento ortogonal Euclidiano. Así,

$$R = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & R_1 \end{bmatrix}$$

donde I es matriz identidad de tamaño k y $\det(I - R_1) \neq 0$. En este caso, $\text{Im}(I - R) = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}$. Esto dice que $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^k + \mathbb{R}^{n-k}$ es tal que $a_1 \neq 0$. \square

Observación 1.6.2. — Sea $T \in \widehat{\mathbb{M}}^n$ tal que $T \neq I$. Supongamos que T tiene un punto fijo. Conjugando T por una transformación de Möbius, podemos suponer que $T(x) = rR(x) + a$, donde $R \in O_n$, $r > 0$ y $a \in \mathbb{R}^n$.

- (i) **Caso 1 :** Supongamos que existe otro punto fijo de T . Conjugando por una translación, podemos asumir $T(x) = rR(x)$. Si $r = 1$, entonces $T \in O_n$. Si $r \neq 1$, entonces T envía la esfera S^{n-1} en la esfera $S(0, r)$. Se puede verificar que

$$(\mathbb{R} - \{0\})/\langle T \rangle \cong S^1 \times S^{n-1}$$

- (ii) **Caso 2 :** Supongamos que T no tiene otro punto fijo. Entonces $T(x) = R(x) + a$, donde $R \in O_n$ y $a \notin \text{Im}(I - R)$. Ahora, si k denota la dimensión del espacio propio asociado a 1,

$$R = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & R_1 \end{bmatrix}$$

donde I es la matriz identidad de tamaño k , $\det(I - R_1) \neq 0$ y $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ es tal que $a_1 \neq 0$. Luego T envía el plano $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}$ en el plano $\{a_1\} \times \mathbb{R}^{n-k}$. En este caso,

$$\mathbb{R}^n / \langle T \rangle \cong \mathbb{R}^{n-k} \times S^1 \times \mathbb{R}^{k-1} \cong \mathbb{R}^{n-1} \times S^1$$

Dado un subconjunto abierto y conexo $U \subset \widehat{\mathbb{R}}^n$ denotaremos por $\text{Aut}(U)$ al grupo de sus automorfismos conformales/anticonformales. Por lo visto anteriormente, tenemos que cada reflexión y luego cada transformación (extendida) de Möbius es un automorfismo conformal (anticonformal) de $\widehat{\mathbb{R}}^n$. El siguiente resultado asegura que estas son todas.

1.7. El Teorema de Liouville

Teorema 1.7.1 (Teorema de Liouville [2]). — Si $n \geq 3$, U, V abiertos conexos de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ y $f : U \rightarrow V$ un homeomorfismo conformal/anticonformal, entonces f es la restricción de una transformación (extendida) de Möbius. En particular, si $n \geq 3$ $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{R}}^n) = \widehat{\mathbb{M}}^n$.

Para el caso $n = 2$ tenemos también cierto de $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{R}^2}) = \widehat{\mathbb{M}}^2$, ya que en este caso podemos identificar $\widehat{\mathbb{R}^2}$ con la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ y las reflexiones resultan ser automorfismos antianalíticos, luego automorfismos anticonformales. Debemos también observar que la rigidez dada por el teorema de Liouville para $n \geq 3$ contrasta con la propiedad de rigidez que se tiene del teorema de la aplicación de Riemann. En este caso tenemos que las transformaciones de Möbius son de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$$

y una transformación extendida de Möbius es de la forma

$$T(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d},$$

donde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$$

1.8. Extensión de Poincaré

Recordemos que podemos identificar $\widehat{\mathbb{R}^n}$ con el subespacio $\{x_{n+1} = 0\} \cup \{\infty\}$ de $\widehat{\mathbb{R}^{n+1}}$. Cada esfera $(n-1)$ -dimensional \mathcal{S} de $\widehat{\mathbb{R}^n}$ determina de manera única una esfera n -dimensional $\widehat{\mathcal{S}}$ de $\widehat{\mathbb{R}^{n+1}}$ de manera que $\widehat{\mathcal{S}} \cap \widehat{\mathbb{R}^n} = \mathcal{S}$ y la intersección es ortogonal. Tenemos entonces que la reflexión en \mathcal{S} es la restricción a $\widehat{\mathbb{R}^n}$ de la reflexión en $\widehat{\mathcal{S}}$. De esta manera, obtenemos una extensión natural de cada transformación (extendida) de Möbius de $\widehat{\mathbb{M}^n}$ a una transformación (extendida) de Möbius en $\widehat{\mathbb{M}^{n+1}}$. Esta extensión es conocida como la *extensión de Poincaré*.

Por ejemplo, para $n = 3$, usando la identificación \mathbb{R}^3 con $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$, la extensión de Poincaré de la transformación de Möbius

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$$

es dada por

$$\widehat{T}(z, t) = \left(\frac{(az + b)\overline{(cz + d)} + a\bar{c}t^2}{|cz + d|^2 + |c|^2t^2}, \frac{t}{|cz + d|^2 + |c|^2t^2} \right)$$

La reflexión $J(z) = -z$ tiene como extensión de Poincaré a $\widehat{J}(z, t) = (-z, t)$.

Ejercicio 4. — Denotemos por \widehat{F} la extensión de Poincaré de F . Verificar que si S y T son transformaciones de Möbius, entonces $\widehat{ST} = \widehat{S}\widehat{T}$. Probar que la extensión de Poincaré permite ver $\widehat{\mathbb{M}^n}$ como un subgrupo de $\widehat{\mathbb{M}^{n+1}}$ y \mathbb{M}^n como un subgrupo de \mathbb{M}^{n+1} .

Denotemos por

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} > 0\}$$

al semiespacio superior de Poincaré. Si $T \in \text{Aut}(\mathbb{H}^{n+1})$, entonces por el teorema de Liouville tenemos que $T \in \widehat{\mathbb{M}}^{n+1}$, para $n \geq 2$. Así, tenemos que

$$\text{Aut}(\mathbb{H}^{n+1}) = \{T \in \widehat{\mathbb{M}}^{n+1} : T(\mathbb{H}^{n+1}) = \mathbb{H}^{n+1}\}$$

Es claro de la definición de la extensión de Poincaré que tenemos

$$\widehat{\mathbb{M}}^n < \text{Aut}(\mathbb{H}^{n+1})$$

Por otro lado, si $T \in \text{Aut}(\mathbb{H}^{n+1})$, entonces $T(\widehat{\mathbb{R}}^n) = \widehat{\mathbb{R}}^n$ y luego la restricción de T a $\widehat{\mathbb{R}}^n$ es un automorfismo conformal/anticonformal de este y luego una transformación (extendida) de Möbius cuya extensión de Poincaré es exáctamente, es decir,

$$\text{Aut}(\mathbb{H}^{n+1}) = \widehat{\mathbb{M}}^n$$

Dada cualquier esfera $S(p, r) \in \widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$, siempre es posible encontrar una transformación de Möbius $Q \in \widehat{\mathbb{M}}^{n+1}$ tal que $Q(\mathbb{H}^{n+1}) = B(p, r) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x - p\| < r\}$. En efecto, consideremos $A(x) = x - 2\langle x, e_{n+1} \rangle e_{n+1}$ la reflexión en la esfera $\widehat{\mathbb{R}}^n$, $B(x) = 2r^2 / \|x - re_{n+1}\|^2 + re_{n+1}$ la reflexión en la esfera $S(re_{n+1}, r\sqrt{2})$ y $C(x) = x + p$. Entonces $Q = C \circ B \circ A \in \widehat{\mathbb{M}}^{n+1}$ sirve. Entonces tenemos que podemos hablar de la extensión de Poincaré respecto a cualquier esfera n -dimensional en $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ y no sólo respecto a la esfera $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Además,

$$\text{Aut}(B(p, r)) = Q\widehat{\mathbb{M}}^nQ^{-1}$$

y al restringir a los bordes

$$\text{Aut}(S(p, r)) = Q\widehat{\mathbb{M}}^nQ^{-1}$$

1.9. Esferas Isométricas

Sea $T \in \widehat{\mathbb{M}}^n$ tal que $T(\infty) \neq \infty$. Si σ es la reflexión en la esfera $S(T^{-1}(\infty), 1)$, entonces $T \circ \sigma$ fija al punto ∞ . Si tomamos $a = T \circ \sigma(0)$, entonces usando $L(x) = x - a$ tenemos que

$$\begin{cases} L \circ T \circ \sigma(\infty) & = \infty \\ L \circ T \circ \sigma(0) & = 0 \\ L \circ T \circ \sigma & \in \widehat{\mathbb{M}}^n \end{cases}$$

Como consecuencia de 1.6.1 tenemos que

$$T(x) = rR \circ \sigma(x) + a$$

En particular, $T(S(p, s)) = S(T(\infty), r/s)$, $s > 0$. Si consideramos $s = \sqrt{r}$, tenemos que $T(S(p, \sqrt{r})) = S(T(\infty), \sqrt{r})$. La esfera

$$I(T) = S(p, \sqrt{r})$$

es llamada la *esfera isométrica de T* . En forma análoga uno puede obtener que la esfera isométrica de T^{-1} es

$$I(T^{-1}) = S(T(\infty), \sqrt{r})$$

y luego obtenemos que

$$T(I(T)) = I(T^{-1})$$

Una consecuencia directa de lo anterior tenemos el siguiente.

Proposición 1.9.1. — Sea $T \in \widehat{\mathbb{M}}^n$ tal que $T(\infty) \neq \infty$, $X \subset \widehat{\mathbb{R}}^n$ y tal que la distancia Euclidiana entre $T^{-1}(\infty)$ y X sea positiva $\rho > 0$. Si \sqrt{r} es el radio de la esfera isométrica de T , entonces, denotando por $Diam$ al diámetro Euclidiano, obtenemos que :

(i) $Diam(T(X)) \leq 2r/\rho$;

(ii) si ∞ pertenece a la clausura de X , entonces $Diam(T(X)) \geq r/\rho$.

Demonstración. — Por lo visto anteriormente, podemos escribir $T(x) = rR \circ \sigma(x) + a$, donde R es una rotación y $a \in \mathbb{R}^n$. Como translaciones y rotaciones son isometrías Euclidianas, tenemos que $Diam(T(X)) = Diam(r\sigma(X))$. Observemos que $r\sigma$ es la reflexión en $I(T)$. Como $X \subset B(T^{-1}(\infty), \rho)^c$, tenemos que

$$Diam(T(X)) = Diam(r\sigma(X)) \leq Diam(r\sigma(B(T^{-1}(\infty), \rho)^c)) = 2r/\rho$$

obteniendo la primera desigualdad. Si tenemos que ∞ está en la clausura de X , entonces en la clausura de $r\sigma(X)$ tenemos al punto $T^{-1}(\infty)$ y al menos un punto del borde de $r\sigma(S(T^{-1}(\infty), \rho)^c) = S(T^{-1}(\infty), r/\rho)$, obteniendo la segunda desigualdad. \square

En caso que una transformación $T \in \widehat{\mathbb{M}}^n$ es tal que $T(\infty) = \infty$, $T \neq I$, tenemos de 1.6.1 que $T(x) = rR(x) + a$, donde $r > 0$, $R \in O_n$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Esto, junto a lo anterior, nos permite dar una segunda consecuencia.

Proposición 1.9.2. — $\widehat{\mathbb{M}}^n$ depende en $(n^2 + 3n + 2)/2$ parámetros reales.

Demonstración. — Sea T una transformación (extendida) de Möbius tal que $T(\infty) \neq \infty$. Entonces la forma que tiene T es

$$T(x) = rR \circ \sigma(x) + a,$$

donde R es una rotación y $a \in \mathbb{R}^n$. Luego, para determinar únicamente T debemos indicar $T^{-1}(\infty)$, a , r y R . Los dos primeros dan $2n$ parámetros reales, el segundo da un parámetro real y R depende de $n(n-1)/2$ parámetros reales. Si $T(\infty) = \infty$, entonces podemos escribir $T(x) = rR(x) + a$, donde $r > 0$, $R \in O_n$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Tenemos lo mismo que antes, excepto que ahora ya no necesitamos $T^{-1}(\infty) = \infty$, obteniendo ahora menos parámetros, de hecho $(n^2 + n + 2)/2$. Por ejemplo, las translaciones sólo dependen de n parámetros ya que en este caso $r = 1$, $R = I$. \square

Lo anterior nos permite construir la función

$$\Phi : \widehat{\mathbb{M}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n \times \widehat{\mathbb{R}}^n \times (0, +\infty) \times O_n$$

definida como $\Phi(T) = (T^{-1}(\infty), T(0), r, R)$. En caso que $T = I$, colocamos $r = 1$ y $R = I$.

1.10. Espacio Hiperbólico n-Dimensional

1.10.1. Modelo del Semiplano Superior. — Ya habíamos visto que $Aut(\mathbb{H}^n) = \widehat{\mathbb{M}}^{n-1}$ por medio de la extensión de Poincaré, donde

$$\mathbb{H}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Este espacio junto a la métrica Riemanniana (llamada métrica hiperbólica)

$$ds = \frac{\sqrt{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}}{x_n}$$

es un modelo del *espacio hiperbólico n-dimensional*.

Por ejemplo, cuando $n = 2$ tenemos el plano hiperbólico \mathbb{H}^2 el cual podemos identificar con el semiplano complejo

$$\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$$

junto a la métrica hiperbólica

$$ds = \frac{|dz|}{\text{Im}(z)}$$

y cuando $n = 3$ podemos identificar \mathbb{H}^3 con

$$\mathbb{C} \times (0, +\infty) = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : t > 0\}$$

junto con la métrica hiperbólica

$$ds = \frac{\sqrt{|dz|^2 + dt^2}}{t}.$$

Con esta métrica Riemanniana uno tiene en particular la definición de longitud de curvas. Por ejemplo, la longitud hiperbólica de un camino diferenciable

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^n : \tau \mapsto \gamma(\tau) = (x_1(\tau), \dots, x_n(\tau))$$

es dada por la siguiente fórmula

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \int_a^b \frac{\sqrt{x_1'(\tau)^2 + \dots + x_n'(\tau)^2} d\tau}{x_n(\tau)}$$

Como $\gamma([a, b])$ es un subconjunto compacto de \mathbb{H}^n , debemos tener valores $0 < T < S < \infty$ tales que $x_n(\tau) \in [T, S]$. En particular, se puede ver que

$$(*) \quad \frac{1}{S} \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}(\gamma) \leq \mathcal{L}(\gamma) \leq \frac{1}{T} \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}(\gamma)$$

donde $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}(\gamma)$ denota la longitud Euclidiana de γ .

