



MONOGRAFÍAS MATEMÁTICAS
UFRO

INTRODUCCIÓN
A LAS ESTRUCTURAS DE
SUPERFICIES DE RIEMANN
DISCRETAS

Rubén A. Hidalgo
Mauricio Godoy



Departamento de Matemática y Estadística
Universidad de La Frontera

Rubén A. Hidalgo
Mauricio Godoy

**INTRODUCCIÓN A LAS ESTRUCTURAS
DE SUPERFICIES DE RIEMANN
DISCRETAS**

VERSIÓN PRELIMINAR 2017

Rubén A. Hidalgo

Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de La Frontera, Temuco, Chile.

E-mail : ruben.hidalgo@ufrontera.cl

Url : <http://dme.ufro.cl/rhidalgo>

Mauricio Godoy

Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de La Frontera, Temuco, Chile.

Palabras claves. — Grafos, Grafos métricos, Operador de Laplace, Funciones armónicas, Ecuaciones diferenciales parciales discretas, Homología, Cohomología, Funciones analíticas discretas, Superficies de Riemann discretas, Diferenciales analíticas discretas.

Proyecto FONDECYT 1150003 y ANILLO ACT 1415 PIA-CONICYT.

**INTRODUCCIÓN A LAS ESTRUCTURAS DE SUPERFICIES DE
RIEMANN DISCRETAS**

VERSIÓN PRELIMINAR 2017

Rubén A. Hidalgo, Mauricio Godoy

A Betty, Cata y Buckn

INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de este libro es el estudio de algunas propiedades interesantes sobre grafos con una métrica (o peso) definida sobre sus ejes. Esencialmente, miraremos dos temas que están relacionados, pero que se pueden ver de manera independiente. El primero corresponde a las ecuaciones diferenciales parciales discretas (ecuaciones parciales de diferencia) y el segundo a las estructuras de superficies de Riemann discretas.

Dado un grafo $\mathcal{G} = (V, E)$ conexo de grado finito y una función positiva sobre sus ejes, $d : E \rightarrow (0, +\infty)$, se puede definir el concepto de derivadas direccionales para funciones definidas sobre sus vértices $u : V \rightarrow \mathbb{R}$. En particular, se pueden definir el operador Laplaciano discreto Δ_2 , el concepto de funciones armónicas discretas, y permite estudiar ecuaciones diferenciales parciales sobre grafos. En particular, en estas notas estudiaremos con cierto detalle ecuaciones del tipo $\Delta_2 \mu = f(\mu)$, donde $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones reales. Estudiaremos condiciones, similares al caso clásico, sobre la función f que permitan asegurar la existencia de soluciones no triviales. Para esto, nos basaremos en el artículo [24] de John M. Neuberger, donde sólo se considera el caso de métrica constante $d = 1$, para modificar adecuadamente las técnicas y así obtener los mismos resultados para cualquier elección de d . Estas ideas pueden ser de gran utilidad en la aproximación de soluciones de tales ecuaciones en variedades Riemannianas.

Cuando el grafo está representado sobre una superficie orientada como mapa, es decir, el complemento son superficies simplemente conexas, se puede definir el grafo dual. Usando esto, en el año 2001, Christian Mercat introdujo una teoría de superficies de Riemann discretas, la cual generaliza una noción de funciones analíticas discretas introducida por Jacqueline Lelong-Ferrand en 1955. Esta teoría fué originalmente diseñada para estudios en mecánica estadística (modelo de Ising), aunque para entenderla no es necesario tener conocimientos previous en tal área.

Areas de aplicación de lo anterior son, por ejemplo, redes eléctricas, teoría de elasticidad, termodinámica e hidrodinámica. También, esta teoría puede ser utilizada para aproximar la teoría clásica de ecuaciones diferenciales parciales y superficies de Riemann bajo ciertas condiciones desarrolladas por Mercat : *criticalidad*. En el caso de superficies de Riemann discretas, esta teoría también tiene aplicaciones en correspondencia geométrica

y clasificación superficial en el área de gráfica computacional (por ejemplo, en el área de medicina para escaneo) [14].

En el Capítulo 1 se recuerdan algunos hechos básicos de la teoría de grafos que serán necesarias en lo que sigue. Este capítulo no pretende recordar todos los hechos en la teoría de grafos, sólo aquellos que serán necesarios.

En el Capítulo 2 se da la definición de derivadas parciales sobre grafos con métricas discretas. En particular, se define el operador discreto de Laplace Δ_2 y el concepto de funciones armónicas. Se presentan los problemas de Dirichlet y Neumann discretos. Artículos relacionados a funciones armónicas discretas en grafos métricos son, por ejemplo, [2, 3, 6, 8, 10]

En el Capítulo 3 se estudia la existencia de soluciones para cierta clase de ecuaciones diferenciales parciales discretas y se analizan algunas ecuaciones clásicas desde este punto de vista.

En los Capítulos 6 y 7 se definen los grupos de homología y cohomología discreta de grafos y mapas.

Los capítulos siguientes corresponden al concepto de superficies de Riemann discretas introducidos por Christian Mercat.

En el Capítulo 9 se define el concepto de superficie de Riemann discreta y la ecuación de Cauchy-Riemann discreta. Esto permite la definición de funciones analíticas y anti-analíticas discretas. Se obtiene la versión discreta del Teorema de Cauchy.

En el Capítulo 12 se estudia el caso de la estructura de Riemann discreta definida por el reticulado canónico del plano, originalmente estudiado por Jaquelin Lelong-Ferrand en 1955. En particular se obtiene la versión discreta del Teorema de Morera.

En el Capítulo 13 se definen las diferenciales analíticas y anti-analíticas discretas.

El Capítulo 14 presenta el Teorema de la descomposición de Hodge y se calcula la dimensión de las diferenciales analíticas discretas cuando la estructura de superficie de Riemann discreta está modelada sobre una superficie cerrada.

En el Capítulo 15 se calcula la dimensión del espacio de diferenciales analíticas discretas sobre una superficie de Riemann discreta de género g , siendo esta dimensión igual a $2g$.

En el Capítulo 16 se definen las matrices de Riemann discretas de superficies de Riemann discretas de género g . Aparecen 3 tipos de matrices, cada una de ellas simétrica con parte imaginaria positiva definida, una de ellas de tamaño $2g$ y dos de tamaño g .

Esta es una primera edición y aún quedan muchos detalles a mejorar, completar y, lo más probable, muchos errores a corregir. Espero que estas sean de interés a estudiantes de pregrado para poder aprender y quizás obtener algunos resultados que generalicen y/o den un mejor entendimiento a los tópicos aquí mencionados. Es importante notar que gran parte de la sección correspondiente a superficies de Riemann discretas están basadas

tanto en la tesis de doctorado de Christian Mercat como de algunos de sus artículos sobre matrices de periodos.

Queremos, finalmente, dar nuestros agradecimientos a Sasha Mednykh y Elías Tuma por sus comentarios, sugerencias e ideas inspiradoras durante algunas discusiones en partes de estas notas, sin las cuales estas probablemente no serían una realidad.

Temuco, Chile 2017

Rubén A. Hidalgo
Mauricio Godoy M.

TABLA DE MATERIAS

Introducción	ix
Parte I. Grafos	1
1. Grafos	3
1.1. Grafos.....	3
1.2. Subgrafos.....	4
1.3. Caminos en grafos.....	4
1.4. Grafos conexos.....	5
1.5. Grado de un vértice.....	6
1.6. Grafos isomorfos y automorfismos.....	7
1.7. Matrices de adyacencia y valencia.....	8
1.8. Representación de grafos.....	9
1.9. Mapas y sus automorfismos.....	10
1.10. Teorema de Kuratowski.....	11
1.11. Grafos dirigidos.....	12
1.12. Grafos Eulerianos.....	15
1.13. Grafos Hamiltonianos.....	19
1.14. Coloración de grafos.....	21
1.15. Grafos bipartitos.....	23
1.16. Funciones.....	24
1.17. Derivación en grafos.....	25
1.18. Campo de vectores.....	25
2. Grafos Métricos	27
2.1. Métricas discretas.....	27
2.2. Grafos métricos isomorfos y automorfismos.....	28
2.3. Matriz de adyacencia métrica y de valencia métrica.....	28
2.4. Derivadas direccionales de funciones.....	28
2.5. Campos de vectores y derivación en grafos.....	29
2.6. Operador discreto de Laplace Δ_2	29
2.7. Funciones armónicas discretas.....	30

2.8. Derivaciones inducidas por campos de vectores.....	32
2.9. Principio del máximo y mínimo.....	33
2.10. Los problemas discretos de Dirichlet y Neumann.....	37
Parte II. Ecuaciones parciales en diferencias sobre grafos.....	43
3. Ecuaciones parciales en diferencias.....	45
3.1. Ecuaciones del tipo $D(\mu) = f(\mu)$	45
3.2. Ecuaciones del tipo $D(\mu) = F(v, \mu)$	56
3.3. Caso de grafos infinitos.....	57
3.4. Soluciones positivas.....	60
4. Ejemplos.....	61
4.1. Ecuaciones discretas tipo Matukuma.....	61
4.2. Ecuación discreta de ondas.....	62
4.3. Ecuación discreta del calor.....	62
4.4. Otra ecuación.....	63
4.5. La ecuación de Helmholtz en grafos.....	64
4.6. La ecuación de Navier-Stokes en grafos.....	67
5. Aplicaciones Numéricas.....	71
5.1. Un ejemplo 1-dimensional.....	71
5.2. Grafos planares adecuados.....	74
5.3. Un ejemplo 2-dimensional.....	75
5.4. Caso de anillos.....	79
5.5. Dominios no acotados.....	81
Parte III. Homología y Cohomología en Grafos y Mapas.....	85
6. Homología y Cohomología en grafos.....	87
6.1. Cadenas singulares en grafos.....	87
6.2. Homología de grafos.....	88
6.3. Co-cadenas singulares en grafos.....	88
6.4. Operador de Derivación.....	89
6.5. Cohomología de grafos.....	89
6.6. Integración en grafos.....	89
7. Homología y Cohomología en mapas.....	91
7.1. Cadenas singulares en mapas.....	91
7.2. Operadores frontera.....	92
7.3. Primer grupo de Homología.....	93
7.4. Co-cadenas singulares en mapas.....	93
7.5. Dualidades.....	94
7.6. Operadores cofrontera.....	94
7.7. Primer grupo de Cohomología.....	95
Parte IV. Estructuras de superficies de Riemann discretas.....	97
8. Algunas descomposiciones celulares importantes.....	99

8.1. Descomposición celular	99
8.2. Descomposición celular dual	99
8.3. El doble celular	101
8.4. El celular diamante	101
9. Superficies de Riemann Discretas	103
9.1. Superficies de Riemann discretas	103
9.2. Estructuras inducidas por métricas discretas	104
9.3. Estructuras conformemente equivalentes	105
10. Espacios de Moduli	107
10.1. Espacio de Teichmüller	107
10.2. Grupo modular	107
10.3. Espacio de Móduli	109
10.4. Automorfismos conformes y anticonformes	109
11. Funciones Analíticas Discretas	113
11.1. Ecuación de Cauchy-Riemann discreta	113
11.2. Funciones analíticas y anti-analíticas discretas	115
11.3. Teorema de Cauchy discreto	116
11.4. Harmónicas conjugadas	116
11.5. Descomposición	117
11.6. Funciones analíticas discretas entre superficies de Riemann discretas	118
12. Estructuras discretas en el plano definidos por un reticulado	121
12.1. Funciones Constantes	121
12.2. Polinomios	121
12.3. Descomposición	123
12.4. Teorema de Morera discreto	124
13. Diferenciales en superficies de Riemann discretas	127
13.1. Homología para superficies de Riemann discretas	127
13.2. Cohomología para superficies de Riemann discretas	131
13.3. La función \star de Hodge	132
13.4. Diferenciales analíticas y anti-analíticas discretas	134
13.5. Diferenciales meromorfas discretas	135
13.6. El operador discreto de Laplace revisitado	136
13.7. Funciones harmónicas revisitadas	136
13.8. Formas harmónicas	137
Parte V. Superficies de Riemann Discretas Compactas	139
14. El teorema de descomposición de Hodge	141
14.1. Operador adjunto de d	141
14.2. Descomposición de Hodge	143
14.3. Descomposición de Hodge para el caso $k = 1$	145
15. Cálculo de $\dim_{\mathbb{C}} H^{1,0}(\Lambda) = 2g$	147
15.1. Existencia de diferenciales meromorfas	147

15.2. Existencia de diferenciales analíticas.....	153
15.3. $\dim_{\mathbb{C}} H^{1,0}(\Lambda) = 2g$	156
16. Matrices de Riemann discretas.....	161
16.1. Forma Hermitiana.....	161
16.2. Número de intersección discreto.....	164
16.3. Bases canónicas de homología.....	165
16.4. Relaciones bilineales.....	166
16.5. Matrices de Riemann.....	167
16.6. La variedad Jacobiana.....	171
16.7. Ejemplos en género 1.....	172
16.8. Matrices de Riemann discretas y automorfismos.....	181
16.9. Problemas de Torelli y Schottky.....	183
17. Estructuras Clásicas versus estructuras discretas.....	185
17.1. Superficies simpliciales en \mathbb{R}^3	185
17.2. Estructuras de superficies de Riemann en superficies simpliciales.....	185
17.3. Funciones armónicas.....	188
17.4. Funciones PL-armónicas.....	189
17.5. Una estructura discreta asociada.....	190
17.6. Caso Σ homeomorfo a un disco cerrado.....	190
Referencias.....	191
Índice.....	193

PARTE I

GRAFOS

CAPÍTULO 1

GRAFOS

En este capítulo recordaremos algunas definiciones básicas que usaremos en el resto de estas notas, como es la noción de un grafo. En general, nos preocuparemos de grafos conexos y cuyos vértices tienen grado finito. El primer artículo sobre teoría de grafos fue escrito por L. Euler en 1736, donde estudió y solucionó el problema de los puentes de Königsberg. El primer texto sobre grafos data de 1936 por D. König.

1.1. Grafos

Un *grafo* es un triple $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$, donde $V \neq \emptyset$ (cuyos elementos son llamados los *vértices* del grafo), E es un conjunto, que puede ser vacío (cuyos elementos son llamados los *ejes* del grafo) y $\iota : E \rightarrow 2^V$ es una función tal que $\iota(e)$ tiene cardinalidad 1 o 2, llamada la *función de incidencia* del grafo.

Aquellos ejes $e \in E$ tales que $\iota(e)$ tiene cardinalidad 1 son llamados *bucles* del grafo. Si no hay bucles y la función de incidencia ι es inyectiva, entonces hablamos de un *grafo simple*. Cuando ι no es inyectiva o bien hay bucles, también decimos que el grafo es un *multigrafo*.

Dos vértices $v_1, v_2 \in V$ se llaman *vértices vecinos* si existe un eje $e \in E$ tal que $\iota(e) = \{v_1, v_2\}$. Si $v \in V$ es tal que $v \in \iota(e)$ para algún $e \in E$, entonces decimos que v y e son *incidentes*.

El grafo $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ se dice que es un *grafo finito* si las cardinalidades de V y E son ambas finitas.

Observación 1.1.1. — Si tenemos un grafo simple $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$, entonces no hay problemas en identificar cada eje $e \in E$ con el conjunto $\iota(e) = \{v_1, v_2\}$; esto debido a que no hay dos ejes diferentes con la misma imagen bajo la función de incidencia ι . Lo anterior también vale si sabemos que en cada vértice hay a lo más un bucle incidente.

Ejemplo 1. — El grafo $K_{n,m}$ es definido como aquel que tiene como conjunto de vértices a

$$V = \{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$$

ejes a

$$E = \{e_{i,j} : i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}\}$$

y la función de incidencia es definida por $\iota(e_{i,j}) = \{v_i, w_j\}$.

El grafo $\widetilde{K}_{n,m}$ es aquel que se obtiene de $K_{n,m}$ agregando un bucle en cada vértice.

Ejemplo 2. — El grafo K_n es definido como aquel que tiene como conjunto de vértices a

$$V = \{v_1, \dots, v_n\}$$

ejes a

$$E = \{e_{i,j} : i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j\}$$

y la función de incidencia ι es definida por $\iota(e_{i,j}) = \{v_i, v_j\}$.

El grafo \widetilde{K}_n es aquel que se obtiene de K_n agregando un bucle en cada vértice.

1.2. Subgrafos

Un subgrafo de $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ es un grafo de la forma $\mathcal{H} = (V_H, E_H, \iota_H)$ donde $V_H \subset V$, $E_H \subset E$ y ι_H es la restricción de ι sobre E_H .

Ejercicio 1. — Sea $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ un grafo finito de manera que para todo par $\{v_1, v_2\}$, donde $v_1, v_2 \in V$, se tiene que $\iota^{-1}(\{v_1, v_2\})$ o es vacío o de cardinalidad 1. Ver que \mathcal{G} es un subgrafo de algún \widetilde{K}_n . Si además \mathcal{G} no tiene bucles, entonces ver que es subgrafo de algún K_n .

1.3. Caminos en grafos

Consideremos un grafo $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$.

1.3.1. Caminos. — Un camino en \mathcal{G} que conecta los vértices $u, v \in V$ es una tupla finita de ejes

$$\gamma = (e_1, \dots, e_r), \quad e_1, \dots, e_r \in E$$

tal que

$$\iota(e_1) = \{u, w_2\}, \quad \iota(e_2) = \{w_2, w_3\}, \dots, \iota(e_{r-1}) = \{w_{r-1}, w_r\}, \quad \iota(e_r) = \{w_r, v\}.$$

Al camino anterior también lo denotaremos por el símbolo (si no se presta a confusión)

$$\gamma = \{u, w_2\} \cup \{w_2, w_3\} \cup \dots \cup \{w_{r-1}, w_r\} \cup \{w_r, v\}$$

1.3.2. Longitud de caminos. — La longitud del camino $\gamma = (e_1, \dots, e_r)$ es definido por $l(\gamma) = r$, es decir, por el número de ejes utilizados, contados con repeticiones.

1.3.3. Caminos cerrados. — Si en la definición anterior de caminos tenemos que $u = v$, entonces decimos que el camino γ es *cerrado*.

1.3.4. Caminos simples. — El camino $\gamma = (e_1, \dots, e_r)$ es llamado *simple* si no hay ejes repetidos y no tiene tres de sus ejes incidentes a un mismo vértice, es decir, cada uno de los vértices en el camino es incidente a sólo dos ejes del camino.

1.3.5. Ciclos. — Un *ciclo* es un camino cerrado y simple.

1.3.6. Circuitos. — Un *circuito* es un camino cerrado que no repite ejes (puede repetir vértices).

1.3.7. Caminos Hamiltonianos. — Un *camino Hamiltoniano* es un camino simple que contiene a todos los vértices del grafo.

1.3.8. Ciclos Hamiltonianos. — Un *ciclo Hamiltoniano* es un ciclo que contiene a todos los vértices del grafo.

1.3.9. Caminos Eulerianos. — Un *camino Euleriano* es un camino que contiene a todos los ejes una sólo vez (pero no tiene por que volver al vértice inicial).

1.3.10. Ciclos Eulerianos. — Un circuito es llamado *Euleriano* si este contiene a todos los ejes.

1.3.11. Árboles. — Un grafo es llamado un *árbol* si no tiene ciclos.

1.4. Grafos conexos

Un grafo $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ se dice *conexo* si dado cualquier par de vértices $u, v \in V$ existe un camino que los conecta.

Ejercicio 2. — Ver que en todo grafo conexo se puede definir una métrica sobre el conjunto de vértices usando el mínimo de las longitudes de los caminos que conectan el mismo par de vértices.

Ejercicio 3. —

- 1.- Verificar que un grafo finito es conexo si y sólo si existe un árbol conexo como subgrafo que contenga todos los vértices del grafo.
- 2.- Una manera simple de construir un árbol como subgrafo es como sigue. Tomamos uno de los vértices del grafo, digamos v_1 . Luego consideramos un vértice vecino v_2 (diferente de v_1) y marcamos un eje $e_1 \in E$ con $\iota(e_1) = \{v_1, v_2\}$ como eje usado. A continuación escogemos un vértice v_3 vecino de v_2 y diferente de v_1 y v_2 . Consideramos un eje $e_2 \in E$ con $\iota(e_2) = \{v_2, v_3\}$ y lo marcamos como eje usado. A continuación escogemos un vértice v_4 vecino de v_3 y diferente de v_1, v_2 y v_3 . Consideramos un eje $e_3 \in E$ con $\iota(e_3) = \{v_3, v_4\}$. Si este eje junto a

los ejes usados permite generar un ciclo, entonces buscamos otro vértice vecino de v_3 y volvemos a hacernos la pregunta anterior. Si no es posible generar un ciclo, entonces marcamos el eje e_3 como eje usado. Ahora procedemos de manera inductiva. Como la cantidad de vértices es finita, este proceso termina después de un número finito de pasos y al final hemos obtenido un árbol conexo (como subgrafo) que es maximal en el sentido que no es un subgrafo de otro árbol conexo. Si tal árbol contiene a todos los vértices del grafo, entonces obtenemos que el grafo original es conexo. El algoritmo descrito es llamado búsqueda por un paso (en inglés *depth-first search*).

1.5. Grado de un vértice

Sea $v \in V$ y denotemos por $N(v) \subset V$ al conjunto de los vértices vecinos de v . Es importante notar que $v \in N(v)$ (es decir, que v es vecino de si mismo) sí y sólo si existe un bucle adyacente a v .

El *grado* de v , denotado por $\text{grad}(v)$, es la suma del número de ejes incidentes a v que no son bucles más dos veces el número de bucles incidentes a v .

Un grafo se dirá de *grado finito* si cada uno de sus vértices tiene grado finito.

Ejercicio 4. — Sea $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ un grafo finito. Verificar la igualdad

$$\sum_{v \in V} \text{grad}(v) = 2|E|$$

y concluir que la cantidad de vértices con grado impar debe ser par. (Ind. Observar que todo eje que no es un bucle determina dos vértices diferentes que son incidentes y que cada bucle adiciona 2 al grado del vértice incidente.)