La distancia hiperbólica $d(p, q)$ entre dos puntos $p, q \in \mathbb{H}^n$ es dada por el ínfimo de las longitudes de todas los caminos continuos que hay entre p y q . Es claro que

(i) $d(p, q) \geq 0$;

(ii) $d(p, q) = d(q, p)$;

La desigualdad (*) dice que $d(p, q) = 0$ si y sólo si $\|p - q\| = 0$, es decir,

(iii) $d(p, q) = 0$ si y sólo si $p = q$;

Por otro lado, si tenemos tres puntos $p, q, r \in \mathbb{H}^n$, entonces si tenemos un camino γ_1 entre p y r y un camino γ_2 entre r y q , tenemos un camino γ entre p y q por yuxtaposición. De esta manera

$$\mathcal{L}(\gamma_3) = \mathcal{L}(\gamma_1) + \mathcal{L}(\gamma_2)$$

Es claro entonces que

$$d(p, q) \leq \mathcal{L}(\gamma_1) + \mathcal{L}(\gamma_2)$$

de lo cual podemos obtener la desigualdad triangular

$$(iv) \quad d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q).$$

De esta manera hemos obtenido el siguiente :

Proposición 1.10.1. — d es en una métrica en \mathbb{H}^n también llamada la métrica hiperbólica.

1.10.2. Modelo de la Bola Unitaria. — Otros modelos pueden ser tomados como las bolas $B(p, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - p\| < r\}$. Usando una transformación de Möbius $F \in \mathbb{M}^n$ tal que $F(\mathbb{H}^n) = B(p, r)$, podemos transportar la métrica hiperbólica de \mathbb{H}^n a una métrica hiperbólica en $B(p, r)$. Por ejemplo, si tomamos $p = 0, r = 1$, obtenemos en

$$B^n = \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n : u_1^2 + \dots + u_n^2 < 1\}$$

la métrica Riemanniana

$$ds = \frac{2(du_1^2 + \dots + du_n^2)^{1/2}}{1 - (u_1^2 + \dots + u_n^2)}$$

La transformación de Möbius

$$F = B \circ A : \mathbb{H}^n \rightarrow B^n$$

es por ejemplo definida por la composición de la reflexión en el hiperplano $\{x_n = 0\}$

$$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x - 2\langle x, e_n \rangle e_n = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$$

donde $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ y la reflexión en la esfera $(n - 1)$ -dimensional centrada en el punto e_n y radio $\sqrt{2}$

$$B : S^n \rightarrow S^n : x \mapsto 2(x - e_n) / \|x - e_n\|^2 + e_n$$

Para $n = 3$, utilizando la identificación $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, tenemos que $B(z, t) = (0, 1) + 2(z, t - 1) / (|z|^2 + (t - 1)^2)$. Luego,

$$F(x) = \frac{(2x_1, \dots, 2x_{n-1}, -2x_n - 2 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + (x_n + 1)^2)}{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + (x_n + 1)^2}$$

Ejercicio 5. — Verificar que la distancia hiperbólica en B^n entre $(0, \dots, 0)$ y un punto $(r, 0, \dots, 0)$, donde $0 < r < 1$ es dada por $\ln \frac{1+r}{1-r}$ y que

$$[0, r] = \{(t, 0, \dots, 0) : 0 \leq t \leq r\}$$

da el camino más corto entre estos dos puntos (esta es llamada una geodésica hiperbólica). Determinar que la distancia hiperbólica en \mathbb{H}^n entre e_n y re_n es dada por $\ln(r)$ y que

$$[e_n, re_n] = \{te_n : 1 \leq t \leq r\}$$

es arco de geodésica que une tales puntos.

1.10.3. Modelo de Hemisferio de radio imaginario. — Otro modelo que es bueno tener presente es el siguiente. Consideremos el espacio \mathbb{R}^{n+1} junto al producto interior no-degenerado (pero que no es positivo ni negativo definido)

$$[x, y] = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n - x_{n+1}y_{n+1}$$

Este producto corresponde a la forma cuadrática

$$Q(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2$$

Consideremos el grupo lineal $O(Q)$, llamado el grupo ortogonal de la forma Q , formado por aquellos isomorfismos $A : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, llamados transformaciones ortogonales de la forma Q , que dejan invariante tal forma, es decir, tal que

$$[Ax, Ay] = [x, y]$$

o en forma equivalente, si $M = \text{diag}[1, 1, \dots, 1, -1]$, entonces

$${}^tAMA = M$$

Ejercicio 6. — Verificar que si $T \in O(Q)$, entonces $\det(T) = \pm 1$. Más aún, ver que T es una isometría de \mathbb{R}^{n+1} respecto a la forma cuadrática Q .

Sea

$$\mathcal{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : [x, x] = -1, x_{n+1} > 0\}$$

Como cada vector v tangente a \mathcal{H}^n es tal que $[v, v] > 0$, tenemos que la forma Q se define un producto interior positivo definido en cada espacio tangente a este espacio. Tal producto define entonces una métrica Riemanniana

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 - dx_{n+1}^2}$$

en \mathcal{H}^n . Ahora, si consideramos la función $G : B^n \rightarrow \mathcal{H}^n$ definida de la siguiente manera : por cada punto $x \in B^n$, consideramos la recta que pasa por el punto $-e_{n+1}$ y $(x, 0)$. Esta intersecta \mathcal{H}^n en exactamente un punto $G(x)$. De manera explícita, si $x = (x_1, \dots, x_n) \in B^n$, entonces

$$G(x) = \left(\frac{2x_1}{1 - \|x\|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1 - \|x\|^2}, \frac{1 + \|x\|^2}{1 - \|x\|^2} \right) = (y_1, \dots, y_{n+1})$$

Ejercicio 7. — Verificar que

$$\sqrt{dy_1^2 + \cdots + dy_n^2 - dy_{n+1}^2} = \frac{2\|dx\|}{1 - \|x\|^2},$$

es decir, G es una isometría.

El ejercicio anterior nos dice que

$$\left(\mathcal{H}^n, ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 - dx_{n+1}^2} \right)$$

es un modelo del espacio hiperbólico n -dimensional, llamado el modelo de Hemisferio de radio imaginario.

Observemos que si $T \in O(Q)$, entonces $T(\mathcal{H}^n)$ tiene dos posibilidades : ser igual a \mathcal{H}^n o ser igual a

$$\overline{\mathcal{H}^n} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : [x, x] = -1, x_{n+1} < 0\}$$

En $O(Q)$ existe un subgrupo de índice dos, denotado por $O(n, 1)$, formado por aquellas transformaciones ortogonales de la forma Q que dejan invariante \mathcal{H}^n . Denotaremos por $SO(n, 1)$ el subgrupo de índice dos de $O(n, 1)$ que tienen determinante positivo, es decir, determinante igual a 1.

Ejercicio 8. — Verificar que $O(n, 1)$ es grupo de isometrías de \mathcal{H}^n .

Si uno considera la composición $h = G \circ F : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathcal{H}^n$, entonces obtenemos un isomorfismo

$$h^* : \widehat{\mathbb{M}}^{n-1} \rightarrow O(n, 1)$$

tal que

$$h^*(\mathbb{M}^{n-1}) = SO(n, 1)$$

Este modelo entonces nos permite representar el grupo (extendido) de Möbius como un grupo de matrices ortogonales respecto a la forma cuadrática Q .

Ejercicio 9. — Calcular de manera explícita h^* . Observe que sólo es necesario ver las formas $h^*(T)$ cuando T es : (i) translación ; (ii) dilatación ; (iii) rotación ; (iv) reflexión en S^{n-2} .

1.10.4. Transformaciones de Möbius como Isometrías. — Podemos usar indistintamente cualquiera de los modelos del espacio hiperbólico. Para algunos cálculos es mejor un modelo que el otro. El siguiente ejercicio es directa consecuencia del hecho que la isometría $F : \mathbb{H}^n \rightarrow B^n$ es una transformación de Möbius.

Ejercicio 10. — (1) F envía semiesferas en \mathbb{H}^n ortogonales al borde $\partial\mathbb{H}^n$ en semiesferas en B^n también ortogonales al borde $S^{n-1} = \partial B^n$.

(2) F envía esferas Euclidianas en \mathbb{H}^n en esferas Euclidianas en B^n .

- (3) F es una isometría entre los dos modelos del espacio hiperbólico [Ind. Recuerde como fué definida la métrica por medio de F].

Proposición 1.10.2. —

$$\text{Aut}(\mathbb{H}^n) = \widehat{\mathbb{M}}^{n-1} < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$$

donde $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ denota el grupo de isometrías de \mathbb{H}^n .

Demonstración. — Recordemos que $\widehat{\mathbb{M}}^{n-1}$ está generado por translaciones, dilataciones, rotaciones y la reflexión en la esfera S^{n-2} . La extensión de Poincaré de una translación $T(x) = x + a$, donde $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ es dada por la translación $\widehat{T}(x, t) = (x + a, t)$ y, en particular, $\|D\widehat{T}(x, t)\|/\widehat{T}(x, t)_n = 1/t$, obteniendo que esta es una isometría hiperbólica. La extensión de Poincaré de una dilatación $D(x) = rx$, donde $r > 0$, es dada por la dilatación $\widehat{D}(x, t) = r(x, t)$. Así, $\|D\widehat{D}(x, t)\|/\widehat{T}(x, t)_n = 1/t$, obteniendo que esta es una isometría hiperbólica. Si R es una rotación, entonces su extensión de Poincaré es la rotación $\widehat{R}(x, t) = (R(x), t)$. Como \widehat{R} es isometría Euclidiana, $\|D\widehat{R}(x, t)\| = 1$ y luego $\|D\widehat{R}(x, t)\|/\widehat{R}(x, t)_n = 1/t$, obteniendo que esta es una isometría hiperbólica.

En forma similar, la extensión de Poincaré de la reflexión $J(x) = x/\|x\|^2$ es $\widehat{J}(x, t) = (x, t)/\|(x, t)\|^2$ cuya diferencial es $D\widehat{B}(x, t) = \frac{1}{\|(x, t)\|^2}(I - 2A)$, donde $(I - 2A)$ es una matriz ortogonal de determinante -1 . Como la última coordenada de $\widehat{J}(x, t)$ es $\frac{t}{\|(x, t)\|^2}$, obtenemos que $\|D\widehat{J}(x, t)\|/\widehat{J}(x, t)_n = 1/t$, con lo cual vemos que \widehat{J} es también una isometría hiperbólica. \square

- Ejercicio 11.** — (1) Verificar que dado dos puntos $p, q \in \mathbb{H}^n$ siempre existe una isometría T tal que su $T(p) = q$. Concluir que el grupo de isometrías de \mathbb{H}^n actúa de manera transitiva. [Ind. ver que la órbita del punto $e_n \in \mathbb{H}^n$ es todo \mathbb{H}^n].
- (2) Usando el modelo B^n , ver que toda rotación Euclidiana entorno al origen es de hecho una extensión de Poincaré de una transformación (extendida) de Möbius y luego una isometría hiperbólica de B^n .
- (3) Verificar que esferas hiperbólicas (conjunto de puntos que equidistan de un punto dado $p \in \mathbb{H}^3$) es necesariamente una esfera Euclidiana.
- (4) Usar la transitividad de las extensiones de Poincaré de las transformaciones de Möbius para obtener que la distancia entre dos puntos cualquiera de B^n es dada por

$$d(x, y) = \text{ArcCosh}\left(1 + \frac{2\|x - y\|^2}{(1 - \|x\|^2)(1 - \|y\|^2)}\right)$$

y verificar que las geodésicas hiperbólicas son exactamente los semicírculos en B^n ortogonales al borde. De manera similar, la distancia entre dos puntos cualquiera de \mathbb{H}^n es dada por

$$d(x, y) = \text{ArcCosh}\left(1 + \frac{\|x - y\|^2}{2x_n y_n}\right)$$

y verificar que las geodésicas hiperbólicas son exactamente los semicírculos en \mathbb{H}^n ortogonales al borde.

- (5) Verificar que la esfera hiperbólica centrada en $0 \in B^n$ es una esfera Euclidiana centrada en una esfera Euclidiana centrada en el origen con el radio Euclidiano de esta.

1.11. Clasificación de las Transformaciones de Möbius

Consideremos una transformación de Möbius $T \in \mathbb{M}^{n-1}$ diferente de la identidad. Denotamos por \widehat{T} su extensión de Poincaré. Si \widehat{T} fija un punto en el espacio hiperbólico \mathbb{H}^n , entonces diremos que T es una *transformación elíptica*. Si T no es elíptica, entonces T debe tener a lo más dos puntos fijos en la esfera S^{n-1} . En efecto, supongamos que T posee al menos tres puntos fijos diferentes en la esfera S^{n-1} , digamos a , b and c . Consideremos el único círculo C determinado por esos tres puntos. Ahora, en \mathbb{H}^n existe una única semiesfera $S \subset \mathbb{H}^n$ dos-dimensional ortogonal al borde en C . Tal esfera debe ser invariante por \widehat{T} . Pero S es isométrico (con la métrica inducida) al plano hiperbólico y \widehat{T} corresponde a una isometría de este. Pero toda transformación de Möbius planar

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}$$

diferente de la identidad tiene a lo más dos puntos fijos, así \widehat{T} debe ser la identidad cuando es restringida a S y, en particular, tiene puntos fijos en \mathbb{H}^n , una contradicción a nuestra suposición. El teorema del punto fijo de Brouwer asegura que $\widehat{T} : \overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$ debe tener al menos un punto fijo. Todo esto nos permite hacer la siguiente clasificación de las transformaciones de Möbius.

Proposición 1.11.1. — Sea $T \in \mathbb{M}^{n-1}$ una transformación de Möbius diferente de la identidad, entonces vale una y sólo una de las siguientes :

- 1.- T es elíptica ;
- 2.- T tiene exactamente un punto fijo en S^{n-1} , en cuyo caso diremos que T es una transformación parabólica ;
- 3.- T tiene exactamente dos puntos fijos en S^{n-1} , en cuyo caso diremos que T es una transformación loxodrómica.

Proposición 1.11.2. — La clasificación anterior es independiente de conjugación por transformaciones de Möbius.

Ejercicio 12. — Probar la proposición anterior.

- (1) Sea T una transformación elíptica, $T \neq I$, que tenga al menos un punto fijo $p \in S^n$. Como T tiene un punto fijo en el espacio hiperbólico, tenemos una única geodésica $\beta \subset \mathbb{H}^{n+1}$ que pasa por tal punto y tiene un punto final en p . Denotemos por q al otro final de tal geodésica. Entonces tenemos que su extensión de Poincaré \widehat{T} fija cada punto

de esa geodésica y luego $T(q) = q$. Así, podemos conjugar T por una transformación de Möbius para suponer que $p = \infty$ y $q = 0$, con lo cual $T(x) = Ax$, donde A es un isomorfismo lineal de \mathbb{R}^n . Como sabemos que \hat{T} actúa como la identidad en la geodésica β , debemos tener obligatoriamente que A es ortogonal. En el caso que la transformación elíptica $T \neq I$ no tiene puntos fijos en S^n , entonces \hat{T} tiene un punto fijo $u \in \mathbb{H}^{n+1}$. Podemos conjugar por una isometría para suponer que $u = 0$ y luego podemos representar \hat{T} como una transformación ortogonal de \mathbb{R}^{n+1} .

(2) Sea $T \in \mathbb{M}^n$ una transformación loxodrómica con puntos fijos $p, q \in S^n$. Podemos conjugar T por una transformación de Möbius para poder suponer que $p = 0$ y $q = \infty$. Consideremos en \mathbb{H}^{n+1} la única geodésica γ que tiene como puntos finales a 0 y ∞ . Por la unicidad de tal geodésica, tenemos que \hat{T} deja invariante a γ , donde \hat{T} es la extensión de Poincaré de T . Podemos entonces amplificar T por un número positivo $1/r$ para suponer que fije un punto de tal geodésica y así ser una transformación elíptica. Por parte (1) tenemos entonces que T es conjugada a $x \mapsto rAx$, donde $r > 0, r \neq 1$ y A es una transformación ortogonal de \mathbb{R}^n . Sea $A(T) \subset \mathbb{H}^{n+1}$ la única geodésica que está determinada por p y q . Llamamos a $A(T)$ el *eje de la transformación* T . Como \hat{T} es isometría, tenemos necesariamente que $\hat{T}(A(T)) = A(T)$. La acción de \hat{T} sobre $A(T)$ es por translación desde uno de los puntos fijos de T (el punto fijo repulsor) hacia el otro punto fijo (el punto fijo atractor), donde la translación es determinada por r .

(3) Sea T es parabólica, con punto fijo $p \in S^n$. Podemos conjugar T por una transformación de Möbius P tal que $P(p) = \infty$. Luego $S = PTP^{-1}$ es parabólica con único punto fijo ∞ , es decir, no tiene puntos fijos en \mathbb{R}^n . Componiendo S con una translación L adecuada por la izquierda, tenemos que $L \circ S$ tendrá al menos dos puntos fijos 0 y ∞ . Usando lo anterior, tenemos que $L \circ S(x) = Ax$, donde A es una transformación ortogonal de \mathbb{R}^n . Así, $S(z) = PTP^{-1}(x) = Ax + b$, donde A es ortogonal y $b \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ no pertenece a la imagen de $I - A$ (pues S no tiene puntos fijos en \mathbb{R}^n). Decimos que T es una transformación parabólica pura si $A = I$. Por ejemplo, cuando $n = 2$ toda transformación parabólica es necesariamente pura. Por cada $R > 0$ podemos considerar el conjunto $C(R) = \{(x, t) \in \mathbb{H}^{n+1} : t > R\}$. Llamamos la bola conical centrada en p y radio R al conjunto $C(T, R) = P^{-1}(C(R))$ (el radio no depende de la elección de P). Entonces como $S(C(R)) = C(R)$, tenemos que $T(C(T, R)) = C(T, R)$. Es claro que la acción de S sobre el borde de $C(R)$ es la misma acción de S sobre el borde \mathbb{R}^n . Por ejemplo, para $n = 2$ no es difícil verificar que $C(R)/\langle S \rangle$ (y luego $C(T, R)/\langle T \rangle$) es topológicamente $S^1 \times D^*$, donde $D^* = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$.

1.12. Isometrías del Espacio Hiperbólico

Hemos visto que las extensiones de Poincaré de las transformaciones de Möbius en $\widehat{\mathbb{M}}^{n-1}$ dan isometrías del espacio hiperbólico \mathbb{H}^n . Por otro lado, si tenemos una isometría $P : B^n \rightarrow B^n$, entonces podemos componer P con la extensión de Poincaré de una transformación de Möbius para suponer que $P(0) = 0$. Al ser P una isometría, se verifica

que P preserva cada esfera Euclidiana centrada en 0. Por otro lado, cada diámetro de B^n es una geodésica en B^n y luego P envía diámetros en diámetros. De aquí se concluye que P es una rotación Euclidiana, las cuales pueden ser obtenidas además como la extensión de Poincaré de transformaciones de Möbius del borde S^{n-1} . Hemos obtenido :

Teorema 1.12.1. —

$$\begin{aligned} \text{Isom}(\mathbb{H}^n) &= \text{Aut}(\mathbb{H}^n) = \widehat{\mathbb{M}}^{n-1} \\ \text{Isom}(B^n) &= \text{Aut}(B^n) \\ \text{Isom}(\mathcal{H}^n) &= O(n-1, 1) \end{aligned}$$

CAPÍTULO 2

GRUPOS DISCRETOS Y DISCONTINUOS

Ahora que podemos relacionar transformaciones (extendidas) de Möbius de la esfera S^{n-1} con las isometrías del espacio hiperbólico \mathbb{H}^n por medio de la extensión de Poincaré, podemos interrelacionar variedades hiperbólicas (variedades que tienen como cubrimiento universal al espacio hiperbólico y como grupo de cubrimiento a isometrías) con variedades conformales (variedades cuyas cartas locales tienen como funciones de transición a restricciones de transformaciones de Möbius). Observemos entonces que en las variedades hiperbólicas tenemos asociadas una métrica hiperbólica mientras que a las variedades conformales tenemos la noción de ángulos bien definida. Para lograr entender esto primero necesitaremos algunas nociones sobre discretitud y discontinuidad para acción de grupos de transformaciones de Möbius.

2.1. Grupos Discretos

Sea G un subgrupo de $\widehat{\mathbb{M}}^n$. Diremos que G es un *grupo discreto* si no existe una sucesión $g_k \in G$ de elementos diferentes convergiendo a alguna transformación $T \in \widehat{\mathbb{M}}^n$.

Ejemplo 2.1.1. — (i) Todo grupo finito en $\widehat{\mathbb{M}}^n$ es necesariamente un grupo discreto.
(ii) Todo grupo cíclico generado por una transformación parabólica o loxodrómica es necesariamente discreto.
(iii) Todo grupo cíclico generado por una rotación es discreto si y sólo si esta es de orden finita.

Respecto a los grupos finitos en $\widehat{\mathbb{M}}^n$ tenemos el siguiente resultado sobre puntos fijos en el espacio hiperbólico $(n+1)$ -dimensional.

Proposición 2.1.2. — *Todo grupo finito de isometrías del espacio hiperbólico tiene un punto fijo.*

Demonstración. — Consideremos el modelo B^n para el espacio hiperbólico y la función $F : B^n \rightarrow [0, +\infty) : x \rightarrow F(x) = d^2(x, 0)$, donde d es la distancia hiperbólica.

Tenemos que F es estrictamente convexa al restringirla a cada arco geodésico. Sea G un grupo finito de isometrías de B^n y formemos el promedio $F_G : B^n \rightarrow [0, +\infty)$ definida por

$$F_G(x) = \sum_{\gamma \in G} F(\gamma(x))$$

Tenemos que $\gamma(0) = 0$ para cada $\gamma \in G$, en cuyo caso estamos listos, o tenemos que F_G sigue siendo una función estrictamente convexa en cada arco geodésico y luego tiene un único mínimo $p \in B^n$. En efecto, si hubiesen dos mínimos para F_G , digamos $a \neq b \in B^n$, entonces consideramos el único arco geodésico $\alpha \in B^n$ conectando estos dos puntos. Consideremos una parametrización $j : [0, 1] \rightarrow B^n$ para α tal que $j(0) = a$ y $j(1) = b$. Entonces $h = F \circ j : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ es estrictamente convexa con 0 y 1 como puntos mínimos, lo cual no es posible. Por la unicidad, tenemos que $\gamma(p) = p$ para cada $\gamma \in G$. □

Consideremos un subgrupo G de $\widehat{\mathbb{M}}^n$ y H un subgrupo de índice finito en G . Es claro de la definición que si G es discreto, entonces H también lo es. Recíprocamente, suponemos que H es discreto. Como H tiene índice finito en G , entonces existen $T_1, \dots, T_r \in G - H$ tal que $G = H \cup HT_1 \cup \dots \cup HT_r$. Si G no fuese discreto, entonces existiría una sucesión $g_k \in G$ de elementos diferentes convergiendo a una transformación T . Entonces existe una subsucesión infinita de elementos en HT_j para cierto $j \in \{0, 1, \dots, r\}$, donde $T_0 = I$. Luego $g_k = h_k T_j$ y, en particular, $h_k = g_k T_j^{-1}$ converge a $T T_j^{-1}$. Como H es discreto, entonces $h_k = T T_j^{-1}$ para k grande, en particular, $g_k = T$ para k grande, obteniendo una contradicción. Hemos probado el siguiente :

Proposición 2.1.3. — *Sea G subgrupo de $\widehat{\mathbb{M}}^n$ y H un subgrupo de índice finito en G . Entonces G es discreto si y sólo si H es discreto.*

Ejercicio 13. — *Sea G subgrupo de $\widehat{\mathbb{M}}^n$ y sea H subgrupo de G . Verificar que*

- (a) H es necesariamente un grupo discreto.
- (b) si $G^+ = G \cap \mathbb{M}^n$, entonces G es discreto si y sólo si G^+ lo es.

Proposición 2.1.4. — *Un grupo G de $\widehat{\mathbb{M}}^n$ es discreto si y sólo si no existe sucesión $g_k \in G$ de elementos diferentes convergiendo a la identidad I .*

Demonstración. — Es claro que si existe sucesión de elementos diferentes de la identidad convergiendo a la identidad, entonces G es no discreto por la definición. Recíprocamente, sea G un grupo discreto y sea $\{g_m\}$ una sucesión en G convergiendo a $g \in \widehat{\mathbb{M}}^n$. Entonces $k_m = g_{m+1} g_m^{-1}$ es una sucesión en G convergiendo a la identidad. Si podemos extraer una subsucesión de elementos diferentes, entonces obtenemos una contradicción a la discreitud de G . Si no es posible encontrar una subsucesión de elementos diferentes, entonces existe $N > 0$ tal que k_m son todos iguales para $m > N$. De esta manera, $k_m = I$ para $m > N$ lo cual obliga a tener $g_m = g_{m+1}$ para $m > N$, una contradicción. □

Hay veces que es bueno conjugar nuestros grupos en orden a simplificar argumentos. El siguiente resultado nos garantiza que la propiedad de ser discreto no es modificada por tal proceso.

Proposición 2.1.5. — Sea $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$ un grupo y sea $h \in \widehat{\mathbb{M}}^n$. Entonces G es discreto si y sólo si hGh^{-1} lo es.

Demonstración. — Es claro que dada cualquier sucesión en G que es convergente, digamos $\{g_k\}$, entonces la sucesión en hGh^{-1} dada por $\{h_k = hg_k h^{-1}\}$ es convergente. Además una de ellas es eventualmente constante si y sólo si la otra lo es. \square

Ejercicio 14. — Sea K un subgrupo del grupo multiplicativo $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Entonces K es denso o un grupo cíclico finito.

Ejemplo 2.1.6. — Consideremos el caso $n = 2$. Sea G el grupo cíclico generado por una transformación elíptica. Módulo conjugación por una transformación de Möbius, podemos asumir que G es generada por $T(z) = e^{2\pi i q} z$. Esto nos da un isomorfismo de los grupos G y un subgrupo de S^1 . Tenemos que G es finito si y sólo si T es de orden finito si y sólo si $q \in \mathbb{Q}$. Además, el ejercicio anterior nos dice que T es de orden infinito si y sólo si existen $n_k \in \mathbb{N}$ tales que $e^{2\pi i q n_k}$ es una sucesión de elementos diferentes convergiendo a 1. En particular, T^{n_k} da una sucesión de elementos diferentes convergiendo a la identidad. En resumen, G es discreto si y sólo si T tiene orden finito.

Ejercicio 15. — Extender el ejemplo anterior para cada $n \geq 3$. Verificar que todo grupo cíclico generado por una transformación parabólica o loxodrómica es necesariamente discreto.

2.2. Grupos Discontinuos

Dado un subgrupo G de $\widehat{\mathbb{M}}^n$ tenemos las siguientes definiciones :

- (1) Un punto $p \in S^n$ es llamado un *punto de discontinuidad* del grupo G si :
 - (1.1) $G_p = \{g \in G : g(p) = p\}$ es finito (G_p es llamado el *estabilizador* de p en G);
 - (1.2) Existe un abierto U tal que $p \in U$ y $g(U) \cap U = \emptyset$ para todo $g \in G - G_p$.
- (2) Un punto que no es un punto de discontinuidad de G es llamado un *punto límite* de G .
- (3) El conjunto de los puntos de discontinuidad de G es llamado la *región de discontinuidad* de G y es usualmente denotado por $\Omega(G)$ o sólo Ω si es claro del contexto el grupo al cual refiere.
- (4) El conjunto de los puntos límite de G es llamado el *conjunto límite* de G y es usualmente denotado por $\Lambda(G)$ o Λ si no hay confusión.

Un grupo G de $\widehat{\mathbb{M}}^n$ que actúa discontinuamente en algún punto de la esfera S^n es llamado un *grupo Kleiniano de segunda clase*, es decir, si $\Omega(G) \neq \emptyset$. Como toda isometría T del espacio hiperbólico \mathbb{H}^n es una transformación de Möbius de S^n , entonces la definición de discontinuidad puede ser usada para grupos de isometrías. Diremos que un grupo G de isometrías de \mathbb{H}^n actúa de manera discontinua si visto como grupo de transformaciones de Möbius actúa de manera discontinua.

Ejemplo 2.2.1. — Ejemplos de grupos Kleinianos de la segunda clase son los grupos finitos, cíclicos parabólicos, loxodrómicos y elípticos de orden finito.

Una primera observación respecto a los grupos discontinuos es dada por la proposición 1.9.1 la cual nos da una primera observación respecto a la acción de tales grupos.

Proposición 2.2.2. — Sea G un grupo discontinuo tal que $\infty \in \Omega(G)$. Entonces

$$\sum_{T \in G - G_\infty} r_T^n < \infty$$

donde $\sqrt{r_T}$ es el radio del círculo isométrico de $T \in G - G_\infty$.

Demonstración. — Como $\infty \in \Omega(G)$, podemos escoger $R > 0$ de manera que $T(B(0, R)^c) \cap B(0, R)^c = \emptyset$ para todo $T \in G - G_\infty$. De esto se sigue que las imágenes $T(B(0, R)^c) \subset B(0, R)$ son bolas dos a dos disjuntas para $T \in G - G_\infty$. Por la proposición 1.9.1 tenemos que $\text{Diam}(T(B(0, R)^c)) \geq r_T/R$, donde $\sqrt{r_T}$ es el radio de $I(T)$, y luego volumen mayor que $(r_T/R)^n$, que es el volumen de un cubo Q_T dentro de este. Así, el volumen de la unión $\cup_{T \in G - G_\infty} Q_T$ es menor que el volumen de la bola $B(0, R)$, es decir $\sum_{T \in G - G_\infty} (r_T/R)^n < \infty$, con lo cual obtenemos lo deseado. \square

2.3. Relación Discreto :Discontinuo

Existen ejemplos de grupos G en \mathbb{M}^{n-1} que son discretos pero que no actúan discontinuamente en ningún punto de la esfera S^{n-1} . Estos grupos corresponden a los grupos fundamentales de variedades hiperbólicas de volumen finito. Un ejemplo concreto para $n = 2$ puede ser dado como sigue.