Un grafo simple (es decir, sin bucles y ι una función inyectiva) es llamado un *grafo regular* si cada uno de sus vértices tiene el mismo grado; si tal grado es d , entonces decimos que es un *grafo d -regular*.

Ejercicio 5. —

1. Verificar que los grafos completos K_n son grafos $(n - 1)$ -regulares, pero que hay grafos $(n - 1)$ -regulares que no son K_n .
2. ¿Bajo qué condición el grafo $K_{n,m}$ es regular?
3. Sea $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ un grafo finito y d -regular. Verificar que

$$d|V| = 2|E|$$

1.6. Grafos isomorfos y automorfismos

Dos grafos, digamos $\mathcal{G}_j = (V_j, E_j, \iota_j)$, donde $j = 1, 2$, son llamados *isomorfos* si existen funciones biyectivas $h_V : V_1 \rightarrow V_2$ y $h_E : E_1 \rightarrow E_2$, de manera que respeten las incidencias, es decir, si $e \in E_1$ y tenemos que $\iota_1(e) = \{v_1, v_2\}$, entonces

$$\iota_2(h_E(e)) = \{h_V(v_1), h_V(v_2)\}.$$

Diremos que $h = (h_V, h_E)$ es un *isomorfismo* entre los grafos y generalmente uno habla de un isomorfismo $h : \mathcal{G}_1 = (V_1, E_1, \iota_1) \rightarrow \mathcal{G}_2 = (V_2, E_2, \iota_2)$.

Un *automorfismo* del grafo $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ es un isomorfismo de \mathcal{G} consigo mismo.

Ejercicio 6. —

1. Considere un isomorfismo

$$h = (h_V, h_E) : \mathcal{G}_1 = (V_1, E_1, \iota_1) \rightarrow \mathcal{G}_2 = (V_2, E_2, \iota_2).$$

Verificar que, para cada $v \in V_1$, $h_V(v)$ y v tienen los mismos grados y cantidad de bucles.

2. Calcular el grupo de automorfismos del grafo K_n . Concluir que todo grupo finito es subgrupo del grupo de automorfismos de algún grafo finito.
3. Calcular el grupo de automorfismos del grafo $K_{n,m}$.
4. Construir un grafo cuyo grupo total de automorfismos es isomorfo a uno de los siguientes grupos : (i) \mathbb{Z}_n , (ii) D_n , A_4 , (iii) A_5 y S_4 .
5. Describir, módulo isomorfismos, todos los grafos finitos y conexos con a lo más 5 vértices y cuya función de incidencia es inyectiva. Determinar cuales de ellos son grafos simples.
6. Sean $n, k > 0$ enteros. Determinar el grupo de automorfismos del grafo $\mathcal{H}_{k,n} = (V, E, \iota)$, donde

$$V = \{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n\},$$

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \dots, \{v_n, v_1\}, \{v_1, w_1\}, \dots, \{v_n, w_n\}, \{w_1, w_{k+1}\}, \{w_2, w_{k+2}\}, \dots, \{w_{n-k}, w_n\}, \dots\}$$

y la función de incidencia es la función identidad.

7. Si \mathcal{G} y \mathcal{H} son grafos isomorfos y \mathcal{G} es un grafo d -regular, entonces \mathcal{H} es también un grafo d -regular.
8. Si n es impar, ver que todos los subgrafos $(n-2)$ -regulares de K_n son isomorfos a K_{n-1} .
9. Encontrar un subgrafo 2-regular de K_4 que no es isomorfo a K_3 .

1.7. Matrices de adyacencia y valencia

Consideremos un grafo finito $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ y supongamos que

$$V = \{v_1, \dots, v_m\}$$

Sea

$$a_{ij} = \text{número de ejes } e \in E \text{ tales que } \iota(e) = \{v_i, v_j\}$$

Observemos que a_{ii} es el número de bucles incidentes al vértice v_i .

La matriz cuadrada

$$A = [a_{ij}]_{m \times m}$$

es llamada la *matriz de adyacencia* del grafo \mathcal{G} .

Si definimos

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sum_{k=1}^m a_{ik}, & i = j \end{cases}$$

entonces la matriz cuadrada

$$B = [b_{ij}]_{m \times m}$$

es llamada la *matriz de valencia* del grafo \mathcal{G} .

Teorema 1.7.1. — Sea $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ un grafo finito y denotemos $V = \{v_1, \dots, v_m\}$. Consideremos la matriz A de adyacencia del grafo asociado a tal enumeración de sus vértices. Entonces el coeficiente (i, j) de la matriz A^k ($k \in \{1, 2, 3, \dots\}$) es exactamente el número de caminos de longitud k que conectan v_i con v_j .

Demonstración. — Observe que para $k = 1$ esto sale de la definición de matriz de adyacencia. Procedamos por inducción en k . Supongamos que el resultado vale para A^{k-1} . Como $A^k = A^{k-1}A$, tenemos que el coeficiente (i, j) de A^k es igual a

$$\sum_{k=1}^m b_{ik} a_{kj}$$

donde b_{ij} es el coeficiente (i, j) de A^{k-1} y a_{ij} es el coeficiente (i, j) de A . Ahora, el término $b_{ik} a_{kj}$ es igual a 0 si no hay eje conectando a v_k con v_j y es igual a b_{ik} en caso contrario. Por otro lado, si tenemos un camino de longitud $(k-1)$ conectando v_i con v_k y un eje $\{v_k, v_j\} \in E$, entonces tenemos un camino desde v_i a v_j cuya longitud es k . De esta manera la cantidad de caminos de longitud k que conectan v_i con v_j de manera que contienen un camino de longitud $(k-1)$ conectando v_i con v_k es igual a $b_{ik} a_{kj}$. Como todo camino de longitud k que conecta v_i con v_j puede mirarse como la unión de un camino que conecta v_i con un vecino de v_j (diferente de v_j), lo anterior nos da el resultado deseado. □

Ejercicio 7. — Consideremos un grafo finito $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$, donde $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Sea A la matriz de adyacencia del grafo asociada a tal enumeración de los vértices y B la matriz de valencia asociada.

1. Si el grafo es simple, entonces verificar que el término (i, i) de A^2 es el grado del vértice v_i . ¿Qué pasa si el grafo contiene bucles? (Considere el grafo formado de un vértice y un bucle).
2. Verificar que la matriz de adyacencia determina el grafo módulo isomorfismo.
3. Sea $\tau \in \mathfrak{S}_n$ una permutación del conjunto $\{1, \dots, n\}$. Ver que la matriz de adyacencia A' asociada al ordenamiento $V = \{v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(n)}\}$ se obtiene de la matriz de adyacencia A al conjugarla por una matriz de permutación asociada a la acción de τ .
4. Ver que la matriz de adyacencia de un grafo finito conexo no puede escribirse en una forma $\text{diag}(A_1, \dots, A_r)$, con $r \geq 2$, en ningún ordenamiento de sus vértices, donde cada A_j es cuadrada de tamaño al menos 1.
5. Ver que si el grafo tiene exactamente r componentes conexas, entonces existe un ordenamiento de sus vértices de manera que la matriz de adyacencia correspondiente tiene la forma $\text{diag}(A_1, \dots, A_r)$.
6. Ver que 0 es valor propio de la matriz $J_2 = B - A$. Ver que la dimensión del espacio propio asociado al valor propio 0 es igual al número de componentes conexas del grafo.

1.8. Representación de grafos

Sea $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ un grafo y (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Una *representación* del grafo \mathcal{G} en (X, \mathcal{T}) consiste de

- un conjunto $W \subset X$;
- una función biyectiva $h : V \rightarrow W$;
- para cada eje $e \in E$ con $\iota(e) = \{v_1, v_2\}$ de una función continua $\alpha_e : [0, 1] \rightarrow X$, tal que $\alpha_e(0) = h(v_1)$, $\alpha_e(1) = h(v_2)$, $\alpha_e : (0, 1) \rightarrow X$ inyectiva, $\alpha_e((0, 1)) \cap W = \emptyset$; y
- si $e_1, e_2 \in E$ y $e_1 \neq e_2$, entonces $\alpha_{e_1}((0, 1)) \cap \alpha_{e_2}((0, 1)) = \emptyset$.

Ejercicio 8. — Dada una representación del grafo \mathcal{G} , uno puede construir el grafo cuyos vértices es dado por W y cuyos ejes es dado por los arcos $\alpha_e([0, 1])$, donde $e \in E$. Verificar que estos dos grafos son isomorfos.

Teorema 1.8.1. — Todo grafo, con una cantidad numerable de vértices y cantidad numerable de ejes puede ser representado en \mathbb{R}^3 .

Demonstración. — Ya que todo grafo finito se puede ver como un subgrafo de un grafo con una cantidad infinita numerable de vértices, basta con verificar para un grafo con una

cantidad infinita numerable de vértices. Más aún, podemos asumir que en tal grafo todo par de vértices esta conectado por un eje y que en cada vértice hay una cantidad numerable infinita de bucles ya que todo grafo a considerar es un subgrafo de este. Consideremos los subconjuntos siguientes de \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} H &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\} \\ H^+ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, z \geq 0\} \\ H^- &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, z \leq 0\} \end{aligned}$$

Sea $W = \{(n, 0, 0) : n = 1, 2, \dots\}$. Por cada par de elementos $w_1, w_2 \in W, w_1 \neq w_2$, podemos considerar el arco de círculo $C_{w_1, w_2} \subset H^+$ que es ortogonal al borde de H^+ just en esos dos puntos. Por cada elemento $w \in W$ podemos considerar una colección infinita numerable de círculos diferentes en H^- , todos tangente al borde de H^- en el punto w y de diámetros menor que $1/4$. Ahora, dos arcos de círculo C_{w_1, w_2} y C_{w_3, w_4} sólo se cortan en a lo más un punto y, en caso de haber intersección no vacía, no hay otro arco que pasa por ese punto. Podemos modificar uno de esos dos arcos en el espacio \mathbb{R}^3 en una pequeña vecindad del punto de intersección (la cual no contiene otros puntos de intersección) para evitar tener tal intersección. \square

1.9. Mapas y sus automorfismos

Sea Σ una superficie orientada, la cual puede o no ser compacta. Consideremos una representación de un grafo conexo Γ en la superficie Σ (cuyo grafo imagen seguirá siendo denotado por Γ) tal que valen las siguientes propiedades :

- $\Gamma \subset \Sigma$ es localmente finito, es decir, cada compacto $K \subset \Sigma$ corta sólo a un número finito de ejes y contiene sólo un número finito de vértices (en particular, el grafo es de grado finito);
- toda componente conexa de $\Sigma - \Gamma$ es simplemente conexa y su borde consiste de un número finito ejes del grafo $\Gamma \subset \Sigma$ (es decir, cada componente conexa de $\Sigma - \Gamma$ es un polígono con un número finito de lados).

Diremos que el grafo $\Gamma \subset \Sigma$ es un *mapa* en Σ .

Ejemplo 3. — Consideremos $\Sigma = \mathbb{R}^2$ y Γ el grafo cuyos vértices son aquellos puntos de la forma (a, b) , con $a, b \in \mathbb{Z}$, y cuyos ejes son los arcos de recta verticales y horizontales que conectan vértices consecutivos. En este caso, cada componente de $\Sigma - \Gamma$ es un cuadrado y, en particular, el grafo Γ es un mapa de \mathbb{R}^2 .

Ejercicio 9. — Construya otros mapas para \mathbb{R}^2 y otras superficies orientadas. Construya mapas donde cada componente conexa de $\Sigma - \Gamma$ es un polígono consistiendo de d lados, con $d \in \{3, 4, 5, \dots\}$.

Sea Γ un mapa sobre la superficie orientada Σ . Un *automorfismo del mapa* Γ es un automorfismo del grafo Γ el cual es la restricción de un homeomorfismo de Σ . Diremos

que tal automorfismo del mapa preserva la orientación si el homeomorfismo preserva la orientación de Σ ; en caso contrario, diremos que revierte orientación.

Ejercicio 10. — Sea Γ un mapa sobre la superficie orientada Σ y σ un automorfismo de tal mapa. Sean $f, g : \Sigma \rightarrow \Sigma$ homeomorfismos que definen σ . Verificar que f y g son homotópicos, en particular, ambos preservan la orientación o ambos la revierten. Verificar que el grupo de automorfismos del mapa es un subgrupo del grupo de automorfismos del grafo asociado.

Ejercicio 11. — Calcular el grupo de automorfismo del mapa del Ejemplo 3. Dar un ejemplo de un mapa donde el grupo de automorfismos del grafo Γ es diferente al grupo de automorfismos del mapa asociado.

Observación 1.9.1. — Consideremos un mapa en una superficie. En general el grupo de automorfismos del mapa asociado es un subgrupo propio del grupo de automorfismos del grafo asociado. En [18] se dan condiciones bajo las cuales todo automorfismo del grafo es un automorfismo del mapa.

1.10. Teorema de Kuratowski

El Teorema 1.8.1 nos dice que podemos representar todo grafo finito en \mathbb{R}^3 . La pregunta natural es si podemos representar grafos en el plano \mathbb{R}^2 , es decir, considerarlos como mapas en la esfera dos-dimensional.

Ejercicio 12. — Suponga que hay 3 casas, digamos C_1, C_2, C_3 , y hay 3 fábricas, digamos F_1, F_2, F_3 , que producen bienes necesarios para cada una de esas casas. Describa el grafo cuyos vértices son las casas y las fábricas y cuyos ejes conectan cada fábrica con cada casa. Verifique que tal grafo es isomorfo a $K_{3,3}$. ¿Puede dibujar tal grafo en el plano de manera que los ejes no se corten?

El Teorema de Kuratowski nos da condiciones necesarias y suficientes para poder representar grafos en el plano, es decir, como mapas en la esfera.

1.10.1. Subdivisión de grafos. — Consideremos un grafo $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$, un eje $e_0 \in E$ con $\iota(e_0) = \{v, w\}$.

Sean $e_1, e_2 \notin E, u \notin V, E^* = E - \{e_0\} \cup \{e_1, e_2\}, V^* = V \cup \{u\}$ y $\iota^* : E^* \rightarrow 2^{V^*}$ definida por $\iota^*(e) = \iota(e)$ para cada $e \in E - \{e_0\}, \iota^*(e_1) = \{v, u\}, \iota^*(e_2) = \{u, w\}$.

El nuevo grafo construido $\mathcal{G}^* = (V^*, E^*, \iota^*)$ es llamado una *subdivisión simple* de $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$.

Una *subdivisión de un grafo* es el grafo obtenido después de realizar un número finito (quizás vacío) de subdivisiones simples sucesivas.

Teorema 1.10.1 (Teorema de Kuratowski). — *Un grafo finito \mathcal{G} se puede representar en \mathbb{R}^2 si y sólo si no contiene ningún subgrafo que sea isomorfo a una subdivisión de K_5 o $K_{3,3}$.*

Ejercicio 13. — *Verificar que un grafo se puede representar en \mathbb{R}^2 si y sólo si se puede representar en la esfera S^2 .*

Ejercicio 14. — *Sea $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ un grafo finito, conexo representado en \mathbb{R}^2 . Una región del grafo es una componente conexa que se obtienen al quitar la representación del grafo de \mathbb{R}^2 . Sea F el conjunto de las regiones del grafo. Verificar la fórmula de Euler*

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

Ejercicio 15. — *Sea $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ un grafo finito, conexo representado en una superficie Σ cerrada y orientada de género g . Supongamos además que cada una de las regiones (componente conexa que se obtienen al quitar la representación del grafo de Σ) es simplemente conexa (decimos que esta representación es un mapa en Σ). Sea F el conjunto de las regiones del grafo. Verificar la fórmula de Euler*

$$|V| - |E| + |F| = 2 - 2g$$

1.11. Grafos dirigidos

Un *grafo dirigido* es un grafo $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ sobre el cual dotamos de una dirección a cada uno de sus ejes (también decimos que hemos escogido una orientación en cada eje). La dirección en el eje $e \in E$ selecciona a uno de los vértices incidentes como vértice de partida y al otro como vértice de llegada. Así, podemos pensar que un grafo dirigido es un triple $\mathcal{G} = (V, E, \iota : E \rightarrow V \times V)$. Para $e \in E$, si $\iota(e) = (v_1, v_2)$, entonces decimos que v_1 es el vértice de partida y v_2 el de llegada.

Ejemplo 4 (Redes de transporte). — *Supongamos que tenemos una colección de paradas de buses. Podemos considerar un grafo dirigido como sigue. Los vértices son las paradas y dos paradas, digamos v_1 y v_2 , son unidas por un eje dirigido desde v_1 a v_2 si existe un bus que parte desde la parada v_1 y su siguiente parada es v_2 . Un problema interesante a estudiar es si existe una manera de pasar por todas la paradas una sola vez y volver a la parada de partida. Este tipo de problemas lo veremos más adelante cuando estudiemos grafos Hamiltonianos.*

Ejemplo 5. — Otro ejemplo de grafos dirigidos es en el estudio de comunicaciones. Los vértices pueden ser considerados como estaciones de comunicación y dos estaciones, digamos v_1 y v_2 , son unidas por un eje dirigido desde v_1 a v_2 si la estación v_1 puede enviar un mensaje a la estación v_2 .

1.11.1. Matriz de adyacencia para grafos dirigidos. — Consideremos un grafo finito y dirigido $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ y supongamos que

$$V = \{v_1, \dots, v_m\}$$

Sea

$$a_{ij} = \text{número de ejes } e \in E \text{ con } \iota(e) = (v_i, v_j).$$

La matriz cuadrada

$$A = [a_{ij}]_{m \times m}$$

es llamada la *matriz de adyacencia* del grafo dirigido \mathcal{G} .

Teorema 1.11.1. — Sea $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ un grafo dirigido finito y denotemos $V = \{v_1, \dots, v_m\}$. Consideremos la matriz A de adyacencia del grafo dirigido asociado a tal enumeración de sus vértices. Entonces el coeficiente (i, j) de la matriz A^k ($k \in \{1, 2, 3, \dots\}$) es exactamente el número de caminos dirigidos de longitud k que conectan v_i con v_j .

Demonstración. — La demostración es similar a la del Teorema 1.7.1. □

Ejemplo 6 (Autómatas finitos). — Un autómata finito es una 5-tupla

$$M = (Q, S, \rho, q, F),$$

donde

1. Q es un conjunto finito; llamado el conjunto de los estados;
2. S es un conjunto finito; llamado el alfabeto;
3. $\rho : Q \times S \rightarrow Q$ es una función; llamada la función de transición;
4. $q \in Q$ es un estado inicial; y
5. $F \subset Q$ es el conjunto de los estados finales.

Una palabra de longitud n es un elemento de S^n . Dado cualquier estado $p \in Q$ y un $\alpha \in S$, la función de transición ρ nos indica como pasar del estado p a uno nuevo: $\rho(p, \alpha) \in Q$. En particular, dada una palabra $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ y un estado $p \in Q$, podemos ver como tal palabra produce un nuevo estado $\rho_{p, \alpha}$ por medio de iteración del procedimiento anterior, es decir, $q_1 = \rho(p, \alpha_1)$, $q_2 = \rho(q_1, \alpha_2)$, ..., $q_k = \rho(q_{k-1}, \alpha_k)$, ..., $q_n = \rho(q_{n-1}, \alpha_n) = \rho_{p, \alpha}$. El procedimiento del autómata M es el de aceptar una palabra α si $\rho_{q, \alpha} \in F$; y rechazarla en caso contrario. El conjunto de las palabras aceptadas forman un lenguaje asociado a M . Los grafos dirigidos permiten describir este proceso

de la siguiente manera. Consideramos el conjunto de vértices $V = Q$. Cada $\alpha \in S$ determina ejes dirigidos $(p, \rho(p, \alpha))$, para cada $p \in Q$, los cuales se marcan con el peso α . Este grafo dirigido (con pesos) puede no ser simple. Ahora, los vértices que pertenecen a F se pueden colorear con un color dado R . Dada una palabra α , podemos seguir estos caminos dirigidos partiendo del vértice q y miramos el último vértice al que llegamos. Si tal vértice tiene color R , entonces se acepta la palabra.

Observación 1.11.2. — No todo lenguaje puede ser tratado por medio de autómatas finitos. La clase de lenguajes que si lo permiten son llamados lenguajes regulares (Teorema de Kleene). Stephen C. Kleene (1909-1994) fué uno de los fundadores de la informática teórica juntamente con Alonso Church (su director de tesis), Alan Turing y John von Neumann.

Ejercicio 16. —

1. Supongamos que tenemos una palabra (finita) w que se construye usando letras de un alfabeto (finito) V . Podemos construir un multigrafo dirigido asociado tal palabra como sigue. Usamos como vértices las letras del alfabeto que utiliza la palabra w . Si la letra v_1 está justo antes de la letra v_2 (en la palabra w), entonces colocamos un eje dirigido desde v_1 hasta v_2 . Este proceso permite construir, de manera única, multigrafos dirigidos por cada palabra. Pero puede ocurrir que dos palabras diferentes definan el mismo multigrafo dirigido. Dar un ejemplo de tal situación.
2. Consideremos el alfabeto $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. La cantidad de palabras de longitud m que se pueden construir con este alfabeto es igual a n^m . Formemos el multigrafo dirigido cuyos vértices son todas las palabras de longitud m y colocamos un eje dirigido desde cada vértice $v_1 = c_1c_2 \cdots c_m$ (donde $c_j \in A$) a cada vértice $v_2 = c_2 \cdots c_m a_j$ (es decir, desde cada palabra salen n ejes dirigidos, donde uno de ellos podría ser un bucle). Cada eje dirigido (v_1, v_2) se puede identificar con una palabra de longitud $(m + 1)$ dadas por $c_1c_2 \cdots c_m a_j$. Este multigrafo dirigido, usualmente denotado por $G(n, m + 1)$ y llamado multigrafo grafo de Bruijn.
 - (a) Verificar que la cantidad de ejes que tiene $G(n, m + 1)$ es igual a n^{m+1} .
 - (b) Verificar que el multigrafo dirigido $G(n, m + 1)$ es Euleriano, es decir, existe un camino dirigido cerrado y simple que contiene a todos los ejes, es decir, un ciclo Euleriano.
 - (c) Considere un ciclo Euleriano y considere uno de los ejes, digamos c_1 . Sean $c_1, c_2, \dots, c_{n^{m+1}}$ los ejes seguidos de manera ordenada siguiendo el ciclo. Sea d_j la primera letra del alfabeto que aparece en la palabra c_j . Verificar que toda palabra de longitud $(m + 1)$ es de la forma $d_j d_{j+1} \cdots d_{j+m}$ (los índices mirados módulo n^{m+1}).

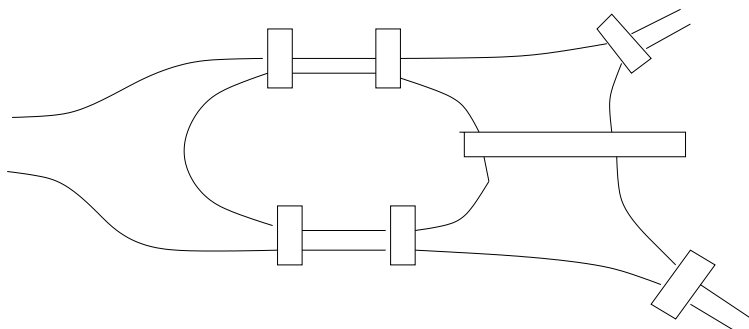


FIGURA 1.1. Mapa de la ciudad de Könisberg, siglo XVIII

3. Sea A un alfabeto de longitud n . Una sucesión de Bruijn $B(n, m + 1)$ es una palabra $d_1 d_2 \cdots d_{n^{m+1}}$ ($d_j \in A$) tal que toda palabra de longitud $(m+1)$ se puede escribir como $d_j d_{j+1} \cdots d_{j+m}$ (los índices mirados módulo n^{m+1}). Verificar que para todo par de enteros positivos (n, m) existe una sucesión de Bruijn $B(n, m + 1)$.

1.12. Grafos Eulerianos

Un grafo finito es llamado *grafo Euleriano* si existe un *circuito Euleriano*, es decir, un camino cerrado que no repite ejes y que contiene a todos los ejes del grafo.

Ejercicio 17. — Ver que todo grafo Euleriano es necesariamente conexo. Ver que el grafo K_2 no es Euleriano, mientras que K_3 si lo es.

Ejemplo 7 (Problema de los puentes de Könisberg). — El plano de la antigua ciudad de Könisberg (Prusia), mostrando el río Pregel que pasa por la ciudad y con los 7 puentes que lo atravesaban en el siglo XVIII se muestra en la Figura 1.1. El problema de los puentes de Könisberg consiste en encontrar (si existe) una ruta que recorra los 7 puentes (cruzandolos sólo una vez cada uno) y volviendo al punto de partida. Esteo problema fué resuelto por L. Euler en 1736 verificando la no existencia de tal ruta.

El problema de los puentes de Könisberg puede ser interpretado en términos de grafos como sigue. Primero consideramos cada puente como un eje y cada componente de tierra como un vértice. Por desgracia, esto nos define un multigrafo y no un grafo (ver Figura 1.2). Pero si agregamos un vértice a cada eje, obtendremos un grafo simple como lo muestra la Figura 1.3. Ahora el problema de los puentes de Könisberg consiste en ver si el grafo de la Figura 1.3 es o no Euleriano. Ahora la respuesta a tal pregunta es dada por el siguiente resultado.

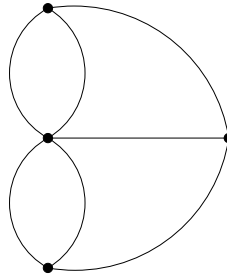


FIGURA 1.2

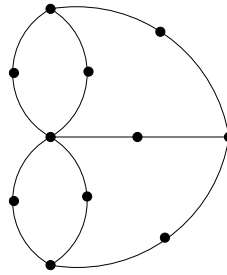


FIGURA 1.3

Teorema 1.12.1. — *Un grafo finito y conexo es Euleriano sí y sólo si cada vértice tiene grado par.*

Demonstración. — Supongamos que tenemos un grafo Euleriano. Como cada eje debe ser recorrido y no podemos repetir ejes, entonces en cada vértice debemos tener por cada eje otro eje diferente (uno para llegar y otro para salir). Esto nos dice que el grado en cada vértice debe ser par.

Supongamos ahora que tenemos un grafo finito, conexo donde cada vértice tiene grado par. Podemos suponer que este grafo es simple (ver Ejercicio 18). Si $|V| = 1$, entonces no hay nada que probar. Supongamos desde ahora que $|V| > 1$. Tomemos dos vértices vecinos $v_1, v_2 \in V$, luego $\{v_1, v_2\} \in E$. Por el Lema 1.12.2, podemos construir un circuito α_1 conteniendo al eje $\{v_1, v_2\}$.

Consideremos el nuevo grafo que se obtiene eliminando los ejes contenidos en el circuito α_1 , pero manteniendo los vértices originales que tienen grado positivo después de esta eliminación. Para este nuevo grafo, los vértices siguen teniendo grado par. Si este nuevo grafo no tiene ejes, entonces estamos listos y α_1 es el circuito Euleriano buscado. Supongamos ahora que tenemos ejes. En cada componente conexa del nuevo grafo podemos proceder de la misma manera que antes. Como el grafo original es finito, este proceso produce una colección finita de circuitos disjuntos, pero cuya unión es conexa (todo el grafo original). Ahora la unión de estos circuitos definen un circuito Euleriano como se deseaba.

□

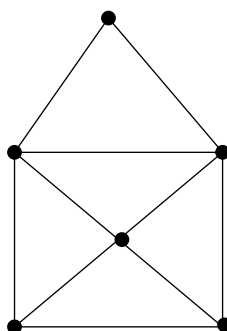


FIGURA 1.4

Ejercicio 18. —

1. Ver que el grafo de la Figura 1.3 no es Euleriano. En particular, de la respuesta al problema de los puentes de Königsberg.
2. Verificar que el grafo de la Figura 1.4 no es Euleriano. Construya un camino Euleriano en este grafo (es decir, un camino, necesariamente no cerrado, que pasa por todos los ejes y no repite ejes).
3. Ver que un grafo es Euleriano sí y sólo si el grafo simple obtenido al quitar todos los bucles es Euleriano.

Lema 1.12.2. — Sea $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ un grafo finito, donde cada vértice tiene grado par. Para cada eje $e_1 \in E$ existe un circuito en el grafo conteniéndole.

Demonstración. — Si el eje e_1 es un bucle, entonces no hay nada que verificar. Supongamos que $\iota(e_1) = \{v_1, v_2\}$, donde $v_1 \neq v_2$. Como el grado de v_2 es par, debe existir un eje $e_2 \neq e_1$ de manera que $\iota(e_2) = \{v_2, v_3\}$. De esta manera, obtenemos un camino (e_1, e_2) que conecta el vértice v_1 con el vértice v_3 . Si $v_3 = v_1$, entonces estamos listos. En caso que $v_3 \neq v_1$, otra vez, usando el hecho que el grado de v_3 es par, podemos escoger otro eje $e_3 \notin \{e_1, e_2\}$ de manera que $\iota(e_3) = \{v_3, v_4\}$. Continuando con este proceso de manera inductiva, podemos ir construyendo un camino (e_1, \dots, e_r) de manera que todos los ejes son diferentes, $\iota(e_j) \cap \iota(e_{j+1}) = \{v_{j+1}\}$. Si ocurre que $\iota(e_r) = \{v_r, v_1\}$, entonces habremos terminado. En caso contrario seguimos con el proceso anterior. Como el número de vértices es finito, el camino terminará llegando a v_1 . \square

Ejercicio 19. —

1. Construir un ciclo Euleriano para el grafo Euleriano de la Figura 1.5.
2. ¿Es K_n Euleriano?, ¿Es $K_{n,m}$ Euleriano?
3. Ver cuales de los grafos de la Figura 1.6 son Eulerianos y tales caso buscar un ciclo Euleriano.

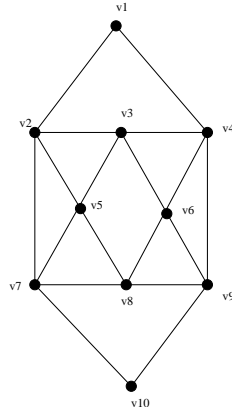


FIGURA 1.5

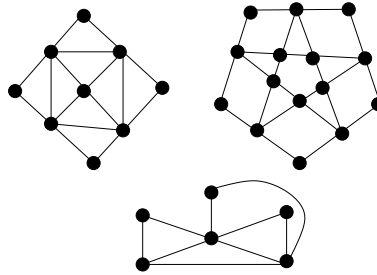


FIGURA 1.6

Teorema 1.12.3. — *Un grafo conexo no-Euleriano contiene un camino Euleriano sí y sólo si este contiene exactamente dos vértices con grado impar.*

Demonstración. — Veamos la condición necesaria. Consideremos un grafo \mathcal{G} que no es Euleriano. Si este grafo contiene un camino Euleriano que conecta los vértices v_1 y v_2 , entonces al agregar un nuevo eje $e \notin \mathcal{G}$ que conecta v_1 con v_2 , obtenemos un grafo Euleriano. Más aún, al agregar ese nuevo eje al camino Euleriano original obtenemos un circuito Euleriano del nuevo grafo. Como todos los vértices de este nuevo grafo tienen grado par (al ser Euleriano), al quitar este nuevo eje (es decir, regresando al grafo original) vemos que los vértices v_1 y v_2 ahora tienen grado impar, y los demás siguen con grado par.

Ahora veamos la condición suficiente. Si tenemos un grafo \mathcal{G} que contiene exactamente dos vértices con grado impar, digamos v_1 y v_2 , entonces podemos agregar un nuevo eje e que conecta v_1 con v_2 . Ahora este nuevo grafo tiene todos sus vértices de grado par, luego es Euleriano y podemos construir un circuito Euleriano. Al quitar el eje nuevo a tal circuito Euleriano obtenemos un camino Euleriano (en el grafo original) que conecta los vértices v_1 y v_2 .

□

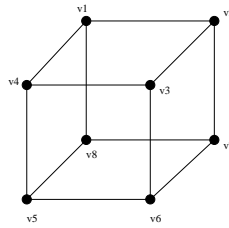


FIGURA 1.7

1.13. Grafos Hamiltonianos

Un grafo finito se llama *grafo Hamiltoniano* si existe un ciclo Hamiltoniano en este, es decir, un ciclo (camino cerrado y simple) conteniendo a todos los vértices del grafo.

Ejercicio 20. —

1. Ver que todo grafo Hamiltoniano es necesariamente conexo.
2. Ver que el grafo de la Figura 1.7 es Hamiltoniano y que no es Euleriano.
3. Sea $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ un grafo conexo. Si $|V| \leq 2$, entonces determinar cuando \mathcal{G} es Hamiltoniano. Dar un ejemplo con $|V| = 3$ que no es Hamiltoniano.

En general es muy difícil ver si un grafo es Hamiltoniano, pero el siguiente resultado permite ver si este no lo es.

Teorema 1.13.1. — Sea $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ un grafo finito y conexo de manera que $|V| \geq 3$. Si \mathcal{G} es Hamiltoniano, entonces para cada subconjunto $W \subset V$, $W \neq \emptyset$, el subgrafo cuyo conjunto de vértices es $V - W$ y cuyos ejes son los ejes en E que no tienen vértices en W (y con la función de incidencia dada por la restricción de ι), tiene a lo más $|W|$ componentes conexas.

Demonstración. — Supongamos que $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y consideremos un ciclo Hamiltoniano

$$\alpha = (e_1, \dots, e_n)$$

donde $\iota(e_j) = \{v_j, v_{j+1}\}$ y $v_{n+1} = v_1$.

Consideremos el subgrafo cíclico $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \iota_0)$, donde $\mathcal{H}_0 = V$, $\mathcal{H}_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ sobre ι_0 es la restricción de ι sobre \mathcal{H}_1 .

Sea $W \subset V = \mathcal{H}_0$, $W \neq \emptyset$. Sean C_1 el número de componentes conexas del subgrafo \mathcal{G}_W cuyo conjunto de vértices es $V - W$ y cuyos ejes son aquellos de E que no contienen un vértice de W , y C_2 el número de componentes conexas del subgrafo \mathcal{H}_W cuyo conjunto de vértices es $\mathcal{H}_0 - W$ y cuyos ejes son aquellos de \mathcal{H}_1 que no contienen un vértice de W .

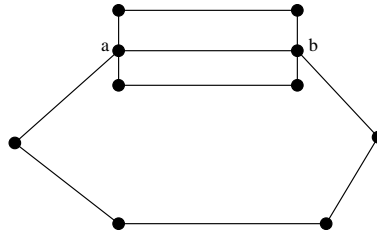


FIGURA 1.8

Como \mathcal{H}_W es un subgrafo de \mathcal{G}_W , tenemos que $C_1 \leq C_2$. Luego, basta con verificar el teorema para el grafo \mathcal{H} y el subgrafo \mathcal{H}_W . Esto lo haremos inductivamente en la cardinalidad de W .

Supongamos que $W = \{w_1, \dots, w_r\}$. Entonces, el subgrafo $\mathcal{H}_{\{w_1\}}$ es conexo. El subgrafo $\mathcal{H}_{\{w_1, w_2\}}$ tiene a lo más 2 componentes. El subgrafo $\mathcal{H}_{\{w_1, w_2, w_3\}}$ tiene a lo más 3 componentes. De manera inductiva se puede verificar que el subgrafo $\mathcal{H}_{\{w_1, \dots, w_r\}}$ tiene a lo más r componentes.

□

Ejemplo 8. — Consideremos el grafo de la Figura 1.8. Si tomamos $W = \{a, b\}$, entonces el subgrafo determinado como en el Teorema 1.13.1 consiste de $3 > |W|$ componentes conexas; luego no puede ser Hamiltoniano.

Ejercicio 21. —

1. Sea \mathcal{G} un grafo y $\widehat{\mathcal{G}}$ el grafo obtenido al eliminar los bucles de \mathcal{G} . Verificar que \mathcal{G} es Hamiltoniano sí y sólo si $\widehat{\mathcal{G}}$ es Hamiltoniano.
2. Analizar si los grafos completos K_n y los grafos $K_{n,m}$ son Hamiltonianos.

Teorema 1.13.2 (Teorema de Ore (1963)). — Sea $\mathcal{G} = (V, E)$, un grafo simple y conexo con $|V| \geq 3$. Si la suma de los grados de todo par de vértices no vecinos es al menos $|V|$, entonces \mathcal{G} es Hamiltoniano.

Demonstración. — Sea $|V| = m \geq 3$. Supongamos por el contrario que \mathcal{G} no es Hamiltoniano. Podemos ver \mathcal{G} como un subgrafo propio del grafo completo K_m (propio ya que K_m es Hamiltoniano). Consideramos el subgrafo más grande de K_m que contenga a \mathcal{G} que no sea Hamiltoniano (es decir, al agregar un eje más este queda Hamiltoniano) y que tiene los mismos vértices que \mathcal{G} . Llamemos a este nuevo subgrafo como $\widehat{\mathcal{G}}$. Luego, $\mathcal{G} \subset \widehat{\mathcal{G}} \subset K_m$ y $\widehat{\mathcal{G}} \neq K_m$.

Si v_1, v_2 son dos vértices de $\widehat{\mathcal{G}}$ que no son vecinos, entonces ellos no son vecinos tampoco en \mathcal{G} ; luego $\text{grad}_{\widehat{\mathcal{G}}}(v_1) + \text{grad}_{\widehat{\mathcal{G}}}(v_2) \geq \text{grad}_{\mathcal{G}}(v_1) + \text{grad}_{\mathcal{G}}(v_2) \geq m$.

Si agregamos el eje $\{v_1, v_2\}$, entonces obtenemos un grafo Hamiltoniano (por la maximalidad de $\widehat{\mathcal{G}}$). En particular, existe un camino Hamiltoniano (camino simple que contiene a todos los vértices), digamos

$$\gamma = \{v_1 = u_1, u_2\} \cup \{u_2, u_3\} \cup \cdots \cup \{u_{m-1}, u_m = v_2\}$$

Si u_1 y u_j son vértices vecinos en $\widehat{\mathcal{G}}$, entonces u_m y u_{j-1} no pueden ser vecinos. En efecto, de ser así, podemos construir el ciclo Hamiltoniano en $\widehat{\mathcal{G}}$ dado por

$$\{u_m, u_{j-1}\} \cup \{u_{j-1}, u_{j-2}\} \cup \cdots \cup \{u_2, u_1\} \cup \{u_1, u_j\} \cup \{u_j, u_{j+1}\} \cdots \cup \{u_{m-1}, u_m\}$$

una contradicción al hecho que $\widehat{\mathcal{G}}$ no es Hamiltoniano.

Así, si v_1 tiene a vértices vecinos en $\{u_2, \dots, u_m\}$, entonces lo anterior nos dice que al menos a vértices en $\{u_1, \dots, u_{m-1}\}$ no pueden ser vecinos a v_2 en $\widehat{\mathcal{G}}$.

Ahora, esto nos dice que

$$\text{grad}_{\widehat{\mathcal{G}}}(v_1) + \text{grad}_{\widehat{\mathcal{G}}}(v_2) \leq a + (m - 1 - a) = m - 1 < m$$

una contradicción. □

Corolario 1.13.3 (Teorema de Dirac). — Sea $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ un grafo simple y conexo con $|V| \geq 3$. Si el grado de todo vértices es al menos $|V|/2$, entonces \mathcal{G} es Hamiltoniano.

Teorema 1.13.4. — Sea $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ un grafo simple y conexo con $|V| \geq 3$. Si la suma de los grados de todo par de vértices no vecinos es al menos $|V| - 1$, entonces \mathcal{G} tiene un camino Hamiltoniano.

Demonstración. — La demostración es similar a la demostración del Teorema 1.12.3 □

Corolario 1.13.5. — Sea $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ un grafo simple y conexo con $|V| \geq 3$. Si el grado de todo vértices es al menos $(|V| - 1)/2$, entonces \mathcal{G} contiene un camino Hamiltoniano.

1.14. Coloración de grafos

En una carta de Augustus De Morgan (1806-1871) dirigida a Sir William R. Hamilton (23 de Octubre del 1852) hace la pregunta si se puede o no colorear un mapa con 4 colores diferentes de modo que dos regiones adyacentes tienen colores diferentes. Recién en 1977 se verifica afirmativamente este hecho por K. Appel, W. Haken y J. Koch apoyándose esencialmente en cálculos efectuados por un computador (aproximadamente 1000 casos).

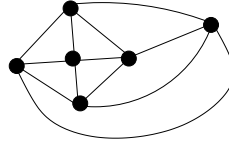
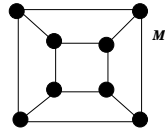


FIGURA 1.9

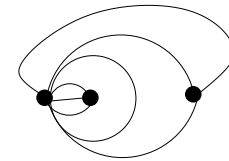
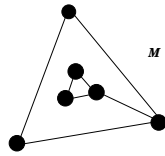


FIGURA 1.10

Ahora veremos como la problemática anterior se puede modelar usando grafos. Consideremos un mapa M que corresponde a una representación de un grafo $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ en la esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Procedemos a construir un grafo (dual) $\mathcal{G}^* = (V^*, E^*, \iota^*)$: (i) los vértices son dados por la elección de un punto (y sólo uno) por cada componente conexa del complemento del mapa (es decir, por cada cara del mapa) y (ii) por cada eje $e \in E$ escogemos un arco e^* que conecta los vértices de \mathcal{G}^* determinados por las caras que comparten el eje e y que intersecta e de manera transversal en un único punto de su interior (en caso que ambas caras son la misma, entonces e^* es un bucle. En la Figura 1.9 se muestra un mapa cuyo su grafo dual es un grafo simple y en la Figura 1.10 un ejemplo donde el grafo dual al mapa tiene bucles y ejes múltiples (es decir, ι no es inyectiva).

1.14.1. Coloración de grafos. — Sea $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ un grafo sin bucles y K un conjunto de cardinalidad $k \geq 2$. Una coloración por K de \mathcal{G} es dada por una función $f : V \rightarrow K$, de modo que si $\iota(e) = \{v, w\}$ para $e \in E$, entonces $f(v) \neq f(w)$. En otras palabras, si cada elemento de K representa un color diferente, entonces una *coloración* por K consiste en dotar de un color a cada vértice de manera que vértices vecinos no tengan el mismo color.

Teorema 1.14.1. — *Todo grafo planar sin bucles puede ser coloreado por 4 colores.*

Demonstración. — Por la planaridad, podemos construir un mapa definido por el grafo dual. Ahora el resultado sale del teorema de la coloración por 4 colores de mapas en la esfera. □

Ejemplo 9. — *En la UFRO se quiere realizar un horario para las distintas asignaturas que se imparten semestralmente. Algunas de tales asignaturas pueden ser de interés a un mismo alumno. Luego, se deben programar estas asignaturas de manera que aquellas que tengan un gran número de alumnos interesados no coincidan en sus horas asignadas. Es por esto que se quiere conocer el mínimo de horas (semanales) necesarias para impartir las enseñanzas de tales. Para esto, primero consideramos el grafo cuyos vértices consisten de las asignaturas a dictar en el semestre. Si dos asignaturas tienen un gran número de estudiantes interesados, entonces conectamos por un eje tales vértices. Si pensamos que cada color que se le puede asignar a un vértice corresponde a un bloque de horas a la semana, lo que necesitamos es buscar el número mínimo de colores para colorear tal grafo.*

1.15. Grafos bipartitos

Un grafo es llamado *bipartito* si ese admite una coloración con dos colores. Observemos que si el grafo consiste de sólo un vértice, entonces trivialmente es bipartito.