Ejemplo 2.3.1. — Sea G ser el grupo de las transformaciones de Möbius $T(z) = (az + b)/(cz + d)$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}[i]$ son tales que $ad - bc = 1$. En este caso, la órbita por G del punto $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ consiste de todos los puntos de la forma $p + iq$, donde $p, q \in \mathbb{Q}$. En particular, todo punto de la esfera de Riemann deber estar en el conunto límite de este grupo. Por otro lado, la discretitud de $\mathbb{Z}[i]$ nos asegura la discretitud de G .

El fenómeno discutido arriba no ocurre para grupos de isometrías del espacio hiperbólico como se puede ver del siguiente resultado.

Teorema 2.3.2. — *Todo grupo G de isometrías de \mathbb{H}^n es discreto si y sólo si G actúa de manera discontinua en todo punto de \mathbb{H}^n . En particular, si G es un grupo discreto en $\widehat{\mathbb{M}}^{n-1}$, entonces G es numerable.*

Usando el hecho que toda isometría del espacio hiperbólico \mathbb{H}^n conmuta con la reflexión $J(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$, tenemos como consecuencia del anterior el siguiente.

Corolario 2.3.3. — *Si G es un grupo discreto de isometrías de \mathbb{H}^n , entonces su conjunto límite debe estar contenido en el borde S^{n-1} .*

Si G es un grupo discreto de isometrías de \mathbb{H}^n , entonces para todo $p \in \mathbb{H}^n$ debe ser finito. De hecho, usemos el modelo B^n y pensemos en $p = 0$ [módulo conjugación en el grupo de isometrías]. El estabilizador G_p es un subgrupo discreto del grupo ortogonal. Como el grupo ortogonal es compacto, entonces G_p es finito. Por otro lado, tenemos el siguiente resultado.

Lema 2.3.4. — *Si G es un grupo discreto de isometrías del espacio hiperbólico \mathbb{H}^n , entonces para todo $p \in \mathbb{H}^n$ se tiene que su órbita por G es un subconjunto discreto de \mathbb{H}^n .*

Demonstración. — Indicaremos la demostración para el caso $n = 3$, el caso general es muy similar. Sea G un grupo discreto de isometrías del espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 y supongamos que existe un punto $p \in \mathbb{H}^3$ y una sucesión T_m de elementos diferentes en G tal que $T_m(p)$ converge a un punto $q \in \mathbb{H}^3$. No hay pérdida el asumir que $T_m(q)$ converge a un punto $r \in \mathbb{H}^3$, donde $d_{\mathbb{H}^3}(p, q) = d_{\mathbb{H}^3}(r, p)$ (Basta considerar una subsucesión si es necesario y observar que cada T_m es una isometría).

Como G^+ es o bien igual a G ó de índice dos en G , entonces no hay pérdida de generalidad el asumir que $T_m \in G^+$. Es claro que podemos asumir que las transformaciones $T_{m+1}^{-1}T_m$ son todas diferentes. En efecto, si no pudiesemos asumir esto, entonces a partir de cierto $N > 0$ tendríamos que $T_{m+1}^{-1}T_m = T$, alguna $T \in G^+$. Esto diría que $T_m = T_N T_0^{N-m}$. Como G es discreto, T_0 no puede ser elíptico de orden infinito y como los T_m son diferentes, T_0 no puede ser elíptico de orden finito. Pero si T_0 es parabólico o loxodrómico, entonces es claro que $T_0^{N-m}(x)$ converge a uno de los puntos fijos de T_0 , el cual vive en la frontera del espacio hiperbólico, contradiciendo nuestro supuesto sobre la sucesión $T_m(p)$.

Ahora,

$$d_{\mathbb{H}^3}(T_{m+1}^{-1}T_m(q), q) = d_{\mathbb{H}^3}(T_m(q), T_{m+1}(q)) \rightarrow 0$$

Esto nos dice que podemos encontrar una sucesión $R_m = T_{m+1}^{-1}T_m$ en G^+ de elementos diferentes con la propiedad que $R_m(q)$ converge a q .

Luego, para cualquier valor $\epsilon > 0$ el conjunto

$$G(\epsilon) = \{T \in G^+ : d_{\mathbb{H}^3}(T(q), q) < \epsilon\}$$

es infinito. Por otro lado, G es discreto, es decir que las normas de las matrices en $SL(2, \mathbb{C})$ de sus elementos es un conjunto discreto en \mathbb{C} . Un cálculo asegura entonces que las distancias desde un punto q a sus trasladadas por las transformaciones en $G(\epsilon)$ debe ser un conjunto acotado en $[0, \infty)$ (ver [10], pp 29) y luego, por discretitud, finito. \square

Ahora, teorema 2.3.2 es un caso particular del siguiente hecho general :

Teorema 2.3.5. — Sea (X, d) un espacio métrico y G un grupo de sus isometrías. Entonces G actúa de manera discontinua (en todo X) si y sólo si

- (1) Para todo $x \in X$, su estabilizador G_x es finito; y
- (2) Para todo $x \in X$ la órbita $G(x) = \{T(x) : T \in G\}$ es un subconjunto discreto de X .

Demonstración. — Si G es discontinuo en todo X , entonces la condición (1) es por definición. Si para algún $x \in X$ la órbita $G(x)$ no es discreta en X , entonces posemos construir una sucesión $g_n(x)$ convergiendo a un punto $p \in X$, donde $g_n \in G$ son dos a dos diferentes. Pero en este caso, cualquier vecindad abierta $U \subset X$ para p cortará cada $g_n(U)$ para infinitos valores de n , contradiciendo el hecho que G actúa discontinuamente en cada punto de X . Recíprocamente, supongamos que G satisface propiedades (1) y (2). Si G no actuar discontinuamente en algún punto $p \in X$, entonces para todo abierto U de X , conteniendo a p , tenemos que $T(U) \cap U = \emptyset$ para un número infinito de transformaciones T en G . Luego podemos encontrar una sucesión de puntos x_n convergiendo a p y una sucesión de elementos diferentes g_n en G tal que $g_n(x_n)$ converge a p . Como cada g_n es una isometría, entonces

$$d(g_n(p), p) \leq d(g_n(p), g_n(x_n)) + d(g_n(x_n), p) = d(p, x_n) + d(g_n(x_n), p),$$

luego $g_n(p)$ converge a p . Como la órbita de p es discreta, debe ocurrir que $g_n(p) = p$ para n suficientemente grande. Esto contradice la condición (1). \square

2.4. Variedades Hiperbólicas/Variedades Conformes

Ahora estamos en condiciones de entender la frase comenzada en este capítulo que relacionaba las variedades hiperbólicas con las variedades conformales. Primero, una *variedad hiperbólica* n -dimensional M es una variedad que se obtiene como cociente de \mathbb{H}^n por un grupo discreto G de isometrías que no tiene torsión (es decir, no contiene elípticos), es decir $M = \mathbb{H}^n/G$. Por otro lado, como G es un grupo de transformaciones de Möbius de la esfera S^n , podemos mirar el cociente $M_G^n = \Omega/G$, donde Ω es la región de discontinuidad de G en S^n . Es claro que tenemos en este caso $\mathbb{H}^n \cup J(\mathbb{H}^n) \subset \Omega$, donde $J(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$. Tenemos entonces que M_G^n es una variedad diferenciable cuyos cambios de coordenadas son restricciones de transformaciones de Möbius, es decir, una *variedad conformal*. También debemos considerar otra variedad conformal asociada al grupo G . Como G deja también invariante S^{n-1} (el borde del espacio hiperbólico), podemos considerar el cociente $M_G^{n-1} = (\Omega \cap S^{n-1})/G$ (en caso

que $\Omega \cap S^{n-1} \neq \emptyset$). Tenemos que la variedad conformal M_G^{n-1} está conformalmente incrustada en la variedad conformal M_G^n como una subvariedad de codimensión 1. Esta subvariedad divide M_G^n en dos variedades M y \overline{M} , ambas hiperbólicas y anticonformalmente equivalentes (el automorfismo anticonformal está inducido por la reflexión en el hiperplano $\{x_n = 0\}$). Por supuesto, está el caso en que $\Omega \cap S^{n-1} = \emptyset$, en cuyo caso M_G^n consiste de dos componentes conexas M y \overline{M} como antes. Ejemplos de este último caso corresponde a las variedades hiperbólicas de volumen finito y, en particular, compactas.

En el caso que G contiene elementos elípticos, ya no obtenemos variedades hiperbólicas, en su lugar aparecen los orbifolds hiperbólicos.

2.5. Caso $n=3$: Análisis Complejo / Geometría Hiperbólica

La extensión de Poincaré nos permite relacionar análisis complejo en la esfera de Riemann y geometría hiperbólica tres dimensional. Por ejemplo, supongamos que G es un grupo discreto de transformaciones de Möbius. Por un lado podemos ver G como un grupo discreto de isometrías de \mathbb{H}^3 que preservan orientación. Por lo visto anteriormente, G actúa de manera discontinua sobre todo \mathbb{H}^3 y, como consecuencia $M(G) = \mathbb{H}^3/G$ es una orbifold hiperbólica. En caso que G no tiene torsión, entonces obtenemos una variedad hiperbólica tres dimensional. Si además G es Kleiniano planar, visto como grupo de automorfismos holomorfos de la esfera de Riemann, entonces $\Omega(G)/G$ es una orbifold que podemos ver como la frontera holomorfa de $M(G)$.

2.6. Grupos de Schottky

Consideremos una colección dos a dos disjuntas de $2g$ (donde $g \geq 1$) esferas topológicas de dimensión $(n-1)$ dentro de la esfera S^n , digamos $C_1, \dots, C_g, C'_1, \dots, C'_g$, de manera que ellas acotan un dominio común \mathcal{D} . La región \mathcal{D} es para $n=2$ no simplemente conexa y para $n \geq 3$ si lo es (aunque no es de homotopía trivial n -dimensional). Supongamos que existen transformaciones de Möbius A_1, \dots, A_g en \mathbb{M}^n tales que para cada $k \in \{1, \dots, g\}$ vale que :

- (1) $A_k(C_k) = C'_k$;
- (2) $A_k(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D} = \emptyset$,

entonces el grupo G de transformaciones de Möbius generado por A_1, \dots, A_g es llamado un *grupo de Schottky* de género g . Las esferas C_1, \dots, C'_g son llamadas un *sistema fundamental de esferas* asociadas a los *generadores de Schottky* A_1, \dots, A_g .

Cuando podemos escoger las esferas como esferas redondas (esferas que son la imagen por una transformación de Möbius de la esfera S^{n-1}), decimos que los generadores son *generadores clásicos* y que G es un *grupo de Schottky clásico*. La existencia de grupos de Schottky no clásicos fué dada en [13]. Un ejemplo explícito es dado en [24] y una construcción teórica de infinitos ejemplos es dado en [8].

Ejercicio 16. — 1.- Verificar que para todo $g \geq 1$ existen un número infinito de grupos de Schottky de género g . [Ind. Utilice esferas redondas]

- 2.- Verificar que todo par de grupos de Schottky del mismo género y misma dimensión son topológicamente conjugados.
- 3.- Verifique que cada uno de los generadores A_1, \dots, A_g es necesariamente loxodrómico. [Ind. Verifique que A_k tiene dos puntos fijos y que no puede ser una rotación]
- 4.- Verifique que un grupo de Schottky de género g es un grupo libre de rango g . [Ind. Tome un punto p dentro de la región \mathcal{D} y mire la órbita de p]. Deducir que todo grupo de Schottky no contiene transformaciones elípticas.
- 5.- Verifique que todo grupo de Schottky de género g es un grupo Kleiniano, es decir, actúa de marea discontinua en algún punto de la esfera S^n . [Ind. Vea que cada punto en la clausura de \mathcal{D} es un punto de discontinuidad de G]
- 6.- Sea $\Omega(G)$ la región de discontinuidad de un grupo de Schottky de género $g \geq 1$. Verifique que $\Omega(G)$ es conexo. Más aún, si $n = 2$ entonces este no es simplemente conexo cuando $g \geq 1$ y que para $n \geq 3$ este es siempre simplemente conexo. Para $g = 1$ el conjunto límite consiste sólo de dos puntos, los puntos fijos de un generador. Para $g \geq 2$ el conjunto límite es un conjunto perfecto y totalmente desconexo. [Ind. Vea que todo punto en la órbita por G de la clausura de \mathcal{D} es punto de discontinuidad y que la órbita de este conjunto es conexo. Luego vea que todo punto en el borde de la órbita no puede ser un punto de discontinuidad]. Concluir de esto que el conjunto límite de un grupo de Schottky es totalmente desconexo.
- 7.- Si G es un grupo de Schottky de género $g \geq 1$, entonces $\Omega(G)/G$ es una variedad conformal homeomorfa a la suma conexas de g copias de $S^{n-1} \times S^1$. Cuando $n = 2$ esta es una superficie de Riemann de género g . [Ind. Ver que para todo punto en $\Omega(G)$ existe un punto de su órbita por G en la clausura de \mathcal{D} . Más aún, dos puntos diferentes en \mathcal{D} no pueden ser equivalentes por G y cada punto en el borde C_k tiene exactamente otro representante en el borde C'_k y no en otro borde ni en \mathcal{D} . Usar la proyección natural $\pi : \Omega(G) \rightarrow \Omega(G)/G = S$ para dotar a S de una estructura conformal]
- 8.- Si G es un grupo de Schottky de género $g \geq 1$ de transformaciones de Möbius de S^n , entonces podemos considerar su extensión de Poincaré, que seguiremos denotando por G . En este caso, \mathbb{H}^{n+1}/G es una variedad hiperbólica de dimensión $(n + 1)$ homeomorfa a la suma conexas de g copias de $B^n \times S^1$, llamado un "Handlebody de género g ". El borde de esta variedad hiperbólica es la variedad conformal de [7.-].

Para el caso particular $n = 2$ tenemos que si G es un grupo de Schottky de género g , entonces el ejercicio anterior nos dice que $\Omega(G)/G$ es una superficie de Riemann de género g . El siguiente resultado de Koebe [9] dice que el recíproco es verdad.