Ejemplo 10. — *Consideremos un polinomio $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ y supongamos que este tiene exactamente dos valores críticos, es decir, hay exactamente dos puntos diferentes $p_1, p_2 \in \mathbb{C}$ de manera que para todo $z \in \mathbb{C} - \{p_1, p_2\}$ ocurre que $P'(w) \neq 0$ para cada $w \in P^{-1}(z)$, y para $j = 1, 2$, siempre existe algún $w_j \in P^{-1}(p_j)$ con $P'(w_j) = 0$. Consideremos un arco simple $\gamma \subset \mathbb{C}$ que tiene a p_1 y p_2 como puntos finales. Consideremos el grafo cuyos vértices son dados por $P^{-1}(p_1) \cup P^{-1}(p_2)$ y cuyos ejes son dados por $P^{-1}(\gamma)$. Cada vértice de tal grafo contenido en $P^{-1}(p_j)$ es coloreado por el color p_j . Esta coloración hace de este grafo un grafo bipartito.*

Teorema 1.15.1. — *Un grafo finito es bipartito sí y sólo si todo ciclo es de longitud par.*

Demonstración. — Podemos asumir que el grafo es simple y que es conexo (Tarea).

Si el grafo es bipartito, como cada eje conecta dos vértices de diferente color y sólo usamos dos colores, entonces es claro que todo ciclo debe tener longitud par.

Veamos el recíproco. Usemos inducción en la cardinalidad N de ejes. Si $N = 0$, entonces tal grafo consiste de sólo un vértice y trivialmente admite una coloración con dos colores. Supongamos que el resultado es válido para grafos con $N < M$ ejes.

Consideremos un grafo simple conexo $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ con M ejes y de manera que no contiene ciclos de longitud impar. Tomemos un eje cualquiera $e \in E$ tal que $\iota(e) = \{u, v\}$.

Supongamos que al quitar el eje e (pero no los vértices) el grafo queda desconexo, digamos dado por los grafos $\mathcal{G}_1 = (V_1, E_1, \iota_1)$ y $\mathcal{G}_2 = (V_2, E_2, \iota_2)$, donde $u \in V_1$ y $v \in V_2$. Es claro que ambos grafos tienen menos que M ejes, luego, por la hipótesis inductiva, podemos colorear cada uno de ellos con dos colores diferentes (usamos los mismos dos colores para ambos). Además podemos asumir que los vértices u y v tienen colores diferentes. Esta coloración produce una coloración por dos colores en el grafo \mathcal{G} .

Supongamos ahora que al quitar el eje e (pero no los vértices) el grafo sigue siendo un grafo conexo, digamos $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, donde $\mathcal{H}_0 = V$ y $\mathcal{H}_1 = E - \{e\}$. Usando la hipótesis inductiva, existe una coloración

$$f : \mathcal{H}_0 \rightarrow \{0, 1\}.$$

Consideremos un camino simple en \mathcal{H} que conecta u con v , digamos

$$\gamma_1 = (e_1, \dots, e_{s+1})$$

donde

$$\iota(e_1) = \{u, v_1\}, \dots, \iota(e_{s+1}) = \{v_s, v\}.$$

Como $e \notin \{e_1, \dots, e_{s+1}\}$, el camino $\gamma_2 = (e_1, \dots, e_{s+1}, e)$ resulta ser un ciclo en \mathcal{G} . Por la hipótesis, el ciclo γ_2 tiene longitud par, luego, la longitud de γ_1 es impar. Esto nos asegura que $f(u) \neq f(v)$. En particular, f define una coloración por dos colores en \mathcal{G} como deseábamos. □

Observación 1.15.2. — La teoría de grafos permite estudiar problemas en informática relacionados con la eficiencia de algoritmos. La idea es analizar el costo en términos de tiempo y espacio (memoria) de los métodos utilizados. Este estudio es muy importante, no sólo por razones de “economía” sino que en ocasiones puede ser vital, al crecer los problemas propuestos los tiempos de realización o las necesidades de espacio en memoria pueden hacer impracticable una determinada tarea. Respecto a esto, existen problemas que son intratables de modo práctico; llamados problemas con complejidad NP (tiempo polinomial no determinísticas). Las máquinas de Turing no determinísticas son una generalización de los autómatas finitos, pero mucho más rápidas y económicas. Problemas del tipo NP son, por ejemplo, determinar si un grafo dado es Hamiltoniano o ver la posibilidad de colorear un grafo por un número dado de colores.

1.16. Funciones

Dado un grafo $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$, tenemos asociado el espacio vectorial real de todas las funciones reales definidas sobre V , el cual denotaremos por $\mathcal{C}^0(\mathcal{G})$.

Denotamos por $L^2(\mathcal{G})$ al subespacio vectorial cuyos elementos son aquellas funciones $\mu \in C^0(\mathcal{G})$ tales que

$$\|\mu\|^2 = \sum_{v \in V} \mu(v)^2 < +\infty$$

Ejercicio 22. — Sea $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ un grafo. Verificar que si $\mu, \nu \in L^2(\mathcal{G})$, entonces el siguiente define un producto interior positivo definido.

$$\langle \mu, \nu \rangle = \sum_{v \in V} \mu(v)\nu(v)$$

Verificar que con este producto interior vale que $L^2(\mathcal{G})$ es un espacio de Hilbert.

Observemos que cuando el grafo es finito se tiene que $C^0(\mathcal{G}) = L^2(\mathcal{G})$.

Ejercicio 23. — Sea $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ un grafo finito y $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Construir un isomorfismo entre $(L^2(\mathcal{G}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y el espacio Euclidiano $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_0)$ (donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ denota el producto punto usual en \mathbb{R}^n).

1.17. Derivación en grafos

Una derivación en un grafo $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ es un operador lineal $D : C^0(\mathcal{G}) \rightarrow C^0(\mathcal{G})$. Denotamos por $\Xi_{\mathcal{R}}(\mathcal{G})$ el álgebra real de derivaciones sobre \mathcal{G} .

1.18. Campo de vectores

Un campo de vectores de un grafo $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ es una función

$$X : V \rightarrow V$$

de manera que

$$X(v) \in N(v) \cup \{v\},$$

donde $N(v)$ denota al conjunto de los vértices vecinos de v .

Si $X(v) = v$, entonces v es llamado un vértice crítico de X .

Ejercicio 24. — Sea $\mathcal{G} = (V, E, \iota)$ un grafo. Sea X un campo de vectores en \mathcal{G} . Una solución del campo X es una colección (finita o infinita) ordenada de vértices

$$v_1, v_2, \dots \in V$$

tal que

$$X(v_j) = v_{j+1}, \quad \forall j = 1, 2, 3, \dots$$

en otras palabras, una solución de X es la órbita de un vértice bajo iteración por la función X .

1.- Verificar que dado $v \in V$ siempre existe una solución del campo con $v_1 = v$. Más aún, tal solución está únicamente determinada por v .

- 2.- *Dar un ejemplo para ver que es posible tener soluciones diferentes, para el mismo campo, que comparten al menos un vértice. En tal caso, ver que a partir de un vértice en común tales soluciones deben coincidir.*
- 3.- *¿Qué condiciones debería tener el campo X para asegurar que si dos soluciones intersectan, entonces estas soluciones deben coincidir?*

CAPÍTULO 2

GRAFOS MÉTRICOS

En este capítulo definiremos el concepto de derivadas direccionales de funciones definidas en los vértices de grafos y, en particular, el concepto del operador de Laplace discreto Δ_2 el cual es un ejemplo de derivación. Esto permitirá definir el concepto de funciones armónicas discretas. También se describirán, en el caso de grafos finitos, el principio del máximo y mínimo, el problema de Dirichlet y el problema de Neumann.

En este capítulo sólo consideraremos grafos simples, es decir, sin bucles y con la función de incidencia ι siendo inyectiva. De esta manera, los grafos serán descritos como pares $\mathcal{G} = (V, E)$ y cada eje e será interpretado como un par $e = \{v_1, v_2\}$, donde esta notación indica que $\iota(e) = \{v_1, v_2\}$.

2.1. Métricas discretas

Una *métrica discreta* en el grafo $\mathcal{G} = (V, E)$ es una función

$$d : E \rightarrow (0, +\infty)$$

en cuyo caso el par (\mathcal{G}, d) es llamado un *grafo métrico*.

Si \mathcal{G} es un grafo conexo y $u, v \in V$, entonces existe un camino

$$\gamma = \{u, w_2\} \cup \dots \cup \{w_{r-1}, v\}$$

$$w_2, \dots, w_{r-1} \in V$$

Definimos su *longitud* como (tomando $w_1 = u$ y $w_r = v$)

$$l(\gamma) = \sum_{j=1}^{r-1} d(\{w_j, w_{j+1}\}).$$

Definimos la *distancia* $d(u, v)$ como el mínimo de las longitudes de todos los posibles caminos que unen u con v en el grafo. Observemos que esta definición coincide con la dada en el capítulo anterior para la métrica $d = 1$.

Ejercicio 25. — Si (\mathcal{G}, d) es un grafo métrico conexo orientado y de grado finito, verificar que ρ_d es una métrica. ¿Qué pasa si quitamos la condición que el grafo sea de grado finito? ¿Qué sucede si imponemos la condición que existe $r > 0$ tal que $d(e) \geq r$ para todo eje e del grafo infinito?

2.2. Grafos métricos isomorfos y automorfismos

Supongamos que tenemos dos grafos métricos (\mathcal{G}, d_1) y (\mathcal{H}, d_2) . Diremos que ellos son *grafos métricos isomorfos* si existe un isomorfismo de grafos $h : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ de manera que $d_1(\{x, y\}) = d_2(\{h(x), h(y)\})$. Tal isomorfismo es llamado un *isomorfismo de grafos métricos*.

Un *automorfismo de grafo métrico* del grafo métrico (\mathcal{G}, d) es un isomorfismo métrico de (\mathcal{G}, d) consigo mismo.

2.3. Matriz de adyacencia métrica y de valencia métrica

Consideremos un grafo métrico finito (\mathcal{G}, d) , donde $\mathcal{G} = (V, E)$, y supongamos que

$$V = \{v_1, \dots, v_m\}$$

Sea

$$a_{ij}^k = \begin{cases} d(\{v_i, v_j\})^{-k}, & \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

La matriz cuadrada

$$A_k = [a_{ij}^k]_{m \times m}$$

es llamada la *matriz de adyacencia métrica de grado k* del grafo métrico (\mathcal{G}, d) .

Si definimos

$$b_{ij}^k = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sum_{r=1}^m a_{ir}^k, & i = j. \end{cases}$$

La matriz cuadrada

$$B_k = [b_{ij}^k]_{m \times m}$$

es llamada la *matriz de valencia métrica de grado k* del grafo métrico (\mathcal{G}, d) .

Ejercicio 26. — Verificar que k y la matriz de adyacencia métrica de grado k determina el grafo métrico módulo isomorfismo. Observar que A_0 y B_0 son exactamente las matrices de adyacencia y valencia del grafo.

2.4. Derivadas direccionales de funciones

Sea (\mathcal{G}, d) un grafo métrico conexo de grado finito, donde $\mathcal{G} = (V, E)$. La métrica discreta d define una métrica en el conjunto de los vértices V .

Sea $\mu \in C^0(\mathcal{G})$, $v \in V$ y $w \in N(v) \cup \{v\}$. La derivada direccional de orden k de μ en v en la dirección de w como

$$\partial_w^k \mu(v) = (-1)^k \begin{cases} \frac{\mu(v) - \mu(w)}{d^k(\{v, w\})}, & v \neq w \\ 0, & v = w \end{cases}$$

2.5. Campos de vectores y derivación en grafos

Un campo de vectores X sobre un grafo métrico (\mathcal{G}, d) induce una derivación

$$D_X : C^0(\mathcal{G}) \rightarrow C^0(\mathcal{G})$$

definido por

$$D_X(\mu)(v) = \partial_{X(v)} \mu(v)$$

Ahora, si tenemos dos campos de vectores, digamos X, Y en el grafo \mathcal{G} , entonces, como para cada $\mu \in C^0(\mathcal{G})$ se tiene que $X(\mu) \in C^0(\mathcal{G})$, entonces podemos definir D_{YX} .

2.6. Operador discreto de Laplace Δ_2

El operador de Laplace discreto [6] se define como

$$\Delta_2 : C^0(\mathcal{G}) \rightarrow C^0(\mathcal{G})$$

$$\Delta_2 \mu(v) = \sum_{w \in N(v)} \frac{\mu(v) - \mu(w)}{d^2(\{v, w\})} = \sum_{w \in N(v)} \partial_w^2 \mu(x)$$

La definición tiene sentido ya que, al ser \mathcal{G} de grado finito, $N(v)$ es finito para cada $v \in V$. Es importante hacer notar que la definición dada aquí corresponde a el operador negativo de Laplace.

Proposición 2.6.1. — Sea $(\mathcal{G} = (V, E), d)$ un grafo métrico finito, conexo y sea n la cardinalidad de V . Entonces el espectro de Δ_2 tiene la forma

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Demonstración. — Sea $\mu \in C^0(\mathcal{G})$. Entonces,

$$\begin{aligned} \langle \mu, \Delta_2 \mu \rangle &= \sum_{v \in V} \mu(v) \Delta_2 \mu(v) = \\ &= \sum_{v \in V} \mu(v) \left(\sum_{w \in N(v)} \frac{\mu(v) - \mu(w)}{d(\{v, w\})^2} \right) \\ &= \sum_{v \in V} \sum_{w \in N(v)} \frac{\mu(v)^2 - \mu(v)\mu(w)}{d(\{v, w\})^2} \end{aligned}$$

Ahora, cada eje $\{v, w\}$ aparece dos veces contados en la suma anterior, de donde se obtiene que

$$\langle \mu, \Delta_2 \mu \rangle = \sum_{\{v, w\} \in E} \left(\frac{\mu(v) - \mu(w)}{d(\{v, w\})} \right)^2 \geq 0.$$

De lo anterior obtenemos que todo valor propio de Δ_2 es no-negativo. Para ver que $\lambda_1 = 0$, basta con notar que si μ es una función constante, entonces $\Delta_2\mu = 0$. \square

En el Corolario 2.9.4 veremos que el valor propio $\lambda_1 = 0$ tiene multiplicidad 1, es decir, $\lambda_2 > 0$.

2.7. Funciones armónicas discretas

Sea $\mathcal{G} = (V, E)$ un grafo de grado finito. Decimos que $\mu \in C^0(\mathcal{G})$ es *armónica* en el vértice $v \in V$ si $\Delta_2\mu(v) = 0$. Si μ es armónica en todo V , entonces decimos que μ es *armónica discreta*. En otras palabras, el espacio de las funciones armónicas discretas es el núcleo de Δ_2 . Estudios de hamonicidad en grafos finitos se pueden encontrar en varios artículos, tanto recientes como clásicos, ver por ejemplo [2, 3, 6, 8, 10].

De manera similar, una función $\mu : V \rightarrow \mathbb{C}$ es llamada *armónica* en $v \in V$ si sus partes reales e imaginarias $Re(\mu), Im(\mu) \in C^0(\mathcal{G})$ son armónicas en v .

Ejercicio 27. — Ver que toda función constante es armónica y concluir que $\lambda_1 = 0$ es valor propio de Δ_2 .

Ejercicio 28. — Sea (\mathcal{G}, d) un grafo métrico finito, conexo con al menos 2 vértices, donde $\mathcal{G} = (V, E)$. Supongamos que

$$V = \{v_1, \dots, v_m\}, \quad E = \{e_1, \dots, e_n\}$$

y que A_2 y B_2 son, respectivamente, la matriz de adyacencia y valencia métrica de \mathcal{G} de grado 2. Defina $w_{ij} = d(\{v_i, v_j\})^{-2}$ para $\{v_i, v_j\} \in E$ y $w_{ij} = 0$ en caso contrario.

1. El operador de Laplace discreto produce un endomorfismo lineal del espacio vectorial real $C^0(\mathcal{G})$.
2. La función

$$\phi : C^0(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{R}^m : \mu \mapsto \phi(f) = (\mu(v_1), \dots, \mu(v_m))$$

es un isomorfismo entre espacios vectoriales reales. La base $\{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ de $C^0(\mathcal{G})$ definida por $\phi(\mu_j) = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0)$ es llamada la base canónica de $C^0(\mathcal{G})$.

3. Verificar que el operador discreto de Laplace Δ_2 queda descrito como el operador lineal

$$\widehat{\Delta}_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

definido por

$$\widehat{\Delta}_2(x_1, \dots, x_m) = \left(\sum_{j=1}^m w_{1j}(x_1 - x_j), \dots, \sum_{j=1}^m w_{mj}(x_m - x_j) \right)$$

4. Concluir que

$$\widehat{\Delta}_2(x_1, \dots, x_m) = (B_2 - A_2) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

es decir, que la matriz de Δ_2 en la base canónica de $C^0(\mathcal{G})$ es $J_2 = B_2 - A_2$.

5. Verificar que

$$[x_1 \ \cdots \ x_m] J_2 \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \sum_{1 \leq i < j \leq m} w_{ij} (x_i - x_j)^2.$$

6. Concluir que el operador discreto de Laplace Δ_2 es simétrico y positivo semi-definido.

7. Concluir de lo anterior que

$$\langle \Delta_2 \mu, \nu \rangle = \langle \mu, \Delta_2 \nu \rangle$$

donde

$$\langle \mu, \nu \rangle = \sum_{v \in V} \mu(v) \nu(v).$$

8. Concluir que para cada $p > 0$ se puede calcular un único operador Δ^p que es la p -potencia de Δ_2 : este operador es llamado el operador discreto p -Laplaciano.

9. Considere una orientación para los ejes del grafo. Si $\{v_i, v_j\} \in E$, entonces escribamos (v_i, v_j) para denotar el eje orientado de manera que v_i es el vértice de partida. Defina las matrices $U = (u_{ij}), V = (v_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ por

$$u_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si tenemos } e_i = (v_j, v_k) \\ -1, & \text{si tenemos } e_i = (v_k, v_j) \\ 0, & \text{en caso que } e_i \text{ no contiene al vértice } v_j \end{cases}$$

$$v_{ij} = \begin{cases} w_{ij}, & \text{si tenemos } e_i = (v_j, v_k) \\ -w_{ij}, & \text{si tenemos } e_i = (v_k, v_j) \\ 0, & \text{en caso que } e_i \text{ no contiene al vértice } v_j. \end{cases}$$

Verificar que

$$J_2 = {}^t UV$$

y que ${}^t UV$ no depende de la orientación escogida sobre los ejes.

10. Sean $r \in \{1, \dots, m\}$, $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ y escriba

$$J_2 = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ {}^t J_{12} & J_{22} \end{bmatrix}$$

donde J_{11} es matriz simétrica de tamaño $r \times r$, J_{12} es matriz de tamaño $r \times (m-r)$ y J_{22} es matriz simétrica de tamaño $(m-r) \times (m-r)$. Verificar que el problema

$$\begin{cases} \mu(v_j) = a_j, & j = 1, \dots, r \\ \Delta\mu(v_j) = 0, & j = r+1, \dots, m \end{cases}$$

es equivalente al problema lineal (donde I_r denota la matriz identidad de tamaño $r \times r$ y 0 a la matriz cero de tamaño $r \times (m-r)$)

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ {}^t J_{12} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.8. Derivaciones inducidas por campos de vectores

Consideremos un grafo métrico (\mathcal{G}, d) y un campo de vectores $X : V \rightarrow V$, donde $\mathcal{G} = (V, E)$. Tal campo de vectores permite definir una derivación en \mathcal{G} como

$$D_X : C^0(\mathcal{G}) \rightarrow C^0(\mathcal{G}),$$

donde $D_X\mu(v) := \partial_{X(v)}\mu(v)$.

Ejemplo 11. — Consideremos un grafo métrico (\mathcal{G}, d) de grado finito. Si $v, w \in V$ es tal que $w \in N(v)$, entonces podemos definir el campo de vectores

$$X_{v,w}(\tau) = \begin{cases} w, & \tau = v \\ \tau, & \tau \neq v. \end{cases}$$

Luego, para $\mu \in C^0(\mathcal{G})$ se tiene que

$$D_{X_{v,w}}(\mu)(\tau) = \begin{cases} \frac{\mu(w) - \mu(v)}{d(\{v, w\})} = \partial_w\mu(v), & \tau = v \\ 0, & \tau \neq v. \end{cases}$$

Luego,

$$D_{X_{v,w}}^2(\mu)(\tau) = \begin{cases} \frac{X_{v,w}(\mu)(w) - X_{v,w}(\mu)(v)}{d(\{v, w\})} = \frac{\mu(v) - \mu(w)}{d(\{v, w\})^2} = \partial_w^2\mu(v), & \tau = v \\ 0, & \tau \neq v. \end{cases}$$

Luego, el operador discreto de Laplace es

$$\Delta_2 = \sum_{v \in V} \sum_{w \in N(v)} D_{X_{v,w}}^2 .$$

También podemos de manera inductiva definir

$$\Delta_k = \sum_{v \in V} \sum_{w \in N(v)} D_{X_{v,w}}^k ,$$

donde

$$D_{X_{v,w}}^k(\mu)(\tau) = (-1)^k \cdot \begin{cases} \frac{\mu(v) - \mu(w)}{d(\{v, w\})^k} = \partial_w^k \mu(v), & \tau = v \\ 0, & \tau \neq v . \end{cases}$$

Observación 2.8.1. — En el ejemplo anterior la derivación Δ_k se transforma en Δ_2 si cambiamos la métrica d por la nueva métrica $d^{2/k}$.

Ejercicio 29. — Ver que el operador Δ^p no siempre puede ser transformado al operador Δ_2 por medio de cambio de métrica. Analizar esto para K_3 .