Teorema 2.6.1 (Teorema de Retrosección de Koebe). — Sea S una superficie de Riemann de género $g \geq 1$. Entonces existe un grupo de Schottky G de género g tal que $\Omega(G)/G$ es holomórficamente equivalente a S

Muchas demostraciones existen de este teorema. Uno de ellas utiliza las herramientas de funciones casiholomorfas [4]. La idea es partir con un grupo de Schottky de género g , digamos K y luego considerar conjugadas de K por homeomorfismos de la esfera de Riemann de manera que sigamos obteniendo grupos de Möbius. Entonces estas conjugadas son otra vez grupos de Schottky de género g . La manera de escoger el homeomorfismo adecuado es tomar un difeomorfismo $f : \Omega(K)/K \rightarrow S$ y considerar su diferencial de Beltrami dada por $\mu = \partial_{\bar{z}}f / \partial_z f$ en coordenadas locales. Luego levantamos la diferencial μ a todo $\Omega(K)$ de manera que sea invariante por la acción de K . La teoría de aplicaciones casiholomorfas asegura la existencia de un homeomorfismo $F : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ cuyo diferencial de Beltrami es esta μ levantada a $\Omega(K)$. Luego FKF^{-1} es el grupo de Schottky buscado.

La demostración de Koebe es constructiva. Uno considera en la superficie S una colección $\alpha_1, \dots, \alpha_g$, de curvas cerradas simples homológicamente independientes (es decir, $S - \{\alpha_1, \dots, \alpha_g\}$ es una esfera con $2g$ discos disjuntos eliminados. Observar que esta región es parecida a la región \mathcal{D} en la definición de grupo de Schottky). Ahora uno procede a pegar copias de $S - \{\alpha_1, \dots, \alpha_g\}$ (clausura) de manera de obtener una región planar Σ (toda curva simple cerrada en ella divide). Topológicamente hemos construido un grupo de Schottky. Ahora uno tiene un cubrimiento Galois topológico de S por esta superficie planar Σ con grupo de cubrimiento un grupo libre de rango g . Ahora levantamos la estructura de superficie de Riemann de S para dotar a Σ de una estructura de superficie de Riemann planar de manera que el grupo libre anterior es un grupo de automorfismos holomorfos de ella. Usando el teorema de planaridad [11] uno obtiene el grupo de Schottky deseado. En el lenguaje moderno, la construcción hecha es considerar el grupo fundamental de S , $\pi_1(S, p) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g : \prod_{j=1}^g [\alpha_j, \beta_j] = 1 \rangle$, donde $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$, y escoger el subgrupo normal mas pequeño que contenga las palabras β_1, \dots, β_g , digamos F . Entonces F uniformiza la región de discontinuidad de un grupo de Schottky de género g , siendo este grupo de Schottky el grupo cociente $\pi_1(S, p)/F$, que uniformiza la superficie S .

Ejemplo 2.6.2. — Consideremos una transformación loxodrómica $T(z) = \lambda z$, donde $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ y $|\lambda| \neq 1$. Entonces el grupo cíclico G_λ generado por T es un grupo de Schottky de género 1. Podemos escribir $\lambda = e^{i\tau}$ para algún $\tau \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$. Más aún, G_λ y G_{λ^*} uniformizan toros equivalentes sí y sólo sí existe una matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$$

tal que $\lambda = e^{i\tau}$ y $\lambda^* = e^{i\tau^*}$ para ciertos $\tau, \tau^* \in \mathbb{H}$ con $\tau^* = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$.

Sea G un grupo de Schottky de género $g \geq 1$, entonces $M(G)$ es un handlebody, es decir, homeomorfa a la suma conexas de g copias de $D \times S^1$, donde D es el disco abierto dos dimensional y S^1 es el círculo unitario. Su frontera holomorfo es una superficie de Riemann de género g . Otro ejemplo es considerar G un grupo Fuchsiano de la primera clase, digamos uniformizando una superficie de Riemann de género $g \geq 2$. Entonces $M(G)$ es homeomorfo a $S \times (-1, 1)$, donde S es una superficie de Riemann de género g . En este caso, su borde holomorfo es homeomorfo a $S \times \{-1, 1\}$. En la próxima sección

discutiremos algunas generalidades de variedades hiperbólicas tres dimensionales y al final volveremos de nuevo a los grupos de Schottky y las variedades hiperbólicas que ellas definen : Handlebodies.

2.7. Grupos de Schottky Anodados

En la definición geométrica hecha anteriormente para grupos de Schottky, podemos quitar la condición de que las esferas $C_1, C'_1, \dots, C_g, C'_g$ sean dos a dos disjuntas, pero sólo permitir tangencias de estas (sin cruzarse) y que los puntos de tangencias sean puntos fijos de elementos parabólicos del grupo generado por las transformaciones de Möbius A_1, \dots, A_g . También obligamos a que por cada esfera C_j (respectivamente, C'_j) tenemos la posibilidad de escoger una de las dos bolas abiertas n -dimensionales que ella acota, digamos D_j (respectivamente, D'_j), que no intersekte a las otras esferas. De esta manera el grupo G generado por las transformaciones A_1, \dots, A_g es llamado un *grupo de Schottky anodado de género g* . De la misma manera que con grupos de Schottky, las esferas C_1, \dots, C'_g son llamadas un *sistema fundamental de esferas* asociadas a los *generadores de Schottky* A_1, \dots, A_g . Si es posible considerar las esferas como esferas redondas, entonces diremos que los generadores son *neo-clásicos* y al grupo lo llamaremos un *grupo de Schottky neo-clásico*. La existencia de grupos de Schottky anodados no neo-clásicos es dada en [8]. Claramente, todo grupo de Schottky es un grupo de Schottky anodado, pero existen grupos de Schottky anodados que no son grupos de Schottky (ver ejercicio siguiente).

Ejercicio 17. —

- 1.- Construya un grupo de Schottky anodado de género $g \geq 1$ que no sea un grupo de Schottky. [Ind. Utilice generadores parabólicos.]
- 2.- Todo grupo de Schottky anodado de género g es un grupo libre de rango g .
- 3.- Todo grupo de Schottky anodado es un grupo Kleiniano con un dominio fundamental definido como el complemento de las bolas cerradas de la definición anterior.
- 4.- Toda transformación parabólica de un grupo de Schottky anodado es conjugado a una transformación parabólica que tiene como punto fijo uno de los puntos de tangencia de las esferas en la definición.
- 5.- Todo grupo de Schottky anodado sin parabólicos es un grupo de Schottky y vice-versa.

Si G es un grupo de Schottky anodado de género g y denotamos por $\Omega^{ext}(G)$ a la unión de su región de discontinuidad $\Omega(G)$ y los puntos fijos de sus transformaciones parabólicas. Este nuevo conjunto es llamado la *región extendida de discontinuidad* de G . Se sabe que por cada punto fijo p de una transformación parabólica primitiva P es posible encontrar un par de bolas abiertas B_1 y B_2 , ambas contenidas en $\Omega(G)$, tangentes en p y tal que $B_1 \cup B_2$ es precisamente invariante por el grupo cíclico generado por P en G . Definimos en $\Omega^{ext}(G)$ la topología generada por los abiertos de Ω y aquellos conjuntos

de la forma $B_1 \cup B_2 \cup \{p\}$, donde p es un punto fijo parabólico de G , $B_j \subset \Omega(G)$ es una bola abierta, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ y $\overline{B_1} \cap \overline{B_2} = \{p\}$. Esta es la topología cuspidal de $\Omega^{ext}(G)$.

Ejercicio 18. — Sea G un grupo de Schottky anodado de género g y consideramos $\Omega^{ext}(G)/G$, el espacio cociente por la acción del grupo G . Sea K un grupo de Schottky también de género g . Entonces topológicamente $\Omega^{ext}(G)/G$ consiste en considerar en la variedad $\Omega(K)/K$ una colección finita de curvas simples cerradas, dos a dos disjuntas, que no son homotópicamente triviales, y cada una de ellas colapsarlas a un punto.

Observación 2.7.1. — Es conjeturado que toda superficie de Riemann puede ser obtenida como cociente por grupos de Schottky clásicos. Esto ha sido probado para el caso de superficie de Riemann reales. En [8] se probó que tal conjetura es falsa a nivel de superficies estables.

2.8. Grupos de Schottky Anodados Topológicamente Equivalentes

Ahora bien, directamente de la definición de grupos de Schottky uno puede construir homeomorfismos que conjugan cada par de tales grupos del mismo género. En el caso de grupos de Schottky anodados esto no es verdad [8].

Proposición 2.8.1. — Para cada $n \geq 2$ y cada $g \geq 2$, existen infinitos grupos de Schottky anodados de género g en dimensión n , que son dos a dos topológicamente equivalentes.

Demonstración. — Basta realizar esto para $g = 2$. Primero observamos que por cada entero $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ es posible construir un grupo de Schottky anodado $G_n = \langle A, B \rangle$, de género $g = 2$, que uniformiza una superficie estable de género 2 con un único nodo que no divide y tal que $B^{n+1}A^{n+1}$ es parabólico primitivo (es decir, no es potencia no trivial de otro parabólico del grupo) que representa tal nodo ver figura 2.1.

Tenemos que G_0 tiene región de discontinuidad conexa, G_1 tiene conjunto límite una curva simple cerrada y para $n \geq 2$ el grupo G_n tiene un conjunto límite conexo pero de conectividad infinita. Esto al menos asegura que esos tres tipos de casos no pueden ser topológicamente equivalentes.

Ahora, si dos tales grupos G_n y G_m , $n > m \geq 2$, son topológicamente equivalentes, entonces tenemos que G_m tiene dos sistemas fundamentales de generadores, $\{A, B\}$ y $\{C, D\}$ de manera que $B^{n+1}A^{n+1}$ y $D^{m+1}C^{m+1}$ son conjugados en G_m (si es necesario podemos reemplazar C y D por sus inversos). Usando los generadores C y D para G_m definimos la longitud integral de cada palabra

$$w = C^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \dots C^{\alpha_{r-1}} D^{\alpha_r} \in G_m$$

como

$$l(w) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{r-1} + \alpha_r$$

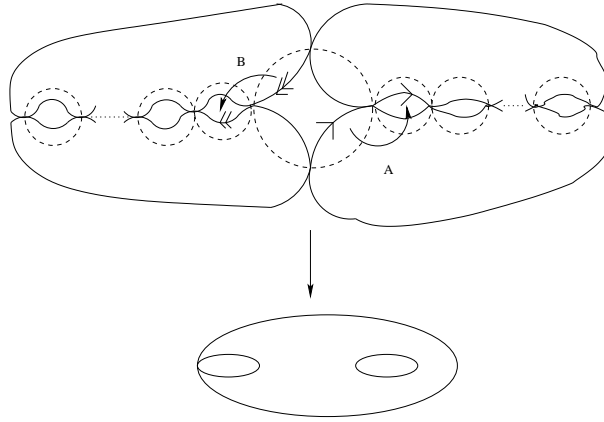


FIGURA 2.1

Esta definición no depende de la representación de w en C y D , de hecho

$$l(w_1 w_2) = l(w_1) + l(w_2), \quad w_1, w_2 \in G_m$$

Así, si denotamos por $a = l(A)$, $b = l(B)$, entonces debemos tener

$$(n+1)(a+b) = l(B^{n+1}A^{n+1}) = l(D^{m+1}C^{m+1}) = 2(m+1)$$

Como $n > m \geq 0$, debemos obligatoriamente tener que $a + b = 1$ y $n = 2m + 1$. En particular, si G_n , G_m y G_r son topológicamente equivalentes, $n > m > r$, entonces lo anterior asegura que $n = 2r + 1$ y $m = 2r + 1$, una contradicción. De esto obtenemos que G_{2k} , $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, nos da una colección infinita de grupos de Schottky anodados que no son dos a dos topológicamente equivalentes. \square

Observación 2.8.2. — El resultado anterior fué utilizado en [8] para dar un argumento teórico que permite construir una cantidad infinita de grupos de Schottky no clásicos en dimensión $n = 2$, dando así más ejemplos de tales grupos que el dado en [24].

2.9. Teorema de Retrosección Anodado

Dado un grupo de Schottky anodado G , de género g , tenemos que $\Omega^{ext}(G)/G$ resulta ser una superficie estable del mismo género. Cuando G es de hecho un grupo de Schottky, tenemos el teorema de retrosección de Koebe que dice que toda superficie de Riemann de género g puede ser obtenida como cociente de un grupo de Schottky del mismo género. Para las superficies estables lo anterior también vale [7].

Teorema 2.9.1 (Teorema de Retrosección Anodado). — *Toda superficie estable se conformalmente equivalente al cociente $\Omega^{ext}(G)/G$ de algún grupo de Schottky anodado del mismo género.*

CAPÍTULO 3

VARIETADES HIPERBÓLICAS 3-DIMENSIONALES

3.1. Variedades Hiperbólicas 3-Dimensionales

Diremos que una variedad 3-dimensional M tiene una estructura hiperbólica si existe un grupo discreto G de transformaciones de Möbius (isometrías de \mathbb{H}^3) tal que \mathbb{H}^3/G es homeomorfa a M ; en cuyo caso, la estructura hiperbólica es dada por G . Una variedad M junto a una estructura hiperbólica es llamada una *variedad hiperbólica*. Observemos que en este caso, $\pi_1(M) \cong G$. Puede ocurrir que M sea compacta o no y el volumen hiperbólico sea finito o no.

Ahora veremos algunas propiedades que deben satisfacer las variedades hiperbólicas. El primer resultado sale directamente del hecho que los grupos de isometrías obtenidos por transformaciones de Möbius preservan la orientación, es decir, tenemos el siguiente.

Proposición 3.1.1. — *Toda variedad hiperbólica es orientable.*

3.1.1. Variedades Hiperbólicas son Irreducibles. — Una variedad 3-dimensional M es llamada una *variedad irreducible* si para toda incrustación

$$i : S^2 \rightarrow M,$$

donde S^2 es la esfera bidimensional unitaria, se puede extender a una incrustación $i : B^3 \rightarrow M$, donde B^3 es la bola 3-dimensional acotada por S^2 .

Ejemplo 3.1.2. — La variedad $M = S^2 \times S^1$ no es irreducible

Proposición 3.1.3. — *Toda variedad hiperbólica 3-dimensional es irreducible.*

Demonstración. — Sea $M = \mathbb{H}^3/G$ una variedad hiperbólica. Denotemos por $P : \mathbb{H}^3 \rightarrow M$ el cubrimiento universal dado por G . Consideremos una incrustación $i : S^2 \rightarrow M$. Entonces se puede levantar esta incrustación a una incrustación $\hat{i} : S^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ tal que $P\hat{i} = i$. Usando el hecho que \mathbb{H}^3 es contractible, tenemos que $\hat{i} : S^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ se

puede extender a una incrustación $\widehat{i} : B^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$. Luego, usando $P\widehat{i} = i$ permite extender $i : S^2 \rightarrow M$ a una incrustación $i : B^3 \rightarrow M$. \square

Observación 3.1.4. — Observemos que no toda variedad 3-dimensional irreducible es necesariamente hiperbólica. Por ejemplo, $M = S^1 \times S^1 \times S^1$ es irreducible con grupo fundamental isomorfo a $L = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Ya que no existe un grupo discreto de isometrías del espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 isomorfo a L obtenemos que M no es hiperbólica.