2.9. Principio del máximo y mínimo

Diremos que la función $\mu \in C^0(\mathcal{G})$ no es localmente constante si para cada vértice $v \in V$ existe un vértice vecino $w \in N(v)$ con $\mu(w) \neq \mu(v)$. Notemos que si μ es localmente constante en el vértice v , entonces μ es armónica allí.

Lema 2.9.1. — Sea \mathcal{G} un grafo finito. Entonces toda $\mu \in C^0(\mathcal{G})$ tiene un máximo global y un mínimo global.

Demonstración. — Tarea. □

Teorema 2.9.2 (Principio del Máximo y Mínimo). — Sea (\mathcal{G}, d) un grafo métrico finito y $\mu \in C^0(\mathcal{G})$ una función que no es localmente constante. Si $v \in V$ es un máximo o un mínimo local para μ , entonces μ no es armónica en v .

Demonstración. — Como el grafo es finito, entonces V es finito, la existencia de un máximo y de un mínimo es dada por el Lema anterior. Sea $v \in V$ un máximo local para μ , es decir, $\mu(v) \geq \mu(w)$ para todo $w \in N(v)$. Luego, como $\mu(v) \geq \mu(w)$, la única manera de tener la igualdad

$$0 = \Delta_2 \mu(v) = \sum_{w \in N(v)} \frac{\mu(v) - \mu(w)}{d^2(\{v, w\})}$$

es que tengamos que $\mu(w) = \mu(v)$ para todo $w \in N(v)$, una contradicción al hecho que μ no es localmente constante. La demostración es idéntica para un mínimo local. □

Ejercicio 30. — Verificar que el resultado anterior no es en general válido si el grafo no es finito.

Corolario 2.9.3. — Sea (\mathcal{G}, d) un grafo métrico finito y conexo. Entonces, las únicas funciones armónicas $\mu \in C^0(\mathcal{G})$ son las constantes.

Corolario 2.9.4. — Sea (\mathcal{G}, d) un grafo métrico finito, conexo. Entonces, el espectro del operador Laplaciano discreto es

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m$$

donde el espacio propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 0$ es de dimensión 1.

Observación 2.9.5. — Respecto al resultado anterior, si eliminamos la condición de que el grafo sea conexo, entonces el Teorema 2.9.2 nos asegura que el valor propio $\lambda_1 = 0$ tendrá multiplicidad igual al número de componentes conexas de este.

El Corolario 2.9.4 nos dice que $\lambda_2 > 0$. El próximo resultado nos indica como determinarlos. Recordemos que en $C^0(\mathcal{G})$ (grafo finito) tenemos el producto interior Euclidiano

$$\langle \mu, \nu \rangle = \sum_{v \in V} \mu(v)\nu(v).$$

Corolario 2.9.6. — Sea (\mathcal{G}, d) un grafo métrico finito, conexo. Entonces, si denotamos por $C(0) < C^0(\mathcal{G})$ el subespacio formado por las funciones constantes, entonces

$$C(0)^\perp = \left\{ \mu \in C^0(\mathcal{G}) : \sum_{v \in V} \mu(v) = 0 \right\}$$

and

$$\lambda_2 = \operatorname{Infimo}_{\mu \in C(0)^\perp - \{0\}} \frac{\sum_{\{v,w\} \in E} \left(\frac{\mu(v) - \mu(w)}{d(\{v,w\})} \right)^2}{\sum_{v \in V} \mu(v)^2}$$

Demonstración. — Es claro que si $\mu \in \{\mu \in C^0(\mathcal{G}) : \sum_{v \in V} \mu(v) = 0\}$ y $\nu \in C(0)$, entonces $\langle \mu, \nu \rangle = 0$. Luego, $\{\mu \in C^0(\mathcal{G}) : \sum_{v \in V} \mu(v) = 0\} \subset C(0)^\perp$. Como $\{\mu \in C^0(\mathcal{G}) : \sum_{v \in V} \mu(v) = 0\}$ es de co-dimensión 1 en $C^0(\mathcal{G})$, se obtiene la igualdad deseada.

Como Δ_2 es simétrica, sus valores propios diferentes tienen espacios propios ortogonales entre sí, en particular, los vectores propios de Δ_2 asociados a los valores propios λ_j , con $j \geq 2$, viven en $C(0)^\perp$. Por otro lado, sabemos que, para cada $\mu \in C^0(\mathcal{G})$ vale la igualdad

$$\langle \mu, \Delta_2 \mu \rangle = \frac{\sum_{\{v,w\} \in E} \left(\frac{\mu(v) - \mu(w)}{d(\{v,w\})} \right)^2}{\sum_{v \in V} \mu(v)^2}.$$

Así, si μ es vector propio asociado al valor propio λ_j , entonces

$$\lambda_j = \frac{\sum_{\{v,w\} \in E} \left(\frac{\mu(v) - \mu(w)}{d(\{v,w\})} \right)^2}{\sum_{v \in V} \mu(v)^2}.$$

Ya que λ_2 es el menor valor propio diferente de cero, lo anterior nos da la igualdad deseada para λ_2 . □

Ejercicio 31. — Si eliminamos la condición de finitud del grafo, entonces podemos tener funciones armónicas discretas diferentes de las constantes. Sea \mathcal{G} definido por $V = \mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$ y los ejes son los arcos de la forma $\{z + t : t \in [0, 1]\}$ y $\{z + it : t \in [0, 1]\}$ donde $z \in \mathbb{Z}[i]$. Para cada $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, sea

$$P_n : \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z^n$$

Tomamos la métrica discreta $d \equiv 1$. En este caso, verificar que P_n es armónica discreta sólo para $n = 0, 1, 2, 3$.

Ejercicio 32. — Sea (\mathcal{G}, d) un grafo métrico finito, conexo con al menos 2 vértices, donde $\mathcal{G} = (V, E)$. Supongamos que $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ y sea $w_{ij} = 0$ en caso que $\{v_i, v_j\} \notin E$ y $w_{ij} = d(\{v_i, v_j\})^{-2}$ en caso que $\{v_i, v_j\} \in E$.

1. Verificar la igualdad

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} w_{ij} = \text{Traza}(B_2),$$

donde B_2 es la matriz de valencia de grado 2 asociada al grafo métrico.

(Ind. La traza es invariante por conjugación y la matriz J_2 es conjugada a la matriz diagonal cuya diagonal es formada de los valores propios.)

2. Concluir que

$$\lambda_2 \leq \frac{2}{m-1} \sum_{1 \leq i < j \leq m} w_{ij} = \frac{\text{Traza}(B_2)}{m-1}$$

$$\lambda_m \geq \frac{2}{m-1} \sum_{1 \leq i < j \leq m} w_{ij} = \frac{\text{Traza}(B_2)}{m-1}.$$

3. Verificar

$$\lambda_2 = \frac{\text{Traza}(B_2)}{m-1} \iff \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_m = \frac{\text{Traza}(B_2)}{m-1}.$$

Además, ver que esta igualdad vale sólo cuando el grafo es K_m y la métrica d es constante.

4. En el caso particular en que $d = 1$, es decir $w_{ij} \in \{0, 1\}$, concluir que $\lambda_2 \leq m$. Más aún, $\lambda_2 = m$ si y sólo si $\mathcal{G} = K_m$. En el caso $\mathcal{G} = K_m$ verificar que $\lambda_2 = \dots = \lambda_m = m$.
5. Considerar los grafos completo K_2 y K_3 con una métrica discreta. Calcule los valores propios de Δ_2 .

Ejemplo 12. — Sea \mathcal{G} definido por $V = \mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$ y los ejes son los arcos de la forma $\{z + t : t \in [0, 1]\}$ y $\{z + it : t \in [0, 1]\}$ donde $z \in \mathbb{Z}[i]$. Consideremos la función

$$\mu : \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{R} : a + ib \mapsto a^2 + b^2$$

Tomamos la métrica discreta $d \equiv 1$. En este caso, si $z \in \mathbb{Z}[i]$, entonces

$$N(z) = \{z + 1, z - 1, z + i, z - i\}$$

y luego ($z = a + ib$)

$$\begin{aligned} -\Delta_2 \mu(z) &= (\mu(z+1) - \mu(z)) + (\mu(z-1) - \mu(z)) + (\mu(z+i) - \mu(z)) + (\mu(z-i) - \mu(z)) = \\ &= -4(a^2 + b^2) + ((a+1)^2 + b^2 + (a-1)^2 + b^2 + a^2 + (b+1)^2 + a^2 + (b-1)^2) = 4 \end{aligned}$$

es decir, μ no es armónica discreta en ningún punto de V .

Ejercicio 33. — Sea \mathcal{G} definido por $V = \mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$ y los ejes son los arcos de la forma $\{z + t : t \in [0, 1]\}$ y $\{z + it : t \in [0, 1]\}$ donde $z \in \mathbb{Z}[i]$, junto con la métrica discreta $d \equiv 1$.

- (i) Si $\mu : \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ escribir la condición $\Delta_2 \mu = 0$.
- (ii) Usando (i) verificar que dado valores cualesquiera para $\mu(n, 0)$ y $\mu(n, -1)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, se puede extender de manera única μ a todo el rwsto de los vértices para que μ sea armónica.
- (iii) Concluir que el espacio vectorial real de las funciones armónicas en este caso es isomorfo a $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$

Ejemplo 13. — Consideremos el grafo $\mathcal{G} = K_4$ donde

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

y la métrica discreta $d \equiv 1$. Tenemos el isomorfismo lineal natural

$$f \in C^0(\mathcal{G}) \mapsto \phi(f) = (f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4)) \in \mathbb{R}^4$$

En este caso, si $\phi(f) = (a, b, c, d)$, entonces

$$\begin{cases} \Delta_2 f(v_1) = -3a + b + c + d \\ \Delta_2 f(v_2) = -3b + a + c + d \\ \Delta_2 f(v_3) = -3c + a + b + d \\ \Delta_2 f(v_4) = -3d + a + b + c \end{cases}$$

Luego $f \in \text{Ker}(\Delta_2)$, es decir, f es armónica discreta si y sólo si

$$a = b = c = d$$

o equivalentemente, si y sólo si f es constante.

Por otro lado, si $\phi(f) = (1, 1, 2, 0)$, entonces f es armónica discreta en v_1 y v_2 , pero $\Delta_2 f(v_3) = -4 = -\Delta_2 f(v_4)$.

2.10. Los problemas discretos de Dirichlet y Neumann

Consideremos primero la siguiente observación.

Lema 2.10.1. — Sea (\mathcal{G}, d) un grafo métrico finito y conexo. Supongamos que el conjunto de vértices de \mathcal{G} es dado por

$$V = \{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_m\},$$

donde $n > 0$ y $m > n$. Escribamos la matriz del Laplaciano discreto Δ_2 con esta numeración como

$$J_2 = \begin{bmatrix} R & U \\ {}^tU & T \end{bmatrix}$$

donde R y T son matrices cuadradas de tamaños n y $(m-n)$, respectivamente. Entonces, T es invertible.

Demonstración. — Denotemos por \mathcal{L} el espacio de funciones $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$ que son armónicas en $\{v_{n+1}, \dots, v_m\}$ y que se anulan en $\{v_1, \dots, v_n\}$. Ahora, si $\mu \in \mathcal{L}$, entonces sus máximos y mínimos deben estar en $\{v_1, \dots, v_n\}$; de donde concluimos que $\mu \equiv 0$, es decir $\mathcal{L} = \{0\}$.

Identificando μ con el vector columna ${}^t[x \ y]$, donde $x_j = \mu(v_j)$, $j = 1, \dots, n$ e $y_r = \mu(v_{n+r})$, $r = 1, \dots, m-n$, tenemos que \mathcal{L} corresponde al espacio de soluciones del sistema lineal siguiente

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ {}^tU & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

Como tal espacio de soluciones es trivial, la matriz correspondiente debe ser invertible, en particular, T debe ser invertible. □

Teorema 2.10.2 (Problema discreto de Dirichlet). — Sea (\mathcal{G}, d) un grafo métrico finito y conexo, donde $\mathcal{G} = (V, E)$. Sea $\emptyset \neq W \subset V$ y consideremos números $a_w, b_v \in \mathbb{R}$ para cada $w \in W$ y cada $v \in V - W$. Entonces, existe una y sólo una función $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$ solución al problema discreto de Dirichlet :

$$\begin{cases} \Delta\mu(v) = b_v, & v \in V - W \\ \mu(w) = a_w, & w \in W. \end{cases}$$

Demonstración. —

Unicidad. — Sea $D < C^0(\mathcal{G}) = L^2(\mathcal{G})$ el subespacio de todas las funciones $\mu \in C^0(\mathcal{G})$ tales que $\mu(w) = a_w$ para todo $w \in W$. Supongamos que tenemos dos posibles soluciones, digamos $\mu_1, \mu_2 \in D$. Luego, $\mu = \mu_1 - \mu_2 \in C^0(\mathcal{G})$ resulta ser armónica en $V - W$ y $\mu(v) = 0$ para cada $v \in W$. Por el principio del máximo y del mínimo, μ debe tener sus máximos y mínimos en W ; luego $\mu = 0$.

Existencia. — Sean A_2 y B_2 las matrices de adyacencia y valencia métrica de grado 2, respectivamente. Sean

$$V = \{v_1, \dots, v_m\}$$

$$W = \{v_1, \dots, v_r\}$$

$$a_1 = a_{v_1}, \dots, a_r = a_{v_r}, b_1 = b_{v_{r+1}}, \dots, b_{m-r} = b_{v_m} \in \mathbb{R}.$$

Identificando cada función $\mu \in C^0(\mathcal{G})$ con el vector

$$x = \begin{bmatrix} \mu(v_1) \\ \vdots \\ \mu(v_m) \end{bmatrix}$$

y suponiendo que

$$J_2 = B_2 - A_2 = \begin{bmatrix} R & U \\ {}^tU & T \end{bmatrix}$$

donde R es de tamaño $r \times r$, U es de tamaño $r \times (m-r)$ y T es de tamaño $(m-r) \times (m-r)$, vemos que el problema de Dirichlet es equivalente a resolver el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ {}^tU & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{m-r} \end{bmatrix}.$$

Como T es invertible, por el Lema 2.10.1, el problema lineal anterior tiene solución y además es única. □

Observación 2.10.3. — En la demostración anterior, la existencia para $|W| \geq 2$, se puede también ver de la siguiente manera. Como antes, definamos

$$w_{ij} = \begin{cases} d^{-2}(\{v_i, v_j\}), & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Al considerar el isomorfismo lineal

$$\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^{m-r} : \mu \mapsto (\mu(v_{r+1}), \dots, \mu(v_m)),$$

el operador Q queda dado por

$$Q : \mathbb{R}^{m-r} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
Q(x_1, \dots, x_{m-r}) &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq m-r} w_{(r+i)(r+j)} (x_i - x_j)^2 + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq m-r} \sum_{1 \leq j \leq r} w_{(r+i)j} (x_i - a_j)^2 + \\
&\quad - \sum_{j=1}^{m-r} b_{v_{r+j}} x_j
\end{aligned}$$

Ahora, la derivada parcial de Q respecto a la variable y_k es dada por :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x_k} &= \sum_{1 \leq j \leq m-r} w_{(r+k)(r+j)} (x_k - x_j) + \sum_{n+1 \leq j \leq m} w_{(r+k)j} (x_k - a_j) - b_{v_{r+k}} = \\
&= \Delta\mu(v_{r+k}) - b_{v_{r+k}}
\end{aligned}$$

De esta manera, cualquier punto crítico para Q corresponderá a una función como se requiere. Ahora, como la función Q es cuadrática positiva, esta posee un mínimo.

Teorema 2.10.4 (Problema discreto de Neumann). — Sea (\mathcal{G}, d) un grafo métrico finito y conexo, donde $\mathcal{G} = (V, E)$. Sean $W \subset Z \subset V$, $W \neq \emptyset$, $V - Z \neq \emptyset$, $|Z - W| = 1$, de manera que al quitar todos los ejes que tienen alguno de sus vértices en W no desconecta el grafo. Sea $\sigma : W \rightarrow V - Z$ y consideremos una colección de números reales $a_w, b \in \mathbb{R}$, $w \in W$, no necesariamente diferentes. Entonces, existe una y sólo una función $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$ solución al problema discreto de Neumann :

$$\begin{cases} \Delta\mu(v) = 0, & v \in V - Z \\ \mu(w) - \mu(\sigma(w)) = a_w, & w \in W \\ \mu(z) = b, & \{z\} = Z - W. \end{cases}$$

Demonstración. — Sean

$$V = \{v_1, \dots, v_n\}$$

$$Z = \{v_1, \dots, v_{m+1}\}$$

$$W = \{v_1, \dots, v_m\}$$

Supongamos que $\sigma(v_j) = v_{\tau(j)}$, para $j = 1, \dots, m$, donde

$$\tau : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{m+2, \dots, n\}.$$

Sean A_2 y B_2 las matrices de adyacencia y valencia métrica de grado 2 del grafo \mathcal{G} .

Identificamos cada función $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$ con el vector

$$x = \begin{bmatrix} \mu(v_1) \\ \vdots \\ \mu(v_n) \end{bmatrix}.$$

Hacemos la descomposición por bloques siguiente :

$$J_2 = B_2 - A_2 = \begin{bmatrix} \underbrace{L_1}_{m \times m} & \underbrace{L_2}_{m \times 1} & \underbrace{L_3}_{m \times (n-m-1)} \\ \underbrace{{}^t L_2}_{1 \times m} & \underbrace{L_4}_{1 \times 1} & \underbrace{L_5}_{1 \times (n-m-1)} \\ \underbrace{{}^t L_3}_{(n-m-1) \times m} & \underbrace{{}^t L_5}_{(n-m-1) \times 1} & \underbrace{L_6}_{(n-m-1) \times (n-m-1)} \end{bmatrix} .$$

Sea M la matriz de tamaño $m \times (n - m - 1)$ de manera que

$$m_{jk} = \begin{cases} 0, & k \neq \tau(j) - m - 1 \\ -1, & k = \tau(j) - m - 1 . \end{cases}$$

Así, el problema de Neumann se escribe como

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 & M \\ 0 & 1 & 0 \\ {}^t L_3 & {}^t L_5 & L_6 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Haciendo operaciones elementales fila, obtenemos el sistema lineal siguiente :

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 & M \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & LL_5 & LL_6 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ a_{m+1} = b \\ a_{m+2} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} .$$

Queremos ver que la matriz

$$\begin{bmatrix} 1_{1 \times 1} & 0_{1 \times (n-m-1)} \\ LL_5 & LL_6 \end{bmatrix}$$

es invertible, equivalentemente que LL_6 es invertible.

Consideremos el grafo Φ que se obtiene al eliminar todos los vértices v_1, \dots, v_m del grafo \mathcal{G} y haciendo que cada eje que terminaba en v_j ahora termine en $v_{\tau(j)}$. Por la hipótesis hecha sobre tales vértices, se tiene que Φ sigue siendo conexo. Si A'_2 (respectivamente, B'_2) es la matriz de adyacencia métrica (respectivamente, de valencia métrica) del grafo conexo finito Φ , se obtiene que

$$J'_2 = B'_2 - A'_2 = \begin{bmatrix} r_{1 \times 1} & U_{1 \times (n-m-1)} \\ LL_5 & LL_6 \end{bmatrix}$$

El Lema 2.10.1 ahora asegura que la matriz LL_6 es invertible, como queríamos.

□

PARTE II

ECUACIONES PARCIALES EN DIFERENCIAS SOBRE GRAFOS

CAPÍTULO 3

ECUACIONES PARCIALES EN DIFERENCIAS

Consideremos un grafo simple, conexo y de grado finito (\mathcal{G}, d) , donde $\mathcal{G} = (V, E)$. En este capítulo consideraremos el problema de existencia de soluciones para ecuaciones parciales en diferencia (EPD) del tipo

$$D(\mu) = F(v, \mu)$$

donde D es una derivación simétrica positiva y semi-definida para \mathcal{G} y $F : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función.

Por ejemplo, en casos de grafos métricos, se tienen EPD's del tipo

$$\Delta_2 \mu = F(v, \mu), \quad \Delta_k \mu = F(v, \mu), \quad \Delta^p \mu = F(v, \mu), \quad \Delta_2 \mu + f(v) \mu^p = 0.$$

Daremos la demostración para el caso $F(v, \mu) = f(\mu)$ y al final del capítulo diremos cómo modificar esta demostración para el caso general.

3.1. Ecuaciones del tipo $D(\mu) = f(\mu)$

En esta sección consideraremos el caso de grafos finitos y ecuaciones de la forma

$$(1) \quad D(\mu) = f(\mu)$$

donde D es una derivación simétrica y positiva semi-definida, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 y $\mu \in C^0(\mathcal{G})$.

En [24] está estudiado el caso particular cuando $D = \Delta_2$ para $d \equiv 1$) basándose en los métodos usados en el caso clásico. Nosotros adaptaremos lo hecho en [24] para el caso de cualquier métrica para así poder obtener resultados equivalentes.

Supongamos que $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ y sea $J = [w_{ij}]$ la matriz que representa al operador D . Entonces, tenemos que

- (i) ${}^t J = J$,
- (ii) J es no-negativa y
- (iii) el espectro de J es de la forma

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m$$

Al identificar los espacios vectoriales $C^0(\mathcal{G})$ con \mathbb{R}^m vía el isomorfismo lineal real

$$\phi : C^0(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{R}^m : \mu \mapsto \phi(\mu) = (\mu(v_1), \dots, \mu(v_m))$$

vemos que la ecuación (1) es equivalente al sistema algebraico

$$(2) \quad Jx = f(x)$$

donde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

y

$$f(x) = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_m) \end{bmatrix}.$$

Observemos que en el caso en que tenemos $D \in \{\Delta_2, \Delta_k, \Delta^p\}$, tenemos que la matriz J correspondiente tiene la propiedad que la suma de cada columna es cero. Luego, la siguiente observación trivial es interesante tenerla en cuenta.

Teorema 3.1.1. — Sean (\mathcal{G}, d) un grafo simple, conexo, finito y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si $u \in C^0(\mathcal{G})$ es solución de la ecuación (1). Si

$$\sum_{v \in V} D(\mu(v)) = 0$$

entonces

$$\sum_{v \in \mathcal{G}_0} f(\mu(v)) = 0.$$

Definición 3.1.2. — Diremos que la derivación D es una derivación nula si

$$\sum_{v \in V} D(\mu(v)) = 0.$$

Corolario 3.1.3. — Sean (\mathcal{G}, d) un grafo simple, conexo, finito, D una derivación nula y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si $f(t) > 0$ para todo t , entonces no hay solución de la ecuación (1).

Ejemplo 14. — Sean (\mathcal{G}, d) un grafo métrico simple, conexo, finito y $n \in \{1, 2, \dots\}$. Entonces la ecuación $\Delta_2 \mu = e^\mu$ no tiene solución.

Corolario 3.1.4. — Sean (\mathcal{G}, d) un grafo simple, conexo, finito, D una derivación nula y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función positiva, es decir, $f(t) > 0$ para $t \neq 0$ (o una función negativa, es decir, $f(t) < 0$ para $t \neq 0$). Si $\mu \in C^0(\mathcal{G})$ es solución de la ecuación (1), entonces $\mu \equiv 0$.

Ejemplo 15. — Sean (\mathcal{G}, d) un grafo métrico simple, conexo, finito y $n \in \{1, 2, \dots\}$. Entonces la ecuación $\Delta_2 \mu = \mu^{2n}$ sólo tiene como solución a $\mu \equiv 0$.

Si consideramos la función

$$H_f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$H_f(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{2}[x_1 \cdots x_m]J \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} - \sum_{j=1}^m \int_0^{x_j} f(t) dt$$

vemos que

$$\nabla H_f \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_m) \end{bmatrix}$$

concluyendo el siguiente hecho.

Teorema 3.1.5. — Las soluciones de la ecuación (1) corresponden exactamente a los puntos críticos de la función H_f .

¿Cómo determinar la existencia de puntos críticos de H_f ? En el caso clásico esto es logrado usando el lema del paso de la montaña, el cual procedemos a recordar para el caso de dimensión finita (ver [5] para el caso finito y [1] para el caso general).

Teorema 3.1.6 (Lema del paso de la montaña). — Sea $H : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que :

- (i) $H(0) = 0$;
- (ii) existe $r > 0$ de manera que $H(x) > 0$, si $0 < \|x\| \leq r$;
- (iii) existe $y \in \mathbb{R}^m$, de manera que $H(y)H(x) < 0$, para $\|x\| = r$.

Sea

$$A = \{\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m : \alpha(0) = 0, \alpha(1) = y, \alpha \in C^0([0, 1])\}$$

y

$$a = \text{Inf}_{\alpha \in A} \{ \text{Max}_{t \in [0, 1]} H(\alpha(t)) \} \in \mathbb{R},$$

entonces existe una sucesión $(x^{(k)}) \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} H(x^{(k)}) = a, \quad \text{and} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|\nabla H(x^{(k)})\| = 0.$$

Más aún, si para toda sucesión $(y^{(k)}) \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} H(y^{(k)}) = a \quad \text{and} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|\nabla H(y^{(k)})\| = 0$$

existe una subsucesión convergente (condición de Palais-Smale), entonces a es un valor crítico, es decir, H tiene un punto crítico $p \in \mathbb{R}^m - \{0\}$ for H .

Para poder utilizar el Teorema 3.1.6 para obtener puntos críticos no triviales de la función H_f necesitamos que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaga ciertas condiciones. Ya que

$$\frac{1}{2}[x_1 \cdots x_m]J \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \geq 0,$$

quisiéramos que exista cierto $r > 0$ con las siguientes propiedades :

(i) si $|t| < r$, entonces

$$\int_0^t f(s) ds < 0;$$

(ii) existe un punto $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ tal que $r^2 < a_1^2 + \dots + a_m^2$ y de manera que

$$\frac{1}{2}[a_1 \cdots a_m]J \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} < \sum_{j=1}^m \int_0^{a_j} f(t) dt$$

Si consideramos

$$L_f(t) := H_f(t, 0, \dots, 0) = \frac{t^2}{2} \sum_{j=2}^m w_{1j} - \int_0^t f(s) ds,$$

entonces una manera de garantizar la condición (i) es tener $f(0) = 0$ y $f'(0) < 0$ y para garantizar la condición (ii) es tener algún $t_0 > 0$ de manera que $L_f(t_0) < 0$. Esto se puede garantizar si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} L_f(t) = -\infty.$$

Para garantizar la condición de Palais-Smale y la anterior, basta asumir la condición

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} = +\infty,$$

ya que en tal caso todo existe algún $s > 0$ de manera que si $\|x\| > s$, entonces $H_f(x) < 0$.

Teorema 3.1.7. — Sea (\mathcal{G}, d) un grafo simple, conexo y finito, D una derivación simétrica y positiva semi-definida y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $f(0) = 0$, $f'(0) < 0$ y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} = +\infty.$$

Entonces existe solución no trivial de la ecuación (1).

Ejemplo 16. — Sea $f(t) = t^p - h(t)$, donde $p > 1$, $t^p := |t|^{p-1}t$, $h(0) = 0$, $h'(0) > 0$ y, para $t \neq 0$, $|\frac{h(t)}{t}| < M$, para algún $M > 0$. En tal caso se cumplen las condiciones del Teorema 3.1.7 para la función f y, en particular, para todo grafo métrico finito conexo (\mathcal{G}, d) la ecuación

$$\Delta_2 \mu = \mu^p - h(\mu)$$

tiene solución no trivial en $\mu \in C^0(\mathcal{G})$ si $p > 1$. Ejemplos de tales funciones h son, (i) $h(t) = \lambda t$ con $\lambda > 0$ y (ii) $h(t) = \sin(t)$.

Ejemplo 17. — Hay casos de funciones que no satisfacen las condiciones del Teorema 3.1.7, como es el caso cuando

$$f(t) = t^p := |t|^{p-1}t, \quad p > 1,$$

en cuyo caso,

$$f'(t) = p|t|^{p-1}, \quad \int_0^t f(s) ds = \frac{|t|^{p+1}}{p+1}.$$

Veamos un par de ejemplos. Consideremos primero el grafo completo K_2 cuyos vértices son $\{v_1, v_2\}$ y una métrica d . Tomemos $D = \Delta_2$. En este caso tenemos el valor positivo $d(\{v_1, v_2\})^{-2} = w_{12} > 0$ y las matrices

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & w_{12} \\ w_{12} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} w_{12} + w_{13} & 0 \\ 0 & w_{12} + w_{23} \end{bmatrix}$$

$$J = J_2 = \begin{bmatrix} w_{12} + w_{13} & -w_{12} \\ -w_{12} & w_{12} + w_{23} \end{bmatrix}.$$

En esta situación, tenemos que

$$H_f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}w_{12}(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{p+1} \{|x_1|^{p+1} + |x_2|^{p+1}\}.$$

Es claro que

$$H_f \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Además tenemos que

$$G(x) = H_f \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} = 2w_{12}x^2 - \frac{2}{p+1}|x|^{p+1}.$$

Hay sólo un punto crítico $x > 0$ de la función $G(x)$, este siendo $x_0 = (2w_{12})^{\frac{1}{p-1}}$. Ahora, el punto

$$\begin{bmatrix} (2w_{12})^{\frac{1}{p-1}} \\ -(2w_{12})^{\frac{1}{p-1}} \end{bmatrix}$$

es un punto crítico de H_f . Así, vemos que la ecuación (1) (con $D = \Delta_2$) tiene solución no trivial para cada $p > 1$.

Ahora consideremos el grafo completo K_3 cuyos vértices son $\{v_1, v_2, v_3\}$. En este caso tenemos los valores positivos

$$w_{12}, w_{13}, w_{23} > 0$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} \\ w_{12} & 0 & w_{23} \\ w_{13} & w_{23} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} w_{12} + w_{13} & 0 & 0 \\ 0 & w_{12} + w_{23} & 0 \\ 0 & 0 & w_{13} + w_{23} \end{bmatrix}$$

$$J = J_2 = \begin{bmatrix} w_{12} + w_{13} & -w_{12} & -w_{13} \\ -w_{12} & w_{12} + w_{23} & -w_{23} \\ -w_{13} & -w_{23} & w_{13} + w_{23} \end{bmatrix}$$

$$H_f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{2} \{w_{12}(x_1 - x_2)^2 + w_{13}(x_1 - x_3)^2 + w_{23}(x_2 - x_3)^2\} - \frac{1}{p+1} \{|x_1|^{p+1} + |x_2|^{p+1} + |x_3|^{p+1}\}$$

Si tomamos $p = 2$, $w_{12} = 1 = w_{23}$, $w_{13} = 2$, entonces el único punto crítico (real) de H_f es $(0, 0, 0)$, es decir, la ecuación (1) (con $D = \Delta_2$), en este caso particular, no tiene más que la solución trivial.

Definición 3.1.8. — Una función $\mu \in C^0(\mathcal{G})$ se dice *positiva* si $\mu(v) \geq 0$ para todo $v \in V$ y se dice *negativa* si $\mu(v) \leq 0$ para todo $v \in V$, donde $\mathcal{G} = (V, E)$.

El Teorema 3.1.7 sólo da la existencia de soluciones no triviales, pero no dice si existen soluciones positivas y/o negativas. Ahora analizaremos la existencia de tales soluciones bajo ciertas restricciones en f .

Dada una función de clase C^1 , digamos $H : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, se define la *variedad de Nehari* asociada a H como

$$S_H = \{x \in \mathbb{R}^m - \{0\} : \langle \nabla H(x), x \rangle = 0\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^m - \{0\} : \sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial H}{\partial x_j}(x) = 0 \right\},$$

donde $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Es claro de la definición que S_H debe contener a todos los puntos críticos diferentes de 0 de la función H .

Si consideramos

$$F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x) = \sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial H}{\partial x_j}(x)$$

entonces vemos que

$$S_H \subset F^{-1}(0).$$

Si suponemos que H es de clase C^2 , entonces F es de clase C^1 . Ahora,

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial H}{\partial x_k}(x) + \sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial^2 H}{\partial x_k \partial x_j}(x).$$

Si tenemos que

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x) = 0, \quad \forall k = 1, \dots, m,$$

entonces, en particular tendremos que

$$0 = \sum_{k=1}^m x_k \frac{\partial F}{\partial x_k}(x) = \sum_{k=1}^m x_k \frac{\partial H}{\partial x_k}(x) + \sum_{k=1}^m x_k \sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial^2 H}{\partial x_k \partial x_j}(x)$$

equivalentemente

$$\sum_{k=1}^m x_k \frac{\partial H}{\partial x_k}(x) + [x_1 \ \cdots \ x_m] \text{Hess}(H)(x) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = 0$$

donde $\text{Hess}(H)(x)$ denota la matriz Hessiana de H en el punto x . Si además $x \in S_H$, entonces debemos tener

$$[x_1 \ \cdots \ x_m] \text{Hess}(H)(x) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = 0.$$

Lo anterior junto al teorema de la función implícita permiten obtener el siguiente hecho.

Lema 3.1.9. — Sea $H : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 tal que

$$[x_1 \ \cdots \ x_m] \text{Hess}(H)(x) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \neq 0$$

para todo $x = (x_1, \dots, x_m) \in S_H$. Entonces, S_H es una subvariedad diferenciable de dimensión $m - 1$.

En nuestra situación usaremos $H = H_f$, en cuyo caso

$$\text{Hess}(H_f)(x_1, \dots, x_m) = J - \begin{bmatrix} f'(x_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f'(x_2) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f'(x_m) \end{bmatrix}$$

y

$$[x_1 \ \cdots \ x_m] \text{Hess}(H)(x) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = [x_1 \ \cdots \ x_m] J \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} - \sum_{j=1}^m x_j^2 f'(x_j).$$

Luego, si suponemos que

$$f'(t) > \frac{f(t)}{t}, \quad \forall t \neq 0$$

entonces para $x = (x_1, \dots, x_m) \in S_{H_f}$ tendremos que

$$[x_1 \cdots x_m]J \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} - \sum_{j=1}^m x_j^2 f'(x_j) < [x_1 \cdots x_m]J \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} - \sum_{j=1}^m x_j f(x_j) = \langle \nabla H_f(x), x \rangle = 0.$$

En resumen, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.1.10. — Sea (\mathcal{G}, d) un grafo simple, conexo y finito, D una derivación simétrica positiva semi-definida y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que

$$f'(t) > \frac{f(t)}{t}, \quad \forall t \neq 0.$$

Entonces la variedad de Nehari S_{H_f} es una subvariedad diferenciable de \mathbb{R}^m de dimensión $m - 1$.

Ahora, como

$$H_f(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{2} [x_1 \cdots x_m]J \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} - \sum_{j=1}^m \int_0^{x_j} f(t) dt$$

y

$$\nabla H_f \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_m) \end{bmatrix}$$

vemos que

$$S_{H_f} = \left\{ x \in \mathbb{R}^m - \{0\} : [x_1 \cdots x_m]J \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^m x_j f(x_j) \right\}.$$

Para ver algunas propiedades de S_{H_f} necesitaremos el siguiente hecho.

Lema 3.1.11. — Sea $M = (m_{ij})_{m \times m}$ tal que $M = {}^t M$, $m_{ij} \leq 0$ para $i \neq j$ y $m_{jj} \geq 0$. Entonces,

$${}^t x^+ M x^- = {}^t x^- M x^+ \geq 0$$

donde $x = [x_1 \cdots x_m]$, $x_j^+ = \text{Máx}\{0, x_j\}$ y $x_j^- = \text{Mín}\{0, x_j\}$.

Demonstración. — La igualdad es consecuencia del hecho que M es una matriz simétrica. Por otro lado,

$$[x_1^+ \cdots x_m^+]M \begin{bmatrix} x_1^- \\ \vdots \\ x_m^- \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m x_k^- x_j^+ m_{kj} \geq 0$$

ya que $x_j^+ x_j^- = 0$, $x_k^+ x_j^- \leq 0$ y $m_{kj} \leq 0$ para $k \neq j$.

□

Definición 3.1.12. — Diremos que una derivación D cuya matriz J que la representa satisface las mismas hipótesis que M del Lema anterior es una *derivación simétrica positiva semi-definida de tipo positiva*.

Ejemplo 18. — Δ_2 es un ejemplo de derivación simétrica positiva semi-definida de tipo positiva.

Proposición 3.1.13. — Sea (\mathcal{G}, d) un grafo simple, conexo y finito, D derivación simétrica positiva semi-definida y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que

$$f(0) = 0, \quad f'(0) < 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} = +\infty, \quad f'(t) > \frac{f(t)}{t}, \quad \forall t \neq 0.$$

Entonces

- (i) S_{H_f} es compacta;
- (ii) $\forall x \in \mathbb{R}^m - \{0\}$ existe $\lambda > 0$ (único) de manera que $\lambda x \in S_{H_f}$. Más aún, si $0 < \mu < \lambda$, entonces $H_f(\mu x) < H_f(\lambda x)$.
- (iii) Toda solución no trivial de la ecuación (1) corresponde a un punto crítico de H_f restricto a S_{H_f} .

Demonstración. —

Parte (i). Veamos que 0 no es punto de acumulación de puntos en S_{H_f} ; con lo cual vemos que S_{H_f} es un cerrado (pues sabemos que $S_{H_f} \cup \{0\}$ es la preimagen de 0 por una función continua). Como J es una matriz simétrica positiva semi-definida, tenemos que ${}^t x J x \geq 0$. Por otro lado, como $f'(0) < 0$ y $f(0) = 0$, tenemos que $t f(t) < 0$ para todo $t \neq 0$ muy cercano a 0. Si 0 pudiese acumularse por puntos de S_{H_f} , digamos por la sucesión $x^{(n)} \in S_{H_f}$, entonces para n muy grande tendremos que ${}^t x^{(n)} J x^{(n)} = \sum_{j=1}^m x_j^{(n)} f(x_j^{(n)})$. Por lo visto antes, la parte izquierda de tal igualdad es mayor o igual cero, pero la parte derecha será negativa, una contradicción.

Ahora, el acotamiento de S_{H_f} se obtiene del hecho que en la igualdad

$${}^t x J x = \sum_{j=1}^m x_j f(x_j)$$

el lado izquierdo crece cuadráticamente, pero la condición

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} = +\infty,$$

dice que la parte derecha crece más deprisa.

Parte (ii). Sea $x \in \mathbb{R}^m - \{0\}$. Definamos la función $Q : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$Q(t) = \langle \nabla H_f(tx), tx \rangle = t({}^t x J x - {}^t x F(tx))$$

donde

$$F(tx) = \begin{bmatrix} f(tx_1) \\ \vdots \\ f(tx_m) \end{bmatrix}.$$

Queremos ver la existencia de un único cero de Q . Ya que $t \neq 0$, basta con ver que hay un único cero de la función $T : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$T(t) = \langle \nabla H_f(tx), x \rangle = {}^t x J x - {}^t x F(tx) = {}^t x (J(tx) - F(tx)).$$

Ya que ${}^t x J(tx) = {}^t x J x \geq 0$ crece de manera lineal con t y, por otro lado, la condición

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} = +\infty,$$

dice que ${}^t x F(tx)$ (≥ 0 para t suficientemente grande) crece de manera más rápida, vemos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = -\infty$$

y como

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(t) = 0$$

obtenemos la existencia de ceros de T .

Notemos que si definimos la función $R : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$R(t) = H_f(tx),$$

entonces

$$R'(t) = T(t)$$

de donde vemos que los ceros de T son exactamente los puntos críticos de R . Por otro lado,

$$R''(t) = T'(t) = {}^t x J x - \sum_{j=1}^m x_j^2 f'(tx_j) = \frac{1}{t^2} ({}^t(tx) Hess(H_f)(tx)(tx)).$$

La condición

$$f'(t) > \frac{f(t)}{t}, \quad \forall t \neq 0,$$

nos asegura que

$$R''(t) = T'(t) < {}^t x J x - \frac{1}{t} \sum_{j=1}^m x_j f(tx_j).$$

Si $\sigma > 0$ es un cero de T , es decir, $\sigma x \in S_{H_f}$, y

$$R''(\sigma) = T'(\sigma) < {}^t x Jx - \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^m x_j f(\sigma x_j) = \frac{1}{\sigma^2} \left(\underbrace{{}^t(\sigma x) J(\sigma x) - \sum_{j=1}^m (\sigma x_j) f'(\sigma x_j)}_{= 0 \text{ ya que } \sigma x \in S_{H_f}} \right) = 0$$

Esto nos dice que cada punto crítico de R es un máximo local, de donde obtenemos que hay sólo un punto crítico $\lambda > 0$ de R siendo este un máximo global para la función $H_f(tx)$. Esto mismo concluye Parte (iii). \square

Observación 3.1.14. — Notemos de la última parte de la demostración que la función $R(t) = H_f(tx)$, para $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}^m - \{0\}$, satisface que $H_f(tx) > 0$ para $0 < t < \lambda$, donde $\lambda > 0$ era tal que $\lambda x \in S_{H_f}$, ya que esta función es cóncava y sabemos que $H_f(y) > 0$ para $y \neq 0$ muy cercano a 0.

Ahora ya tenemos las herramientas necesarias para poder dar respuesta a nuestra problemática original.

Teorema 3.1.15. — Sea (\mathcal{G}, d) un grafo simple, conexo y finito, D una derivación simétrica positiva semi-definida de tipo positiva y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que

$$f(0) = 0, \quad f'(0) < 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} = +\infty, \quad f'(t) > \frac{f(t)}{t}, \quad \forall t \neq 0.$$

Entonces la ecuación

$$D(\mu) = f(\mu)$$

tiene tanto soluciones positivas como soluciones negativas en $C^0(\mathcal{G})$.

Demonstración. — Por la Proposición 3.1.13, tenemos que S_{H_f} es una variedad compacta; luego la función $H_f : S_{H_f} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un mínimo global, digamos z . Por la misma Proposición, parte (iii), tal valor de z es solución de la ecuación (2). También podemos proceder con el máximo global de H_f restringida a S_{H_f} . Como $0 \notin S_{H_f}$, tenemos que $z \neq 0$.

Veamos que todas las coordenadas diferentes de cero de z tienen el mismo signo. Supongamos por el contrario que z tiene coordenadas diferentes de cero con diferente signo. Entonces $z^+, z^- \in \mathbb{R}^m - \{0\}$. Por la parte (ii) de la Proposición 3.1.13 existen únicos valores positivos, digamos λ_+, λ_- de manera que $\lambda_+ z^+, \lambda_- z^- \in S_{H_f}$. Podemos suponer que $\lambda_+ \leq \lambda_-$. En este caso, usando la parte (ii) de la Proposición 3.1.13,

$$H_f(z) \geq H_f(\lambda_+ z) \geq H_f(\lambda_+ z^+) + H_f(\lambda_+ z^-).$$

Como $H_f(\lambda_+ z^-) > 0$ (ver la Observación 3.1.14), tenemos que

$$H_f(z) > H_f(\lambda_+ z^+)$$

lo cual contradice el hecho que z era máximo global de H_f sobre S_{H_f} .

Ahora, veamos la existencia de dos soluciones, una positiva y otra negativa.

En el caso particular $f(-t) = -f(t)$, se tiene que $w = -z$ es también solución de la ecuación (2).

Supongamos ahora la situación general para f , es decir, esta no es necesariamente impar. Definamos las funciones impares siguientes :

$$\widehat{f}(t) = \begin{cases} -f(-t), & t > 0 \\ f(t), & t \leq 0 \end{cases}$$

$$\widetilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & t > 0 \\ -f(-t), & t \leq 0. \end{cases}$$

Las funciones \widehat{f} y \widetilde{f} satisfacen las condiciones del Teorema, luego tenemos que los problemas $D(\mu) = \widehat{f}(\mu)$ y $D(\mu) = \widetilde{f}(\mu)$ tienen soluciones positivas y negativas.