3.2. Variedades Hiperbólicas son Atoroidales

Una variedad 3-dimensional compacta M se llama *atoroidal* si todo subgrupo de $\pi_1(M)$ isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ es conjugado a un subgrupo de $\pi_1(S)$ para alguna superficie $S \subset \partial M$.

Proposición 3.2.1. — *Sea M una variedad compacta cuyo interior $\text{Int}(M)$ tiene una estructura hiperbólica 3-dimensional. Entonces M es atoroidal.*

Demonstración. — Consideremos una variedad hiperbólica \mathbb{H}^3/G y supongamos que tenemos un subgrupo K de G isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. En este caso, K está generado por dos transformaciones parabólicas A y B que conmutan con el mismo punto fijo. Módulo conjugación, podemos suponer que $A(z) = z + 1$ y $B(z) = z + \tau$, algún $\tau \in \mathbb{H}$. Además, podemos considerar $B = \{(z, t) \in \mathbb{H}^3 : t \geq 1\}$, el cual resulta precisamente invariante por K en G . Entonces, $B/K \cong \Delta^* \times S^1$, donde Δ^* denota el disco unitario abierto con el centro 0 eliminado. Luego, en M podemos quitar la proyección de B (la cual es exactamente B/K) para formar un borde S de M para el cual $\pi_1(S)$ es K . \square

Ejemplo 3.2.2. —

- (1) Si $\partial M = \emptyset$, entonces M es atoroidal si y sólo si $\pi_1(M)$ no contiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
- (2) $M = S^1 \times S^1 \times S^1$ es irreducible pero no es atoroidal.
- (3) $M = S^2 \times S^1$ es atoroidal, pero no es irreducible.

Corolario 3.2.3. — *Si M es una variedad compacta cuyo interior tiene una estructura hiperbólica, entonces M debe ser orientable, atoroidal e irreducible.*

Existen variedades 3-dimensionales compactas, orientables, irreducibles y atoroidales cuyo interior no posee una estructura hiperbólica. A continuación procedemos a dar un ejemplo de esta situación. Para esto consideremos un homeomorfismo que revierte orientación

$$\sigma : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$$

de orden dos tal que $(S^1 \times S^1)/\sigma$ es la botella de Klein. Ahora construimos el homeomorfismo que preserva orientación de orden dos

$$\tau : (S^1 \times S^1) \times [-1, 1] \rightarrow (S^1 \times S^1) \times [-1, 1],$$

definido por

$$\tau(p, t) = (\sigma(p), -t),$$

donde $p \in S^1 \times S^1$ y $t \in [-1, 1]$.

Consideremos la variedad 3-dimensional orientable y compacta

$$M = ((S^1 \times S^1) \times [-1, 1])/\tau$$

Ejercicio 19. — Verificar que :

- (1) $\partial M \cong S^1 \times S^1$;
- (2) El interior de M es homeomorfa a \mathbb{R}^3/H , donde H es el grupo generado por

$$A(x, y, z) = (x + 1, y, z)$$

$$B(x, y, z) = (-x, y + 1, -z)$$

- (3) Deducir de lo anterior que $\pi_1(M) = \langle A, B : ABA = B \rangle$.

Proposición 3.2.4. — El interior de la variedad M construida no tiene estructura hiperbólica.

Demonstración. — Supongamos que el interior N de M posee estructura hiperbólica. Como tenemos un cubrimiento de grado dos

$$P : S^1 \times S^1 \times (-1, 1) \rightarrow N,$$

entonces debemos tener que $G = \pi_1(M) = \pi_1(N) < \mathbb{M}$ debe contener $L = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ como subgrupo de índice dos en G . En este caso,

$$\tau : S^1 \times S^1 \times (-1, 1) \rightarrow S^1 \times S^1 \times (-1, 1)$$

tiene un levantamiento $\hat{\tau} : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$, $\hat{\tau} \in G$ y $\hat{\tau}^2 \in L$. Más aún, G está generado por L y $\hat{\tau}$.

Si ocurre que $\hat{\tau}^2 = I$, entonces $\hat{\tau}$ debe tener un punto fijo en \mathbb{H}^3 , con lo cual tendremos que N no es una variedad, es un orbifold con valores de ramificación.

Por otro lado, sabemos que L está generado por dos transformaciones parabólicas que conmutan y tienen el mismo punto fijo $q \in \hat{\mathbb{C}}$. Como $\hat{\tau}^2 \neq I$ y $\hat{\tau}^2 \in L$, tenemos necesariamente que $\hat{\tau}^2$ es parabólico con punto fijo q . Luego $\hat{\tau}$ también es parabólico con punto fijo q . Esto diría entonces que G es abeliano, una contradicción. \square

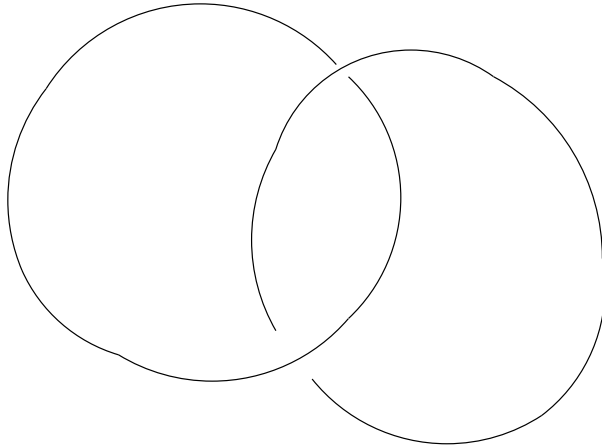


FIGURA 3.1

Observación 3.2.5. — En el ejemplo anterior tenemos que $R = S^1 \times S^1 \times (-1, 1)$ posee una estructura hiperbólica (de volumen infinito), dada por el grupo K generado por $A(z, t) = (z + 1, t)$ y $B(z, t) = (z + i, t)$. Es importante notar que R tiene dos bordes naturales, uno es de volumen hiperbólico finito mientras que el otro es de volumen infinito. R es topológicamente la esfera 3-dimensional S^3 menos dos círculos entrelazados como se muestra en la figura 3.1. La razón de por qué $N = R/\tau$ no tiene estructura hiperbólica puede verse como el hecho que si esto ocurriese, entonces τ debería ser una isometría hiperbólica de R la cual permuta ambos bordes, lo cual contradice la finitud del volumen de uno de los bordes con el hecho que el otro borde es de volumen infinito.

La importancia del ejemplo anterior se ve reflejada en el siguiente resultado de Thurston [22]

Teorema 3.2.6. — Sea M una variedad 3-dimensional compacta, orientable, con $\partial M \neq \emptyset$ y no homeomorfa al ejemplo anterior. Entonces el interior de M posee una estructura hiperbólica si y sólo si M es irreducible y atoroidal.

En el caso en que la variedad compacta M sea cerrada, es decir compacta y sin borde, necesitaremos de la siguiente propiedad debida a Waldhausen [23]. Diremos que una variedad 3-dimensional compacta sin borde es *suficientemente grande* si existe una superficie orientable cerrada (compacta sin borde) S , no homeomorfa a la esfera, y una incrustación $i : S \rightarrow M$ tal que a nivel de grupos fundamentales $\pi_1(i) : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ es inyectiva.

Observación 3.2.7. — Una variedad 3-dimensional compacta con borde es suficientemente grande. Un tipo de variedades de este tipo son las llamadas *variedades de Haken*

que además son *variedades primas*, es decir, no pueden descomponerse en suma conexa de variedades no triviales.

Teorema 3.2.8 ([22]). — *Sea M una variedad 3-dimensional compacta, orientable, cerrada y suficientemente grande. Entonces M tiene una estructura hiperbólica si y sólo si M es irreducible y atoroidal.*

Fué originalmente conjeturado por Thurston que el interior de toda variedad 3-dimensional compacta (posiblemente con borde), orientable, cerrada, irreducible y atoroidal cuyo grupo fundamental es infinito tiene una estructura hiperbólica. Recién en el 2003 este hecho fué probado (como parte de la demostración de los teoremas de geometrización de Thurston y en particular de la conjetura de Poincaré) por Gregory Perelman [17, 18, 19] usando técnicas del flujo de Ricci y resultados previos de Richard Hamilton. Una buena referencia es el artículo [15] donde John W. Morgan explica claramente sobre los teoremas de geometrización de Thurston y muestra las ideas detras de la demostración de Perelman.

Una buena referencia sobre los teoremas de hiperbolización de Thurston es [14]. En las próximas secciones miraremos algunos ejemplos de construcciones de variedades 3-dimensionales hiperbólicas.

También es de gran importancia la siguiente propiedad de rigidez que satisfacen las variedades hiperbólicas de dimensión tres con volumen finito, a diferencia de lo que sucede para superficies de Riemann. Decimos que un grupo discreto G de isometrías de \mathbb{H}^3 (es decir, un grupo discreto de transformaciones de Möbius) es un grupo de *volumen finito* si \mathbb{H}^3/G tiene volumen hiperbólico finito.

Teorema 3.2.9 (Teorema de Rigidez de Mostow). — *Sean G_1 y G_2 dos grupos discretos, sin torsión y volumen finito de isometrías del espacio hiperbólico \mathbb{H}^n , $n \geq 3$. Entonces G_1 y G_2 son isomorfos como grupos abstractos si y sólo si son conjugados por una isometría.*

En el caso que tenemos un grupo discreto G de transformaciones de Möbius que tiene torsión, entonces \mathbb{H}^3 ya no resulta ser una variedad hiperbólica, aunque si es una variedad topológica. Esta es llamada una *orbifold hiperbólica*. De todas maneras, si G es finitamente generado, entonces el siguiente resultado de Selberg nos dice que la orbifold hiperbólica es cubierta por una variedad hiperbólica.

Teorema 3.2.10 (Lema de Selberg). — *Sea G un grupo de transformaciones de Möbius que sea finitamente generado. Entonces existe un subgrupo normal de índice finito $K < G$ el cual no tiene torsión.*

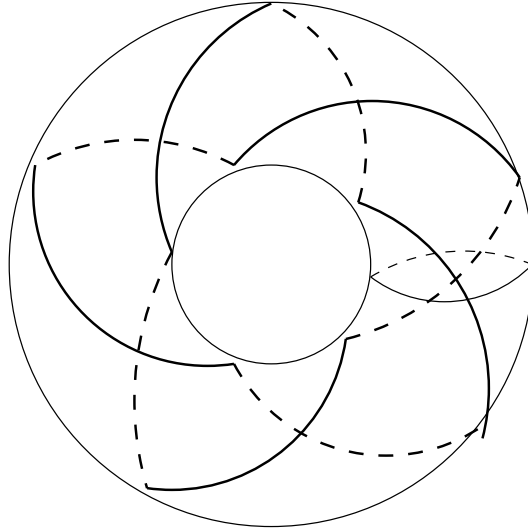


FIGURA 3.2

3.3. Complemento de Nudos

Un *nudo* en la esfera 3-dimensional S^3 es la imagen homeomorfa de un círculo en S^3 . Un nudo $K \subset S^3$ tal que el grupo fundamental de su complemento sea trivial es llamado un *nudo no anudado*. En caso contrario, decimos que este es un *nudo anudado*.

Dado un nudo $K \subset S^3$ uno puede considerar la variedad 3-dimensional M_K obtenida al eliminar una vecindad tubular abierta de K . Esta es una variedad compacta, irreducible, orientable con borde $\partial M_K \cong S^1 \times S^1$. La proposición 3.2.1 asegura que el interior de M_K admite una estructura hiperbólica si y sólo si M_K es atoroidal.

3.3.1. Nudos Toroidales. — Un nudo $K \subset S^3$ anudado es llamado un *nudo toroidal* si existe un toro $T \cong S^1 \times S^1$ incrustado en S^3 el cual no es anudado (es decir, $S^3 - T$ consiste de dos variedades homeomorfas a $D^2 \times S^1$, donde $D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$) tal que $K \subset T$ (en la figura 3.2 se muestra un nudo toroidal llamado la figura 8).

Ejercicio 20. — Verificar que si K es un nudo toroidal, entonces M_K no es atoroidal. En particular, concluir que M_K no posee una estructura de variedad hiperbólica.

3.3.2. Nudos Satelitales. — Un nudo $K \subset S^3$ es llamado un *nudo satelital* si existe un nudo no trivial $Q \subset S^3$, es decir $\pi_1(S^3 - Q) \cong \mathbb{Z}$, y existe una vecindad tubular V_Q para Q de manera que $K \subset V_Q$ y no exista una bola tres dimensional $B^3 \subset V_Q$ conteniendo K en su interior.

Ejercicio 21. — Verificar que si K es un nudo satelital, entonces K es anudado y M_K no es atoroidal. Concluir que en este caso M_K no puede tener la estructura de una variedad hiperbólica.

3.3.3. Nudos No anudados. — Si tomamos $K \subset S^3$ un nudo no anudado, entonces tenemos que M_K es homeomorfo a $\overline{D} \times S^1$, donde \overline{D} es el disco unitario cerrado y S^1 es el círculo unitario (es decir, M_K es un handlebody de género 1). En este caso, como el grupo fundamental de M_K es un grupo cíclico infinito, la única estructura hiperbólica que se le puede dar es por un grupo de Schottky de género 1, es decir, por el grupo cíclico generado por una transformación loxodrómica.

3.3.4. Hiperbolización de Nudos. — Como consecuencia del teorema 3.2.6 y lo anterior es el siguiente resultado de Thurston el cual asegura que los únicos nudos para los cuales el interior de M_K no tiene estructura hiperbólica son los toroidales y satelitales.

Corolario 3.3.1. — Sea K un nudo en S^3 . Entonces el interior de M_K tiene estructura hiperbólica si y sólo si K no es toroidal ni satelital.

Observación 3.3.2. — Si M_K tiene interior con estructura hiperbólica y K es anudado, entonces $\text{Vol}(\text{Int}(M_K)) < \infty$. En efecto, el borde de M_K es homeomorfo a $S^1 \times S^1$, luego debe ser uniformizado por un subgrupo discreto isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ó a \mathbb{Z} (este último generado por un loxodrómico). Ya que K es no anudado, tenemos que M_K no es un handlebody de género 1, luego el borde de M_K sólo puede ser uniformizado por $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (un grupo generado por dos traslaciones en direcciones \mathbb{R} -linealmente independientes).

El programa *Snappea* de J. Weeks permite dibujar nudos y entrelazados (links) en la esfera S^3 y determinar si su complemento admite o no una estructura de variedad hiperbólica. Además este entrega su volumen hiperbólico, su homología, una representación matricial de su grupo fundamental como transformaciones de Möbius, dominios fundamentales, etc..

3.4. Fibrados sobre S^1

Consideremos una superficie S compacta, orientable con posible borde ∂S y sea $f : S \rightarrow S$ un homeomorfismo de S que preserva la orientación. Podemos construir una variedad 3-dimensional compacta orientable

$$M_f(S) = S \times [0, 1] / \sim,$$

donde $(x, 0) \sim (f(x), 1)$, la cual es un *fibrado sobre S^1* .

Ejercicio 22. —

- (i) Verificar que $\partial M_f(S) \neq \emptyset$ si y sólo si $\partial S \neq \emptyset$. En tal caso, $\partial M_f(S)$ es unión de toros.

(ii) Sean $f, g : S \rightarrow S$ homeomorfismos que preservan orientación y que son homotópicos. Probar que $M_f(S)$ y $M_g(S)$ son variedades homeomorfas.

El grupo fundamental de $M_f(S)$ es la HNN-extensión del grupo fundamental de $S \times [0, 1]$ extendido por f . De manera más precisa; podemos suponer que $f(p) = p$ algún $p \in S$, homotopando f si es necesario. Supongamos que S es una superficie compacta de género $g \geq 1$ con k bordes. En este caso,

$$\pi_1(S, p) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g, \delta_1, \dots, \delta_k : \prod_{j=1}^g [\alpha_j, \beta_j] \prod_{l=1}^k \delta_l = 1 \rangle,$$

donde $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$.

Si consideramos un arco simple orientado $\delta \subset S \times [0, 1]$ partiendo desde $(p, 0)$ y terminando en $(p, 1)$, entonces

$$\begin{aligned} \pi_1(M_f(S), [(p, 0)]) &= \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g, \delta_1, \dots, \delta_k, \delta : \\ &\prod_{j=1}^g [\alpha_j, \beta_j] \prod_{l=1}^k \delta_l = 1, f_*(\alpha_j) = \delta^{-1}\alpha_j\delta, f_*(\beta_j) = \delta^{-1}\beta_j\delta, f_*(\delta_l) = \delta^{-1}\delta_l\delta \rangle \end{aligned}$$

Luego, si el interior de $M_f(S)$ tiene estructura hiperbólica, entonces existe un grupo Kleiniano G isomorfo al grupo anterior tal que el interior de $M_f(S)$ es homeomorfo a \mathbb{H}^3/G

3.4.1. Característica No Negativa. — Supongamos que la característica de Euler de S es mayor o igual a cero. En tal caso, las posibilidades para S son, módulo homeomorfismos, las siguientes :

- (i) S^2 ;
- (ii) $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$;
- (iii) $A = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1\}$;
- (iv) $S^1 \times S^1$.

Si $S = S^2$, entonces todo homeomorfismo que preserva orientación $f : S \rightarrow S$ debe ser homotópico a la identidad. Luego tenemos que $M_f(S) \cong S^2 \times S^1$. Esta variedad no es irreducible y, en particular, no posee una estructura hiperbólica.

Cuando $S = \overline{D}$, todo homeomorfismo $f : S \rightarrow S$, que preserva orientación, es homotópico a la identidad. Entonces tenemos que $M_f(S) \cong \overline{D} \times S^1$. El interior posee estructura hiperbólica dada por cualquier grupo de Schottky anodado de género uno. Es importante notar que no existe estructura hiperbólica de volumen finito ¿Por qué?

En el caso $S = A$ tenemos dos posibilidades, dependiendo si f permuta o no ambos bordes del anillo A :

- (a) Supongamos que f preserva cada lado de A . En tal caso $M_f(S) \cong S^3 - K$, donde K es el entrelazado dado en figura 3.1. El grupo fundamental de esta variedad es isomorfa a $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$. Este caso tienen una estructura hiperbólica de dimensión infinita, dado por el grupo $K = \langle A, B \rangle$, donde A y B son parabólicos con el mismo punto fijo ∞ trasladando en direcciones linealmente independientes. Como todo subgrupo discreto de isometrías de \mathbb{H}^3 isomorfo a $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ es conjugado a uno del tipo

antes descrito, tenemos que no es posible encontrar una estructura hiperbólica de volumen finito.

- (b) Supongamos ahora que f permuta los dos lados de A . Luego existe una curva simple cerrada γ contenida en el interior de A que separa ambos lados de A y que resulta ser invariante por f . Luego $\gamma \times [0, 1]$ define en $M_f(S)$ un toro que no es homotópico al borde de $M_f(S)$ (que resulta ser un toro). Así, obtenemos una variedad que no es homotópicamente atoroidal, luego, no tiene estructura hiperbólica.

En el último caso, si $S = S^1 \times S^1$ y $f : S \rightarrow S$ es un homeomorfismo que preserva orientación, entonces $M_f(S)$ contendrá incrustada una copia de S , la cual no es homotópica a un borde de $M_f(S)$ por la simple razón que esta es cerrada. Luego $M_f(S)$ resulta no ser homotópicamente atoroidal y, en particular, no posee una estructura hiperbólica.

3.4.2. Característica Negativa. — En el caso que S tiene característica de Euler negativa, entonces $M_f(S)$ resulta ser irreducible. La razón de esto es que el cubrimiento universal de $M_f(S)$, homeomorfo a \mathbb{R}^3 , es contractible. En efecto, supongamos que $S = \mathbb{H}/F$, donde \mathbb{H} es el plano hiperbólico y F es un grupo Fuchsiano que uniformiza S . Denotemos por $\pi : \mathbb{H} \rightarrow S$ el cubrimiento universal inducido por F . Entonces el homeomorfismo $f : S \rightarrow S$ se levantaría por π a un homeomorfismo $\hat{f} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$. Ahora, consideremos el espacio $\mathcal{W} = \mathbb{H} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$ y el grupo L de homeomorfismos de \mathcal{W} generado por las transformaciones $A_\gamma(z, t) = (\gamma(z), t)$, para $\gamma \in F$ y $B(z, t) = (\hat{f}(z), t + 1)$.

Ejercicio 23. —

- (i) Verificar que L es un grupo de homeomorfismos de \mathcal{W} que actúa de manera propiamente discontinua y sin puntos fijos en todo \mathcal{W} . Más aún, \mathcal{W}/L es homeomorfo a $M_f(S)$.
- (ii) Ver que $M_f(S)$ no puede ser homeomorfo a la variedad excluyente de la proposición 3.2.6

Ahora que sabemos que $M_f(S)$ es irreducible y no homeomorfo al caso excluido en el teorema 3.2.6 tenemos como consecuencia de los teoremas de hiperbolización de Thurston 3.2.6 y 3.2.8 el siguiente.

Corolario 3.4.1. — Sea S una superficie de característica de Euler negativa. El interior de $M_f(S)$ admite estructura hiperbólica si y sólo si $M_f(S)$ es atoroidal.

La propiedad de ser o no atoroidal la variedad $M_f(S)$ será consecuencia del (tipo de homotopía) del homeomorfismo $f : S \rightarrow S$ considerado. Primero, enunciaremos la clasificación de los homeomorfismos dada por Thurston. Consideremos un homeomorfismo $f : S \rightarrow S$.

- (1) Si f es homotópico a un homeomorfismo de orden finito, entonces decimos que este es un *homeomorfismo periódico*.

- (2) Si f es homotópica a un homeomorfismo para el cual existe una colección de curvas cerradas simples, dos a dos disjuntas, ninguna de ellas homotópicamente trivial ni homotópica a un borde de S , que es invariante por la acción de tal homeomorfismo, entonces decimos que f es un *homeomorfismo reducible*.
- (3) Si f no es de ninguno de los dos tipos anteriores, entonces decimos que es un *homeomorfismo pseudo-Anosov*.

Supongamos que $f : S \rightarrow S$ es periódico. Podemos entonces suponer que f es de orden finito, digamos N . Consideremos una curva simple cerrada $\alpha \subset S$ que no sea homotópicamente trivial ni sea homotópica a un borde de S . Sean $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_1 = f(\alpha), \dots$, $\alpha_k = f^k(\alpha)$, tal que $f(\alpha_k) = \alpha$. Consideremos los cilindros $C_1 = \alpha_0 \times [0, 1], \dots, C_k = \alpha_k \times [0, 1]$ en $S \times [0, 1]$. Estos cilindros se proyectan en toros dentro de $M_f(S)$, obteniendo en este caso que $M_f(S)$ no es atoroidal.

Supongamos ahora que $f : S \rightarrow S$ es reducible. Podemos suponer que f deja invariante una colección de curvas cerradas simples, dos a dos disjuntas, ninguna de ellas homotópicamente trivial ni homotópica a un borde de S . En este caso podemos escoger una curva α dentro de tal colección y podemos proceder como en el caso anterior para ver que $M_f(S)$ no es atoroidal.

Tenemos el siguiente resultado de Thurston, cuya demostración también puede encontrarse en [16], el cual dice que $M_f(S)$ es atoroidal si f es pseudo-Anosov. Así, los teoremas de hiperbolización de Thurston 3.2.6 y 3.2.8 dan el siguiente.

Corolario 3.4.2. — *Sea S una superficie compacta orientable de característica de Euler negativa y sea $f : S \rightarrow S$ un homeomorfismo que preserva orientación. Entonces el interior de $M_f(S)$ admite una estructura de variedad hiperbólica si y sólo si f es pseudo-Anosov.*

Por lo anterior, el problema de hiperbolización del interior de $M_f(S)$ se puede mirar como el problema de decidir cuando el homeomorfismo $f : S \rightarrow S$ es o no un homeomorfismo pseudo-Anosov. Como esta propiedad es un invariante homotópico, podemos suponer que existe $p \in S$ tal que $f(p) = p$. De esta manera tenemos el siguiente diagrama conmutativo :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S, p) & \xrightarrow{\pi_1(f)} & \pi_1(S, p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_1(S, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{H_1(f)} & H_1(S, \mathbb{Z}) \end{array}$$

Si nos damos una base de $H_1(S, \mathbb{Z})$, entonces $H_1(f)$ queda representada por una matriz en $SL(r, \mathbb{Z})$, donde

$$r = \text{rango de } H_1(S, \mathbb{Z}) = \begin{cases} 2g, & \text{si } S \text{ es superficie compacta} \\ & \text{cerrada de género } g; \\ 2g + k - 1, & \text{si } S \text{ es superficie compacta} \\ & \text{de género } g \text{ y } k \text{ bordes.} \end{cases}$$

Esta matriz $H_1(f)$ es llamada la *monodromía de Anosov* del homeomorfismo $f : S \rightarrow S$ correspondiente a la base escogida de homología. Un cambio de base de homología induce una conjugación de la matriz $H_1(f)$ por una matriz en $SL(r, \mathbb{Z})$, en particular, el polinomio característico $P_f(t) = \text{Det}[H_1(f) - tI] \in \mathbb{Z}[t]$ se mantiene invariante.

Por ejemplo : (i) si $f : S \rightarrow S$ es periódico de período N , entonces $Q(t) = t^N - 1$ debe ser divisible por $P_f(t)$. En particular, $P_f(t)$ tiene como ceros algunas de las raíces de la unidad ; (ii) si existe una curva α cerrada simple homológicamente no trivial en S tal que $f^k(\alpha) = \alpha$ (igualdad en el sentido de homología) para algún $k > 0$, entonces $P_f(t)$ tiene un cero que es raíz de la unidad. En resumen ;

Proposición 3.4.3. — Sea $f : S \rightarrow S$ un homeomorfismo de S que preserva orientación cuyo polinomio característico $P_f(t)$ no tiene raíces de la unidad como ceros, entonces :

- (a) f no puede ser periódico ;
- (b) si f es reducible, entonces cualquier colección de curvas invariante por f debe consistir sólo de curvas que son homológicamente triviales.

Observación 3.4.4. — Es importante notar que al mirar sólo la acción del homeomorfismo $f : S \rightarrow S$ a nivel de la homología, no tenemos información sobre la acción de f sobre las curvas que son homológicamente triviales. Es por esta razón que en la proposición anterior no podemos desechar la posibilidad que f sea o no reducible.

3.4.2.1. Un Ejemplo de H. Helling : Género Uno y un Borde. — Para tener una mejor visión de este ejemplo, recomendamos leer los trabajos de H. Helling, P. Alestalo y C. Menzel [1] [6].

Sea S una superficie compacta de género uno con un borde y $f : S \rightarrow S$ un homeomorfismo que preserva orientación. Módulo homotopía, podemos asumir que f es la identidad cerca del borde. Sea $p \in \partial S$ y sean las curvas orientadas simples γ_1, γ_2 y el arco orientado δ como se muestran en la figura 3.3.

Si $\alpha = \delta \cdot \gamma_1 \cdot \delta^{-1}$ y $\beta = \delta \cdot \gamma_2 \cdot \delta^{-1}$, entonces

$$\pi_1(S, p) = \langle \alpha, \beta \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

$$H_1(S, \mathbb{Z}) = \langle \hat{\alpha}, \hat{\beta} : [\hat{\alpha}, \hat{\beta}] = 1 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

La curva frontera es dada por $\lambda = \beta^{-1} \cdot \alpha^{-1} \cdot \beta \cdot \alpha$.

Usando esta base de homología para S , obtenemos la monodromía de Anosov para f

$$H_1(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$$

En este caso, el polinomio característico de f es dado por

$$P_f(t) = t^2 - (a + d)t + 1$$

Respecto a los ceros de $P_f(t)$ tenemos el siguiente :

- (1) Si $(a + d)^2 > 4$, entonces los ceros de $P_f(t)$ viven en $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$;
- (2) Si $(a + d)^2 = 4$, entonces los ceros de $P_f(t)$ viven en $\{\pm 1\}$;

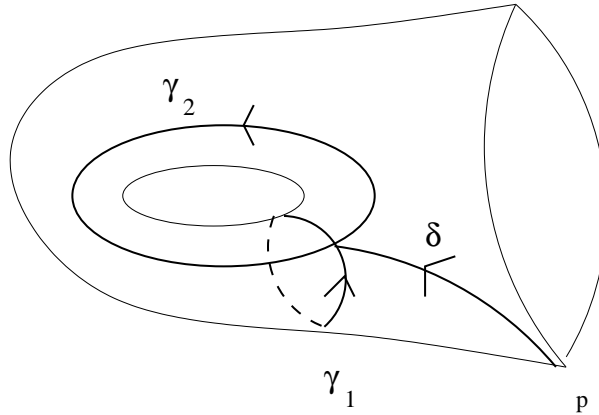


FIGURA 3.3

(3) Si $(a + d)^2 < 4$, entonces los ceros de $P_f(t)$ viven en $\{\pm i, \frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}\}$.

Habíamos observado que :

- (a) si f es periódico, entonces $P_f(t)$ debe tener como cero alguna raíz de la unidad, es decir, $-2 \leq a + d \leq 2$;
- (b) Si f es reducible, y usando el hecho que no hay curvas simples cerradas homológicamente triviales que no sean homotópicamente triviales (o homotópicas al borde) en este tipo de superficie S , entonces de nuevo debemos tener $-2 \leq a + d \leq 2$.

Luego, si $(a + b)^2 > 4$, es decir la matriz $H_1(f)$ es hiperbólica, entonces f es pseudo-Anosov. H. Helling ha observado que el recíproco es válido :

Teorema 3.4.5. — Sea $f : S \rightarrow S$ un homeomorfismo que preserva orientación de una superficie S de género uno con un borde. Entonces f es pseudo-Anosov si y sólo si $H_1(f)$ es hiperbólica.