La solución negativa del problema $D(\mu) = \widehat{f}(\mu)$ es también solución negativa de $D(\mu) = f(\mu)$ y la solución positiva del problema $D(\mu) = \widetilde{f}(\mu)$ es también solución positiva de $D(\mu) = f(\mu)$.

□

Observación 3.1.16. — Notemos de lo anterior que los máximos y mínimos de H_f sobre la variedad de Nehari S_{H_f} producen soluciones de la ecuación (1) (cuando $D = \Delta_2$ por ejemplo).

3.2. Ecuaciones del tipo $D(\mu) = F(v, \mu)$

Sea (\mathcal{G}, d) un grafo simple, conexo y finito, D una derivación simétrica y positiva semi-definida. Denotemos $V = \{v_1, \dots, v_m\}$, donde $\mathcal{G} = (V, E)$. La existencia de soluciones no triviales de la ecuación

$$(3) \quad D(\mu) = F(v, \mu)$$

donde $F : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función, puede obtenerse usando las mismas técnicas.

Teorema 3.2.1. — Por cada $v \in V$ definimos $f_v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f_v(t) = F(v, t)$. Si para todo $v \in V$ se tiene que f_v es de clase C^1 , $f_v(0) = 0$ y $f'_v(0) < 0$, y además existe $v_0 \in V$ de manera que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f_{v_0}(t)}{t} = +\infty$, entonces la ecuación (3) tiene soluciones no triviales.

Demonstración. — Tarea. □

Teorema 3.2.2 (Problema de Dirichlet). — Sea $W = \{v_1, \dots, v_r\} \subset V$ de manera que el grafo \mathcal{G} no se desconecta al eliminar W y todos los ejes que tienen un vértice en W . Para cada $j = 1, \dots, r$, sean $a_j \in \mathbb{R}$ dados. Sea $F : (V - W) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dada

y definamos $f_j(t) = F(v_{r+j}, t)$, para cada $j = 1, \dots, m - r$. Supongamos que la matriz J asociada a D es

$$J = \begin{bmatrix} R & {}^tU \\ U & V \end{bmatrix}$$

donde R es de tamaño $r \times r$ y V es de tamaño $(m - r) \times (m - r)$. Sea $b = Ua$, donde a es el vector columna cuya j -ésima coordenada es a_j . Si cada $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface las condiciones

$$f_j(0) = b_j, \quad f_j'(0) < 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f_j(t)}{t} = +\infty,$$

entonces el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} D(\mu) = F(v, \mu), & v \in V - W \\ u(v_j) = a_j, & j = 1, \dots, r \end{cases}$$

tiene soluciones no triviales

Demonstración. — Note que el problema a solucionar es $Vy = f(y) - Ua$, donde $f(y)$ es el vector columna cuya coordenada j -ésima es $f_j(y_j)$, y V es una matriz simétrica positiva semi-definida. Usar ahora el lema del paso de la montaña. □

3.3. Caso de grafos infinitos

En el caso que $\mathcal{G} = (V, E)$ es un grafo infinito conexo y con una cantidad numerable de vértices, los teoremas anteriores de existencia siguen siendo válidos gracias a la versión infinito dimensional del Teorema del paso de la Montaña.

Lema 3.3.1 (Teorema del paso de la Montaña [1]). — Sea U un espacio de Hilbert space y $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^1(U; \mathbb{R})$ la cual es Lipschitz continua sobre subconjuntos acotados de U (esto es, $|H(x) - H(y)| \leq K_\Omega \|x - y\|$ para $x, y \in \Omega \subset U$ acotado). Supongamos que :

- (i) $H(0) = 0$;
- (ii) existen $a, r > 0$ tales que $H(x) \geq a$, para $\|x\| = r$;
- (iii) existe $y \in U$, $\|y\| > r$ con $H(y) < 0$.

Sean

$$A = \{\alpha : [0, 1] \rightarrow U : \alpha(0) = 0, \alpha(1) = y, \alpha \in C^0([0, 1], U)\}$$

y

$$a = \inf_{\alpha \in A} \{ \max_{t \in [0, 1]} H(\alpha(t)) \} \in \mathbb{R}.$$

Entonces, a es un punto crítico de H .

Consideremos el espacio de Hilbert real

$$l_2 = \{x = (x_1, x_2, \dots) : x_j \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 < \infty\}$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j,$$

una funcional lineal simétrica y positiva semi-definida $Q : l_2 \rightarrow l_2$ y funciones reales $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que para todo $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$ vale que $f(x) := (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots) \in l_2$. Ahora consideramos el problema

$$(4) \quad Qx = f(x)$$

Teorema 3.3.2. — Si las funciones f_j son continuas tales que

$$(5) \quad f_j(0) = 0, \quad f'_j(0) < 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_j(t)}{t} = +\infty, \quad \left| \int_0^{x_j} f_j(t) dt \right| \leq x_j^2$$

para todo $x = (x_1, \dots) \in l_2$, entonces la ecuación (4) tiene soluciones no triviales.

Demonstración. — Consideremos la función real

$$(6) \quad H_Q : l_2 \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{2} {}^t x Q x - \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{x_j} f_j(t) dt.$$

Es claro que H_Q es $C^1(l_2; \mathbb{R})$ cuyo gradiente es

$$(7) \quad \nabla H_Q x = Qx - f(x).$$

Luego, los puntos críticos de H_Q son exactamente las soluciones del problema (4). Por la definición, $H_Q(0) = 0$. Como $f_j(0) = 0$, $f'_j(0) < 0$ y Q es positiva semi-definida, existen $a, r > 0$ de manera que $H_Q(x) \geq a > 0$ para $\|x\| = r$. La condición $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_j(t)}{t} = +\infty$ nos asegura la existencia de algún $y \in l_2$ con $\|y\| > r$ y $H_Q(y) < 0$. Sea $R > 0$ dado y sean $x, y \in B(0; R) \subset l_2$, es decir, $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 < R^2$, $\|y\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} y_j^2 < R^2$. Así,

$$|H_Q(x) - H_Q(y)| \leq \frac{1}{2} |{}^t x Q x - {}^t y Q y| + \left| \sum_{j=1}^{\infty} \int_{x_j}^{y_j} f_j(t) dt \right| \leq K(R) \|x - y\|$$

El Lema 3.3.1 (Mountain Pass Theorem) asegura la existencia de puntos críticos no triviales de H_Q . \square

Si $W \subset l_2$ es un subespacio invariante por Q , entonces uno puede estar interesado en encontrar soluciones de la ecuación (4) en W . Conjugando por una rotación apropiada, podemos asumir que W esta dada por las condiciones $x_r = 0$, para algunos índices r . Como Q sigue siendo simétrica y positiva semi-definida bajo conjugación por rotaciones y su restricción a W sigue manteniendo tales propiedades, el Teorema 3.3.2 nos da la existencia de tales soluciones.

Corolario 3.3.3. — Si $W < l_2$ es un subespacio no-trivial que es invariante por Q y las funciones $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas tales que f_j es derivable en 0 y ellas satisfacen las condiciones

$$(8) \quad f_j(0) = 0, \quad f'_j(0) < 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_j(t)}{t} = +\infty, \quad \left| \int_0^{x_j} f_j(t) dt \right| \leq x_j^2$$

para cada $x = (x_1, \dots) \in l_2$, entonces la ecuación (4) tiene soluciones no-triviales en W .

Corolario 3.3.4. — Sean \mathcal{G} un grafo infinito y conexo cuyo conjunto de vértices es numerable, digamos $V = \{v_1, \dots\}$, $D \in \Xi_{\mathbb{R}}(\mathcal{G})$ una derivación simétrica y positiva semi-definida y $F : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Sean $f_j(t) = F(v_j, t)$, para cada $v_j \in V$. Si, para cada j , $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en 0 y satisface las condiciones

$$(9) \quad f_j(0) = 0, \quad f'_j(0) < 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_j(t)}{t} = +\infty, \quad \left| \int_0^{x_j} f_j(t) dt \right| \leq x_j^2$$

para cada $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$, entonces la ecuación (1) tiene soluciones non-triviales.

Corolario 3.3.5. — Sean \mathcal{G} un grafo infinito y conexo cuyo conjunto de vértices es numerable, digamos $V = \{v_1, \dots\}$, $D \in \Xi_{\mathbb{R}}(\mathcal{G})$ una derivación simétrica y positiva semi-definida y $F : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, $f_j(t) = F(v_j, t)$, para cada $v_j \in V$ y G un grupo de simetrías del grafo \mathcal{G} . Si, para cada j , $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en 0 y satisface las condiciones

$$(10) \quad f_j(0) = 0, \quad f'_j(0) < 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_j(t)}{t} = +\infty, \quad \left| \int_0^{x_j} f_j(t) dt \right| \leq x_j^2$$

para cada $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$, entonces la ecuación (1) tiene soluciones que son simétricas con respecto a G .

Observación 3.3.6. — En la hipótesis del Teorema 3.3.2 hemos asumido que para todo j vale que $f'_j(0) < 0$. También podemos considerar el caso en que para todo j vale que $f'_j(0) > 0$, pero donde necesitamos asumir una condición extra : $\int_0^t f_j(s) ds < t^2$ para valores de $|t|$ pequeños (esto es válido si, por ejemplo, $f_j(t)/t < 2$ para $t \neq 0$ suficientemente cercano a 0).

Ejercicio 34. — Escribir la demostración del Teorema 3.3.2 para las condiciones descritas en la Observación 3.3.6.

3.4. Soluciones positivas

Teorema 3.4.1. — Sea (\mathcal{G}, d) un grafo métrico conexo y simple, que puede ser infinito pero cada vértice con grado finito, y $\mathcal{G} = (V, E)$. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función satisfaciendo :

(i) $f(t) \geq 0$ si $t \geq 0$; y

(ii) $f(0) = 0$.

Sea $\mu \in C^0(\mathcal{G})$ una solución de la ecuación parcial en diferencias $\Delta_2 \mu = f(\mu)$, tal que $\mu(v) \geq 0$ para todo $v \in V$. Si μ tiene un cero en V , entonces $\mu \equiv 0$.

Demonstración. — Supongamos que existe $v_0 \in V$ tal que $\mu(v_0) = 0$. Sea $N(v_0) = \{v_1, \dots, v_m\}$. Entonces,

$$0 = f(\mu(v_0)) = \Delta_2 \mu(v_0) = \sum_{j=1}^m \frac{\mu(v_0) - \mu(v_j)}{d^2(\{v_0, v_j\})} = - \sum_{j=1}^m \frac{\mu(v_j)}{d^2(\{v_0, v_j\})}.$$

Como $\frac{\mu(v_j)}{d^2(\{v_0, v_j\})} \geq 0$, se tiene necesariamente que $\mu(v_j) = 0$ for $j = 1, \dots, m$. Ahora, usando la conectividad del grafo obtenemos que $\mu \equiv 0$.

□

CAPÍTULO 4

EJEMPLOS

En este capítulo mostraremos ejemplos de ecuaciones parciales en diferencias que provienen de algunas ecuaciones diferenciales parciales clásicas. Para esto, fijaremos una métrica d sobre un grafo simple, conexo y finito $\mathcal{G} = (V, E)$.

4.1. Ecuaciones discretas tipo Matukuma

En ciertas aplicaciones de organización de estrellas se utilizan ecuaciones diferenciales parciales del tipo

$$\Delta\mu + f(|x|)\mu^p = 0$$

donde $p > 1$ y $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, llamadas *ecuaciones del tipo Matukuma*.

Sea (\mathcal{G}, d) un grafo métrico conexo y finito. Un modelo discreto de tal tipo de ecuaciones es el siguiente (el signo “-” es debido a que nuestro operador discreto de Laplace es el negativo del usual)

$$(11) \quad -\Delta_2\mu + f(v)\mu^p = 0$$

donde $p > 1$ y $f : V \rightarrow (0, +\infty)$. Esta es llamada una *ecuación discreta tipo Matukuma*.

Una solución $u \in C^0(\mathcal{G})$ de la ecuación discreta tipo Matukuma (11) (ver el Ejercicio 34) la es una tal que

$$-\Delta_2\mu(v) + f(v)\mu^p(v) = 0, \quad \forall v \in V.$$

Como consecuencia del Teorema 3.1.1, sabemos que si u es una solución, entonces

$$\sum_{v \in V} f(v)\mu^p(v) = 0.$$

Corolario 4.1.1. — Si $\mu \in C^0(\mathcal{G})$ es solución de una ecuación discreta tipo Matukuma (11) y $\mu(v) \geq 0$ para todo $v \in V$, entonces $\mu \equiv 0$.

4.2. Ecuación discreta de ondas

La *ecuación de onda* es el ejemplo prototipo de una ecuación diferencial parcial hiperbólica cuya forma es la siguiente :

$$(12) \quad u_{tt} = \Delta\mu + f(\mu, t) .$$

Sea (\mathcal{G}, d) un grafo métrico simple, conexo, finito, $c > 0$ y

$$V = \{v_1, \dots, v_m\} .$$

Para establecer una discretización de la ecuación (12), la idea es pensar en funciones

$$\mu : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (v, t) \mapsto \mu(v, t)$$

derivables en la variable t de manera que, para todo $j = 1, \dots, m$, se tenga

$$\mu_{tt}(v_k, s) = -\Delta_2\mu(v_k, s) + f(\mu(v_k, s)) .$$

Si identificamos $\mu(\cdot, t)$ con el vector $(x_1(t), \dots, x_m(t))$, entonces lo anterior se puede escribir como

$$x''(t) = -J_2x(t) + f(x(t), t)$$

donde J_2 es la matriz discreta de Laplace correspondiente al grafo métrico (\mathcal{G}, d) y

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix} .$$

Ya que $-J_2$ es simétrica no-positiva, cuyo espectro tiene la forma

$$0 = \lambda_1 > -\lambda_2 \geq -\lambda_3 \geq \dots \geq -\lambda_m,$$

la parte lineal del sistema anterior puede ser diagonalizado, así si $f = 0$, entonces este sistema se puede resolver de manera simple.

4.3. Ecuación discreta del calor

La *ecuación del calor* modela la distribución de la temperatura en una región y tiene la forma

$$(13) \quad \mu_t = \Delta\mu + f(\mu, t) .$$

Sea (\mathcal{G}, d) un grafo métrico simple, conexo, finito, $c > 0$ y

$$V = \{v_1, \dots, v_m\} .$$

Al igual que en el caso anterior, para establecer una discretización de la ecuación (13), la idea es pensar en funciones

$$\mu : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (v, t) \mapsto \mu(v, t)$$

derivables en la variable t de manera que, para cada $j = 1, \dots, m$, se tenga

$$\mu_t(v_k, s) = -\Delta_2 \mu(v_k, s) + f(\mu(v_k, s)).$$

Nuevamente, si identificamos $\mu(\cdot, t)$ con el vector $(x_1(t), \dots, x_m(t))$, entonces lo anterior se puede escribir como

$$x'(t) = -J_2 x(t) + f(x(t), t)$$

donde

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix}.$$

Así, si $f = 0$, entonces

$$x(t) = e^{-J_2 t} x_0$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}.$$

4.4. Otra ecuación

Si $p > 1$, Ω es un dominio acotado con borde $\partial\Omega$ suave y $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, entonces se tiene la ecuación diferencial parcial

$$\begin{cases} -\Delta \mu(x) + \mu^p(x) = 0, & x \in \Omega \\ \partial_n \mu(x) = f(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\partial_n \mu(x)$ denota la derivada normal de μ en el punto $x \in \partial\Omega$.

Sea (\mathcal{G}, d) un grafo métrico simple, conexo, finito,

$$V = \{v_1, \dots, v_m\}, \quad W = \{v_1, \dots, v_r\}$$

$v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)} \in V - W$, no necesariamente diferentes. Entonces, la ecuación anterior se puede describir como la siguiente ecuación diferencial parcial discreta

$$(14) \quad \begin{cases} \Delta_2 \mu(v_j) + \mu^p(v_j) = 0, & j = r+1, \dots, m \\ \mu(v_j) - \mu(v_{\sigma(j)}) = f(v_j), & j = 1, \dots, r. \end{cases}$$

Escribamos

$$J_2 = \begin{bmatrix} R & {}^t U \\ U & V \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} I & M \\ U & V \end{bmatrix}$$

donde R es de tamaño $r \times r$, U es de tamaño $(m-r) \times r$, V es de tamaño $(m-r) \times (m-r)$ y M es la matriz de tamaño $r \times (m-r)$ definida como $M = [m_{ij}]$

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & \sigma(i) \neq j+r \\ -1, & \sigma(i) = j+r. \end{cases}$$

Luego, identificando $\mu \in C^0(\mathcal{G})$ con $(\mu(v_1), \dots, \mu(v_m)) \in \mathbb{R}^m$, el sistema (14) es equivalente al siguiente

$$L \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_r) \\ x_{r+1}^p \\ \vdots \\ x_m^p \end{bmatrix}.$$

Si

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{m-r} \end{bmatrix}, \quad y^p = \begin{bmatrix} y_1^p \\ \vdots \\ y_{m-r}^p \end{bmatrix},$$

entonces el anterior se puede escribir como

$$\begin{cases} x + My & = a \\ Ux + Vy & = y^p \end{cases}$$

de donde vemos que

$$x = a - My$$

y

$$y^p + (UM - V)y - Ua = 0.$$

Teorema 4.4.1. — *La ecuación parcial en diferencias (14) tiene solución si, y sólo si, tiene solución la ecuación algebraica*

$$y^p + (UM - V)y - Ua = 0.$$

Por ejemplo, si $Ua = 0$, entonces $x = a$, $y = 0$, en cuyo caso $u(v_j) = a_j$ para $j = 1, \dots, r$ y $u(v_k) = 0$ para $k = r+1, \dots, m$.

4.5. La ecuación de Helmholtz en grafos

Muchos problemas relacionados a mecánica, acústica, electromagnetismo, etc., se reducen a estudiar la *ecuación de Helmholtz* [17]. Aquí adaptaremos esta ecuación al caso de grafos finitos y veremos como asegurar la existencia y unicidad de soluciones de esta adaptación.

4.5.1. Situación clásica. — Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio y $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función (generalmente con soporte compacto). La *ecuación clásica de Helmholtz* es dada por

$$(15) \quad -\Delta\mu = k^2\mu + h$$

donde Δ es el operador de Laplace y $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función.

En el caso $h = 0$, la existencia de soluciones no triviales de (15) es equivalente a que k^2 sea un valor propio de $-\Delta$ (sobre el dominio Ω). Esta ecuación puede ser resuelta por medio de separación de variables.

También se puede considerar el correspondiente problema de Newmann

$$(16) \quad \begin{cases} -\Delta\mu = k^2\mu + h, & \Omega \\ \partial_n\mu = f, & \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\partial_n\mu$ denota la derivada normal respecto al borde $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

4.5.2. Helmholtz en grafos métricos finitos. — Supongamos ahora que tenemos un grafo $\mathcal{G} = (V, E)$, el cual asumiremos simple, finito y conexo, y una métrica $d : E \rightarrow (0, +\infty)$.

Sea $W \subset V$, $W \neq \emptyset$, $V - W \neq \emptyset$. Consideremos una función $\sigma : W \rightarrow V - W$ y valores reales b_w ($w \in W$), a_v ($v \in V - W$), no necesariamente diferentes.

El problema de Newmann (16) puede ser adaptado a el grafo métrico anterior como

$$(17) \quad \begin{cases} \Delta_2\mu(v) = k^2\mu(v) + a_v, & v \in V - W \\ \mu(w) - \mu(\sigma(w)) = b_w, & w \in W \end{cases}$$

Para analizar la existencia de soluciones de la ecuación (17), escribamos

$$V = \{v_1, \dots, v_m\}$$

$$W = \{v_1, \dots, v_n\}$$

donde $0 < n < m$. La matriz J_2 representando a Δ_2 puede ser escrita como

$$J_2 = \begin{bmatrix} A & {}^tC \\ C & D \end{bmatrix}$$

donde A y D son matrices simétricas (positivas semi-definidas) de tamaño n y $(m - n)$ respectivamente.

La función σ puede ser entonces pensada como una función en los índices

$$\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{n + 1, \dots, m\}.$$

Definamos la matriz $M_\sigma = [m_{ij}]$ por

$$m_{ij} = \begin{cases} -1, & \sigma(i) = n + j \\ 0, & \sigma(i) \neq n + j. \end{cases}$$

Sean $b_j = b_{v_j}$ ($j = 1, \dots, n$) y $a_r = a_{v_{n+r}}$ ($r = 1, \dots, m - n$),

$$b = {}^t [b_1 \cdots b_n]$$

$$a = {}^t [a_1 \cdots a_{m-n}]$$

$$\mu(v_j) = \begin{cases} x_j, & j = 1, \dots, n \\ y_{j-n}, & j = n+1, \dots, m. \end{cases}$$

Con las notaciones anteriores, la ecuación (17) puede escribirse matricialmente como

$$(18) \quad \begin{bmatrix} I_n & M_\sigma \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ k^2 y + a \end{bmatrix}$$

Esta última ecuación dice que

$$(19) \quad \begin{cases} x = b - M_\sigma y \\ (D - CM_\sigma - k^2 I_n)y = a - Cb. \end{cases}$$

Ahora podemos concluir el siguiente resultado de existencia de soluciones.