Corolario 3.4.6. — Sea S una superficie de género 1 con un borde y $f : S \rightarrow S$ un homeomorfismo que preserva la orientación. Entonces el interior de la variedad $M_f(S)$ es hiperbólica si y sólo si $H_1(f)$ es hiperbólica.

3.4.2.2. Caso de superficies cerradas. — Para esta subsección nos basaremos en [5]. Supongamos que la superficie S considerada es cerrada de género $g \geq 2$ y $f : S \rightarrow S$ un homeomorfismo que preserva la orientación. Sabemos que si el polinomio característico $P_f(t)$ no tiene raíces de la unidad como ceros, entonces proposición 3.4.3 asegura que f puede ser de uno de los siguientes tipos :

- (1) Pseudo-Anosov ;
- (2) Reducible de orden infinito con un sistema invariante de curvas cerradas, simples, homológicamente triviales, homotópicamente no triviales y disjuntas dos a dos.

Supongamos que tenemos el caso (2). En esta situación tenemos la existencia de una colección \mathcal{F} finita de curvas cerradas, simples, disjuntas dos a dos, homológicamente triviales pero homotópicamente no triviales, que es invariante por f . Podemos suponer que α_1 es una de esas curvas y que esta divide S en dos superficies, una de las cuales denotaremos por S_1 con la propiedad que S_1 es disjunta de las otras curvas cerradas en \mathcal{F} .

Denotemos por $\alpha_2 = f(\alpha_1)$, $\alpha_3 = f(\alpha_2)$, ..., $\alpha_r = f(\alpha_{r-1})$ tal que $f(\alpha_r) = \alpha_1$. De esta manera, obtenemos también la sucesión finita de superficies $S_1, S_2 = f(S_1), \dots, S_r = f(S_{r-1})$ y tal que $f(S_r) = S_1$. Sean

$$R = S - \bigcup_{j=1}^r S_j; \text{ y } \overline{R} = R \cup \{\text{discos pegados en cada borde de } R\}$$

Entonces

$$H_1(S, \mathbb{Z}) = H_1(S_1, \mathbb{Z}) \oplus \dots \oplus H_1(S_r, \mathbb{Z}) \oplus H_1(\overline{R}, \mathbb{Z}).$$

Luego podemos construir una base para $H_1(S, \mathbb{Z})$ de la manera siguiente. Primero, construimos una base para $H_1(S_1, \mathbb{Z})$ y la trasladamos por f para obtener una base para cada $H_1(S_j, \mathbb{Z})$, $j = 2, \dots, r-1$. Segundo, construimos una base para $H_1(\overline{R}, \mathbb{Z})$. La unión de todas esas bases da una base para $H_1(S, \mathbb{Z})$. La monodromía de Anosov para f en tal base queda de la forma :

$$H_1(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & A & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & C & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & B & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & I & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & E & F & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & G & H & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $P_f(t) = M(t^r)N(t)$, donde $N(t)$ es el polinomio característico de f restringido a \overline{R} . En particular se obtiene el siguiente :

Teorema 3.4.7 ([5]). — *Sea S una superficie orientable cerrada de género $g \geq 2$ y $f : S \rightarrow S$ un homeomorfismo que preserva la orientación. Entonces f es pseudo-Anosov si :*

- (i) $P_f(t)$ no tiene raíces de la unidad como ceros ;
- (ii) $P_f(t)$ es un polinomio irreducible en $\mathbb{Z}[t]$; y

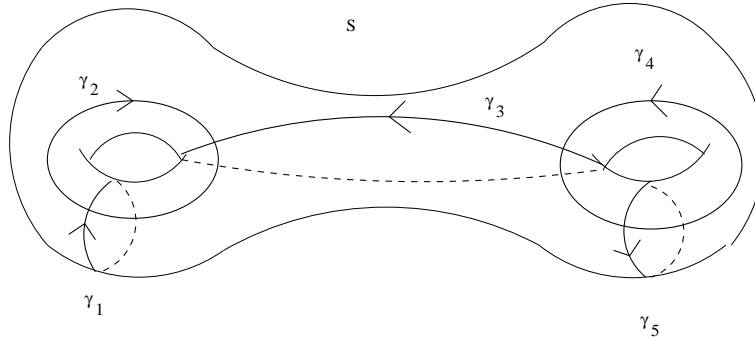


FIGURA 3.4

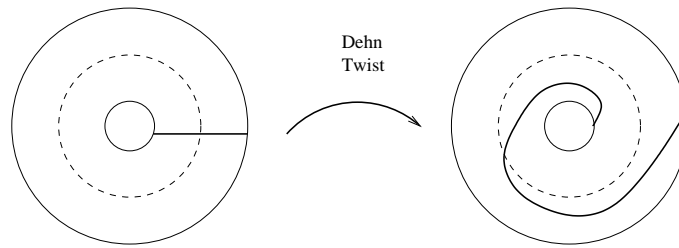


FIGURA 3.5

(iii) $P_f(t) \notin \mathbb{Z}[t^r]$, para ningún $r \in \{2, 3, 4, \dots\}$.

Corolario 3.4.8. — Sea S una superficie orientable cerrada de género $g \geq 2$ y $f : S \rightarrow S$ un homeomorfismo que preserva la orientación. Entonces el interior de la variedad $M_f(S)$ es hiperbólica sí y sólo si

- (i) $P_f(t)$ no tiene raíces de la unidad como ceros;
- (ii) $P_f(t)$ es un polinomio irreducible en $\mathbb{Z}[t]$; y
- (iii) $P_f(t) \notin \mathbb{Z}[t^r]$, para ningún $r \in \{2, 3, 4, \dots\}$.

El siguiente ejemplo es tomado también del libro [5]. Sea S una superficie de género dos y considere las curvas $\gamma_1, \dots, \gamma_5$ como se muestra en la figura 3.4.

Denotemos por $f_j : S \rightarrow S$ el Dehn twist a lo largo de la curva γ_j , $j = 1, \dots, 5$.

Usando como base para $H_1(S, \mathbb{Z})$ las curvas $\alpha_1 = \gamma_1$, $\alpha_2 = \gamma_5$, $\beta_1 = \gamma_2$ y $\beta_2 = \gamma_4$, las monodromías de Anosov quedan dadas por las matrices :

$$H_1(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad H_1(f_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$H_1(f_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad H_1(f_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$H_1(f_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomando $f = f_1 f_3 f_5^2 f_2^{-1} f_4^{-1}$, se obtiene que $P_f(t) = t^4 - 9t^3 + 21t^2 - 9t + 1$, el cual es irreducible en $\mathbb{Z}[t]$, no tiene ceros que sean raíz de la unidad y $P_f(t) \notin \mathbb{Z}[t^r]$ para $r \in \{2, 3, 4, \dots\}$. Luego, como consecuencia del corolario 3.4.8 tenemos que $M_f(S)$ posee una estructura hiperbólica.

3.5. Ejemplo 3 : Picarones :=Handlebodies

Para $g \geq 1$ consideremos la variedad orientable compacta

$$M_g = \underbrace{\overline{D} \times S^1 \# \dots \# \overline{D} \times S^1}_{g \text{ veces}}$$

donde \overline{D} denota el disco unitario cerrado. La variedad M_g es llamada un *handlebody de género g* .

Ejercicio 24. — Verificar que M_g es irreducible y atoroidal y no homeomorfa a la variedad de la proposición 3.2.4 Concluir que el interior de M_g posee una estructura hiperbólica.

Una estructura hiperbólica sobre el interior de M_g corresponde a un grupo discreto $G \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{g \text{ veces}}$. Puede ocurrir que G sea o no sea un grupo Kleiniano, es decir, $\Omega(G)$ puede ser vacío. Respecto a lo anterior, no es claro que todos los grupos discretos isomorfos al grupo fundamental de un handlebody aparezcan como estructura hiperbólica :

Conjetura 3.5.1. — Sea $G \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{g \text{ veces}}$ un grupo discreto. Entonces \mathbb{H}^3/G es homeomorfo al interior del Handlebody M_g .

Respecto a lo anterior, si G es un grupo de Schottky anodado de género g , entonces la conjetura anterior vale.

Ejercicio 25. — Verificar que si G es un grupo de Schottky de género $g \geq 1$, entonces la conjetura es verdad.

3.6. Ejemplo 4 : Grupos CasiFuchsianos

Sea S una superficie orientable cerrada compacta con característica de Euler negativa. Entonces podemos mirar la variedad compacta $M(S) = S \times [0, 1]$ (mirar el ejemplo 2 : Fibrados sobre S^1). Entonces es claro que $M(S)$ es una variedad compacta, irreducible y atoroidal, la cual no puede ser homeomorfa a la variedad de la proposición 9.5. Luego, el interior de $M(S)$ posee una estructura hiperbólica. Por ejemplo, consideremos un grupo fuchsiano F actuando sobre el semiplano de Poincaré \mathbb{H} tal que \mathbb{H}/F uniformiza el interior de S . Entonces \mathbb{H}^3/F es una variedad hiperbólica homeomorfa al interior de $M(S)$. Lo mismo se puede hacer reemplazando F por un grupo casifuchsiano (es decir, un grupo de transformaciones de Möbius que deja invariante una curva de Jordan Γ). El siguiente resultado de B. Maskit [12]

Teorema 3.6.1. — *Si G es un grupo discreto isomorfo al grupo fundamental de una superficie de Riemann de género g tal que $\Omega(G) \neq \emptyset$ (es decir, un grupo Kleiniano) tal que todo elemento de G , diferente de la identidad, es loxodrómico, entonces $\Lambda(G)$ es una curva de Jordan y cada disco acotado por esta curva es invariante por G (es decir, G es casifuchsiano).*

REFERENCIAS

- [1] P. Alestalo and H. Helling, *On torus fibrations over the circle*, SFB-Preprint Ergaenzungsreihe 97-005, Bielefeld, 1997.
- [2] B. Apanasov, *Discrete Groups in Space and Uniformization Problems*, Kluwer Academic Publisher, 1991.
- [3] R. benedetti and C. Petronio, *Lectures on Hyperbolic Geometry*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1992).
- [4] L. Bers, *Automorphic forms for Schottky groups*, Adv. in Math. **16** (1975), 332-361.
- [5] A.J. Casson and S.A. Bleiler, *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, Cambridge University Press, 1988.
- [6] H. Helling and C. Menzel, *Towards an algorithmic construction of the hyperbolic structure on surface bundles*, SFB-Preprint Ergaenzungsreihe 99-074, Bielefeld, 1999.
- [7] R.A. Hidalgo, *The Noded Schottky Space*, London Math. Soc. **73** (1996), 385-403.
- [8] R.A. Hidalgo and B. Maskit, *On Neo-classical Schottky groups*, preprint.
- [9] P. Koebe, *Über die Uniformisierung der Algebraischen Kurven II*, Math. Ann. **69** (1910), 1-81.
- [10] K. Matsuzaki and M. Taniguchi, *Hyperbolic Manifolds and Kleinian Groups*, Oxford Mathematical Monographs, 1998.
- [11] B. Maskit, *Kleinian Groups*, G.M.W. **287**, Springer-Verlag, 1988.
- [12] B. Maskit, *On a class of Kleinian groups*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. **442** (1969), 1-8.
- [13] A. Marden, *Schottky groups and circles*. In Contributions to Analysis, Academic Press, 273-278, 1974.

- [14] J.W. Morgan, *On Thurston's uniformization theorem for three-dimensional manifolds*, The Smith conjecture, edited by H. Bass and J.W. Morgan, Academic Press (1984), 37-125.
- [15] John W. Morgan. Recent progress on the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds. *Bulletin Amer. Math. Soc.* **42** (1) (2005), 57-78.
- [16] J.P. Otal, *Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3*, Astérisque **235**, 1996.
- [17] G. Perelman. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. <http://arxiv.org/abs/math.DG/0211159>, 2002.
- [18] G. Perelman. Ricci flow with surgery on three-manifolds. <http://arxiv.org/abs/math.DG/0303109>, 2003.
- [19] G. Perelman. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds. <http://arxiv.org/abs/math.DG/0307245>, 2003.
- [20] J.G. Ractliffe, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Graduate Texts in Math. **149**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1994).
- [21] W.P. Thurston, *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*, Lecture Notes, Princeton Univ., 1979.
- [22] W.P. Thurston, *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), 357-381.
- [23] F. Waldhausen, *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*, Ann. of Math. **87** (1968), 56-88.
- [24] Hiro-o Yamamoto, *An example of a non-classical Schottky group*, Duke Math. J., **63** (1991), 193-197.

INDICE

- $\widehat{\mathbb{R}}^n$, 1
- atoroidal, 32
- Automorfismo Anticonformal, 4
- Compactificación de Alexandroff, 1
- conjunto límite, 21
- Dilataciones, 4
- Eje de una transformación loxodrómica, 16
- Esfera Isométrica, 8
- espacio hiperbólico, 10
- estabilizador, 21
- Extensión de Poincaré, 7
- Fibrado sobre S^1 , 37
- Generadores Clásicos, 25
- generadores de Schottky, 25, 28
- Generadores Neo-clásicos, 28
- Geodésica, 12
- grupo de isometrías de \mathbb{H}^n , 14
- Grupo de Möbius, 4
- grupo de Schottky, 25
- Grupo de Schottky Anodado, 28
- Grupo de Schottky Clásico, 25
- Grupo de Schottky Neo-clásico, 28
- Grupo discreto, 19
- Grupo Extendido de Möbius, 4
- grupo Kleiniano de segunda clase, 22
- Grupos de Volumen finito, 35
- Handlebody, 45
- Homeomorfismo periódico, 39
- Homeomorfismo pseudo-Anosov, 40
- Homeomorfismo reducible, 40
- Métrica Cordal, 2
- Monodromía de Anosov, 41
- nudo, 36
- Nudo anudado, 36
- Nudo no anudado, 36
- Nudo satelital, 36
- Nudo toroidal, 36
- Orbifold hiperbólica, 35
- Proyección Estereográfica, 1
- Punto de discontinuidad, 21
- punto límite, 21
- Reflexiones, 2
- región de discontinuidad, 21
- Región extendida de discontinuidad, 28
- sistema fundamental de esferas, 25, 28
- Snappea, 37
- Teorema de Retrosección Anodado, 30
- Teorema de Retrosección de Koebe, 26
- Transformación elíptica, 15
- Transformación loxodrómica, 15
- Transformación parabólica, 15
- Transformaciones de Möbius, 4
- Transformaciones Extendidas de Möbius, 4
- Traslaciones, 4
- Variedad Conformal, 24
- Variedad Hiperbólica, 24, 31
- Variedad Irreducible, 31
- Variedad suficientemente grande, 34
- Variedades de Haken, 35
- Variedades primas, 35