Proposición 4.5.1. — *El problema (17) tiene solución única si, y sólo si, k^2 no es un valor propio de $D - CM_\sigma$. En el caso contrario, tal ecuación puede no tener soluciones y si las tiene éstas son infinitas soluciones.*

Ejemplo 19. — *Consideremos el grafo completo K_2 . En este caso $V = \{v_1, v_2\}$ y sea $w = 1/d(\{v_1, v_2\}) > 0$. Tomemos $W = \{v_1\}$, $b_{v_1} = b$ y $a_{v_2} = a$. En este caso,*

$$J_2 = \begin{bmatrix} w & -w \\ -w & w \end{bmatrix}$$

$$M_\sigma = [-1]$$

$$D - CM_\sigma = 0.$$

Luego, si $k \neq 0$, entonces la ecuación (17) tiene solución única, siendo ésta dada por

$$\begin{cases} x = (bk^2 - a - wb)/k^2 \\ y = -(a + wb)/k^2 \end{cases}$$

Si $k = 0$ y $wb \neq -a$, entonces no hay solución. Pero si $k = 0$ y $wb = -a$, entonces tenemos infinitas soluciones.

Observación 4.5.2. — Lo anterior puede ser adaptado al caso que V es infinito numerable y W es finito sin mayores problemas.

4.6. La ecuación de Navier-Stokes en grafos

Las *ecuaciones de Navier-Stokes* son usadas para el estudio de la mecánica de fluidos incompresibles, movimiento de estrellas dentro de una galaxia, alas de aviones, etc. En esta sección adaptaremos estas ecuaciones (caso de fluidos incompresibles y Newtonianos) al caso de grafos finitos. Es importante notar el libro [12] donde se utiliza el método de elementos finitos para el estudio de la ecuación de Navier-Stokes.

4.6.1. Situación clásica. — Las *ecuaciones de Navier-Stokes*, en el caso de un flujo incompresible (en dimensión n), son dadas por

$$(20) \quad \rho \left(\frac{\partial \nu}{\partial t} + \nu \cdot \nabla \nu \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \nu + f$$

donde $\rho = \rho(x, t)$ es una función real (usualmente positiva) dependiendo de las variables de tiempo t y posición x , $\nu = \nu(x, t)$ representa la *velocidad del fluido* incompresible, $p = p(x, t)$ representa la *presión* y $f(x, t)$ representa una *fuerza externa*.

El factor $\nu \cdot \nabla \nu$ es llamada la *aceleración convectiva* y $\mu \nabla^2 \nu$ la *viscosidad del fluido*. Además, si $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, entonces

$$\begin{aligned} \nu \cdot \nabla \nu &:= (\nu \cdot \nabla \nu_1, \dots, \nu \cdot \nabla \nu_n) \\ \nabla^2 \nu &:= (\Delta \nu_1, \dots, \Delta \nu_n). \end{aligned}$$

El fluido es llamado un *fluido Newtoniano* si este conserva su masa, es decir, satisface la *ecuación de conservación de Newton*

$$(21) \quad \nabla \cdot \nu = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \nu_j}{\partial x_j} = 0$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Uno de los grandes problemas es la existencia y suavidad de las soluciones. De hecho, el instituto de Matemáticas de Clay ha ofrecido un premio de un millón de dolares por solucionar este problema.

4.6.2. Adaptación de Navier-Stokes a grafos. — Consideremos un grafo $\mathcal{G} = (V, E)$, el cual será asumido simple, finito y conexo. Denotemos por

$$V = \{v_1, \dots, v_m\}$$

y supongamos que el grado de cada vértice es al menos $n > 0$ (luego, $0 < n \leq m$).

Fijemos de ahora en adelante n permutaciones

$$\sigma_1, \dots, \sigma_n : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\} \in \mathfrak{S}_m$$

de manera que para cada $j = 1, \dots, m$ valen las siguiente propiedades :

1. $\sigma_r(j) \neq \sigma_s(j)$, para $r \neq s$;
2. $v_{\sigma_r(j)}$ es vecino de v_j .

Fijemos también una métrica $d : E \rightarrow (0, +\infty)$ para así poder definir derivadas direccionales para funciones $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos su n -gradiente como

$$(22) \quad \nabla_n \alpha(v_j) := \left(\partial_{v_{\sigma_1(j)}} \alpha(v_j), \dots, \partial_{v_{\sigma_n(j)}} \alpha(v_j) \right).$$

Observación 4.6.1. — Notemos que la definición del n -gradiente depende de las elecciones de las funciones σ_j y de su orden.

Consideremos ahora funciones :

$$\rho, p : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

ambas derivables respecto a la variable real, y

$$f : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : (v, t) \mapsto (f_1(v, t), \dots, f_n(v, t))$$

continua en la variable real.

El problema adaptado de Navier-Stokes consiste en buscar soluciones

$$\nu : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : (v, t) \mapsto (\nu_1(v, t), \dots, \nu_n(v, t))$$

derivables en la variable real de la *ecuación de Navier-Stokes discreta*

$$(23) \quad \begin{cases} \rho(v_j, t) \left(\frac{\partial \nu}{\partial t}(v_j, t) + \nu(v_j, t) \cdot \nabla_n \nu(v_j, t) \right) \\ \quad \parallel \\ -\nabla_n p(v_j, t) + \mu \nabla^2 \nu(v_j, t) + f(v_j, t), \\ \quad \quad \quad j = 1, \dots, n, \end{cases}$$

donde

$$\nu \cdot \nabla_n \nu := (\nu \cdot \nabla_n \nu_1, \dots, \nu \cdot \nabla_n \nu_n)$$

$$\nabla^2 \nu := (-\Delta_2 \nu_1, \dots, -\Delta_2 \nu_n).$$

Sea J_2 la matriz Laplaciana discreta (que representa a Δ_2) y definamos, para $j = 1, \dots, m$ y $k = 1, \dots, n$, los siguientes

$$\rho_j(t) := \rho(v_j, t)$$

$$p_j(t) := p(v_j, t)$$

$$f_j^k(t) := f_k(v_j, t)$$

$$\nu_j^k(t) := \nu_k(v_j, t)$$

$$\rho := {}^t[\rho_1 \cdots \rho_m]$$

$$p := {}^t[p_1 \cdots p_m]$$

$$f^k := {}^t[f_1^k \cdots f_m^k]$$

$$\nu^k := {}^t[\nu_1^k \cdots \nu_m^k]$$

$$L_k = [l_{ij}^k], \quad k = 1, \dots, n,$$

$$l_{ij}^k = \begin{cases} \frac{-1}{d(\{v_i, v_{\sigma_k(i)}\})}, & i = j \\ \frac{1}{d(\{v_i, v_{\sigma_k(i)}\})}, & \sigma_k(i) = j \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$M = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \rho_m \end{bmatrix}$$

$$S_k = \begin{bmatrix} \nu_1^k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \nu_m^k \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Usando las notaciones anteriores, la ecuación (23) puede escribirse como

$$(24) \quad \dot{v}^k + \sum_{l=1}^n S_l L_l v^k = -M^{-1} L_k p - \mu M^{-1} J_2 v^k + M^{-1} f^k, \quad k = 1, \dots, n.$$

y la ecuación de conservación de Newton queda escrita como

$$(25) \quad \sum_{k=1}^n L_k v^k = 0.$$

Observación 4.6.2. — El tipo de ecuaciones que hemos obtenido es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con restricciones del tipo algebraico

$$(26) \quad \begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ E(x) = 0. \end{cases}$$

Ejemplo 20. — Sea el grafo completo K_2 , $V = \{v_1, v_2\}$, $w = 1/d(\{v_1, v_2\}) > 0$, $n = 1$, $\sigma_1(1) = 2$ y $\sigma_1(2) = 1$. En este caso, $\nu_1(t) = \nu(v_1, t)$, $\nu_2(t) = \nu(v_2, t)$,

$$L_1 = \begin{bmatrix} -w & w \\ w & -w \end{bmatrix} = -J_2$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix}.$$

La condición algebraica (25) nos asegura que

$$\nu_1 = \nu_2.$$

Luego, la ecuación (24) queda dada por

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \dot{\nu}_1 \\ \dot{\nu}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -w & w \\ w & -w \end{bmatrix}}_0 \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_1 \end{bmatrix} = \\ = & \begin{bmatrix} -\rho_1^{-1} & 0 \\ 0 & -\rho_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -w & w \\ w & -w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} \rho_1^{-1} & 0 \\ 0 & \rho_2^{-1} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} w^2 & -w^2 \\ -w^2 & w^2 \end{bmatrix}}_0 \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_1 \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} \rho_1^{-1} & 0 \\ 0 & \rho_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{bmatrix} \dot{\nu}_1 \\ \dot{\nu}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1^{-1} w (p_1 - p_2 + f_1/w) \\ \rho_2^{-1} w (-p_1 + p_2 + f_2/w) \end{bmatrix}.$$

La ecuación anterior tendrá solución si, y sólo si,

$$w(\rho_1 + \rho_2)(p_1 - p_2) = \rho_1 f_2 - \rho_2 f_1$$

en cuyo caso tendrá infinitas soluciones.

CAPÍTULO 5

APLICACIONES NUMÉRICAS

En los capítulos anteriores hemos visto como adaptar algunas ecuaciones diferenciales parciales al caso de grafos métricos. Hasta ahora sólo nos hemos preocupado de tales adaptaciones, pero no hemos intentado usar esta técnica para ver como obtener soluciones numéricas aproximadas de tales ecuaciones clásica. Para este propósito, el método clásico de las diferencias finitas discretiza tanto el espacio como el tiempo. Nosotros sólo nos preocuparemos de discretizar el espacio. Consideramos a continuación tres ejemplos, uno de dimensión 1 y otros dos de dimensión 2 (uno de ellos no acotado).

5.1. Un ejemplo 1-dimensional

Consideremos la ecuación de difusión dada por la siguiente ecuación parabólica

$$(27) \quad \begin{cases} \mu_t &= \mu_{xx}, & t > 0, x \in (0, 1) \\ \mu(0, t) &= \mu(1, t) = 0, & t > 0 \\ \mu(x, 0) &= f(x), & x \in (0, 1) \end{cases}$$

donde $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real continua dada.

5.1.1. Aproximación discreta. — Consideremos el grafo cuyos vértices son

$$v_1 = 0 < v_2 < v_3 < \cdots < v_{n-1} < v_n = 1$$

y cuyos ejes son

$$\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{j-1}, v_j\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}.$$

Utilizemos la métrica d dada por

$$d(\{v_j, v_{j+1}\}) = d_j = v_{j+1} - v_j > 0, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

y definamos los valores

$$w_j = \frac{1}{d_j^2}, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

En este caso, la ecuación (27) queda adaptada al grafo métrico anterior como

$$(28) \quad \begin{cases} \mu_t(v_j, t) = -\Delta_2 \mu(v_j, t), & j \in \{2, \dots, n-1\}, t > 0 \\ \mu(v_1, t) = \mu(v_n, t) = 0, & t > 0 \\ \mu(v_j, 0) = f(v_j), & j \in \{2, \dots, n-1\} \end{cases}$$

Si identificamos, al igual que antes, $\mu(\cdot, t)$ con el vector

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

donde

$$x_j(t) = \mu(v_j, t), \quad j = 1, \dots, n,$$

entonces la ecuación (28) queda dada por

$$(29) \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = -[{}^t J_{12} \ L \ J_{23}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ x_1 = x_n = 0 \\ x_2(0) = f(v_2), \dots, x_{n-1}(0) = f(v_{n-1}) \end{cases}$$

donde la matriz J_2 asociada al operador de Laplace discreto Δ_2 , en este caso, tiene la forma

$$J_2 = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ {}^t J_{12} & L & J_{23} \\ J_{13} & {}^t J_{23} & J_{33} \end{bmatrix}$$

con ambas J_{11} y J_{33} cuadradas de tamaño 1×1 , L de tamaño $(n-2) \times (n-2)$ con la forma

$$L = \begin{bmatrix} w_1 + w_2 & -w_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -w_2 & w_2 + w_3 & -w_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -w_3 & w_3 + w_4 & -w_4 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & w_{n-3} + w_{n-2} & -w_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -w_{n-2} & w_{n-2} + w_{n-1} \end{bmatrix}$$

Ahora, la ecuación (29) es equivalente a

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \end{bmatrix} = -L \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} \\ x_1(t) = x_n(t) = 0 \\ x_2(0) = f(v_2), \dots, x_{n-1}(0) = f(v_{n-1}) \end{array} \right.$$

cuya solución es

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \end{bmatrix} = e^{-Lt} \begin{bmatrix} f(v_2) \\ \vdots \\ f(v_{n-1}) \end{bmatrix} \\ x_1(t) = x_n(t) = 0. \end{array} \right.$$

Notemos que el Lema 2.10.1 nos asegura que L es de hecho una matriz positiva definida.

5.1.2. Caso división homogénea. — Si consideramos la elección de manera que $d_j = 1/n$, es decir, $v_j = (j-1)/(n-1)$, entonces $w_j = (n-1)^2$ y el espectro de L es dado por

$$\lambda_{r,n} = 2(n-1)^2 \left(\cos \left(\frac{r\pi}{n-1} \right) - 1 \right), \quad r = 1, \dots, n-2.$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = \frac{-1}{2},$$

se puede ver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{r,n} = -r^2\pi^2$$

Ahora, recordemos que cuando resolvemos el problema (27) por medio de separación de variables, obtenemos que la solución es dada por

$$\mu(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} C_r e^{-r^2\pi^2 t} \sin(r\pi x),$$

donde los coeficientes C_r son los de la extensión impar de $f(x)$, es decir

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} C_r \sin(r\pi x).$$

Todo lo anterior asegura que las soluciones obtenidas en (31) aproximan la solución clásica.

5.2. Grafos planares adecuados

Supongamos que tenemos un dominio planar acotado Ω con borde Γ , en general una colección finita de curvas de Jordan rectificables.

Uno podría partir, a priori, con cualquier grafo simple, finito, conexo, planar $\mathcal{G} = (V, E)$ cuyos vértices están en $\Omega \cup \Gamma$ y considerar como métrica en cada de sus ejes como la distancia Euclidiana entre sus vértices.

Si $\mu \in C^0(\mathcal{G})$, $v \in V \cap \Omega$ y $N(v) = \{v_1, \dots, v_{r_v}\}$, entonces

$$\Delta_2 \mu(v) = \sum_{j=1}^{r_v} \frac{\mu(v) - \mu(v_j)}{d(\{v, v_j\})^2}.$$

Escribamos $v_j = v + d_{j,v} \cdot (a_{j,v}, b_{j,v})$, donde $a_{j,v}^2 + b_{j,v}^2 = 1$, para cada $j = 1, \dots, r_v$; luego $d(\{v, v_j\}) = d_{j,v}$. Si mantenemos fijos los vectores unitarios $(a_{j,v}, b_{j,v})$, entonces

$$\begin{aligned} & \lim_{(d_{1,v}, \dots, d_{r_v,v}) \rightarrow (0, \dots, 0)} \sum_{j=1}^{r_v} \frac{\mu(v) - \mu(v_j)}{d_{j,v}^2} \\ & \quad \parallel \\ & \frac{1}{2} \left\{ \left(\sum_{j=1}^{r_v} a_{j,v}^2 \right) \frac{\partial^2 \mu(v)}{\partial x^2} + \left(\sum_{j=1}^{r_v} b_{j,v}^2 \right) \frac{\partial^2 \mu(v)}{\partial y^2} + 2 \left(\sum_{j=1}^{r_v} a_{j,v} b_{j,v} \right) \frac{\partial^2 \mu(v)}{\partial x \partial y} \right\}. \end{aligned}$$

Si queremos usar Δ_2 para aproximar $-\Delta$, debemos escoger el grafo \mathcal{G} de manera que exista $D > 0$ tal que en cada vértice $v \in \Omega \cap V$ valgan las igualdades

$$(P1) \quad \sum_{j=1}^{r_v} a_{j,v}^2 = D = \sum_{j=1}^{r_v} b_{j,v}^2,$$

$$(P2) \quad \sum_{j=1}^{r_v} a_{j,v} b_{j,v} = 0.$$

Bajo tales condiciones tendremos que $\frac{2}{D} \Delta_2$ será quien aproxime $-\Delta$.

5.2.1. Grafos regulares. — Consideremos grafos $\widehat{\mathcal{G}} = (\widehat{V}, \widehat{E})$ (necesariamente infinitos) simples, conexos y planares (cuyos ejes son arcos suaves; por ejemplo, arcos de rectas, arcos de círculo, etc) que dividen al plano en polígonos y de manera que en cada vértice $v \in \widehat{V}$ los ejes están equi-distanciados angularmente, es decir, si en tal vértice llegan $n_v \geq 3$ ejes, entonces ellos definen secciones cónicas de ángulo $2\pi/n_v$. Bajo estas condiciones se satisface la condición (P2), pero se tiene que en el vértice v vale que

$$\sum_{j=1}^{r_v} a_{j,v}^2 = \frac{n_v}{2} = \sum_{j=1}^{r_v} b_{j,v}^2.$$

Así, para poder tener garantizada la condición (P1), necesitamos tener que $n_v = n$ es independiente de v , en cuyo caso $D = n/2$.

Por otro lado, si hacemos la restricción $n = n_v$ para todo vértice $v \in \widehat{V}$, entonces los polígonos que aparecen como complemento de tal grafo planar tienen ángulos interiores

todos iguales a $2\pi/n$. Consideremos un tal polígono P y denotemos por $L_P \geq 3$ el número de lados que tiene. Entonces debemos tener

$$(L_P - 2) = 2L_P/n,$$

de donde se obtiene que $L = L_P$ es independiente del polígono y además

$$(n, L) \in \{(3, 6), (4, 4), (6, 3)\}.$$

Para el caso $(n, L) = (3, 6)$ (donde $2/D = 4/3$) obtenemos grafos hexagonales (ver Figura 5.3 para el caso en que los ejes son arcos de recta), para el caso $(n, L) = (4, 4)$ (donde $2/D = 1$) obtenemos grafos reticulares (ver Figura 5.1 para el caso en que los ejes son arcos de recta) y para el caso $(n, L) = (6, 3)$ (donde $2/D = 2/3$) obtenemos grafos triangulares (una teselación del plano por polígonos triangulares equiláteros). Los grafos triangulares generan de manera dual un grafo hexagonal particular.

Módulo traslaciones y rotaciones, los grafos reticulares y hexagonales dependen de infinitos parámetros.

5.2.2. Grafos adaptados a regiones planas. — Supongamos que hemos escogido un grafo regular $\widehat{\mathcal{G}} = (\widehat{V}, \widehat{E})$ for some $(n, L) \in \{(3, 6), (4, 4), (6, 3)\}$. En general, uno utiliza ejes que sean arcos de recta y/o arcos de círculo.

Para Ω y Γ como antes, formamos un grafo simple, conexo, finito $\mathcal{G} = (V, E)$ como sigue. Escogemos V como la unión de $\widehat{V} \cap \Omega$ con $(\widehat{V} \cup \widehat{E}) \cap \Gamma$. Como ejes en E escogemos $\widehat{E} \cap \Omega$ y todos los ejes que conectan dos ejes contenidos en la misma componente de Γ de manera cíclica (ver Figuras 5.1 y 5.4 para el caso en que todos los ejes son arcos de recta).

Ahora, por lo visto en la Sección anterior, consideramos $\frac{2}{D}\Delta_2$ para aproximar $-\Delta$. A continuación explicamos lo anterior (para el caso reticular y hexagonal) para un ejemplo particular.

5.3. Un ejemplo 2-dimensional

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado con frontera $\Gamma = \partial\Omega$ dada por una colección finita de curvas de Jordan (en general diferenciables). Consideremos el problema

$$(32) \quad \begin{cases} \mu_t &= \Delta\mu, & t > 0, x \in \Omega \\ \mu(x, t) &= 0, & t > 0, x \in \Gamma \\ \mu(x, 0) &= f(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

donde $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua dada.

5.3.1. Aproximación discreta usando grafos reticulares. — Consideramos un reticulado planar $\mathcal{L} = (V_{\mathcal{L}}, E_{\mathcal{L}})$, es decir, un grafo infinito que se obtiene al considerar una colección de rectas paralelas a los ejes coordenados; los vértices son los puntos de intersección de tales rectas y los ejes son los arcos de tales rectas determinados por tales puntos (ver Figura 5.1).

Denotemos por v_1, \dots, v_n los puntos de intersección de las rectas que generan \mathcal{L} con Γ . Podemos asumir que ellos están indexados de manera que siguen el orden al viajar por la curva Γ en dirección opuesta a las manecillas del reloj. Ahora, sean v_{n+1}, \dots, v_m los vértices de \mathcal{L} que están contenidos en Ω .

Consideramos el grafo \mathcal{G} cuyos vértices son

$$V = \{v_1, \dots, v_m\},$$

y sus ejes son

$$\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\},$$

y todos los arcos de rectas de las rectas que generan \mathcal{L} determinados por tales puntos (ver Figura 5.1). Notemos que los vértices del grafo \mathcal{G} contenidos en Ω tienen valencia 4 mientras que aquellos en Γ tienen valencia 3.

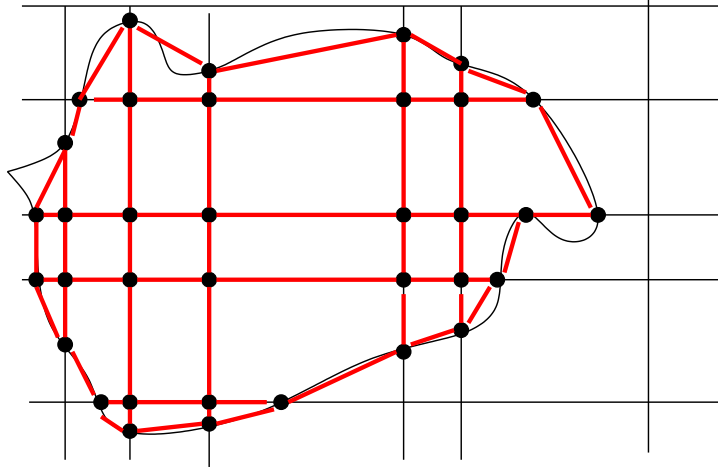


FIGURA 5.1. El grafo dibujado en rojo

Definimos como métrica en el grafo \mathcal{G} la distancia Euclidiana entre los vértices de cada eje. Luego la ecuación (32) queda dado, en tal grafo métrico, por

$$(33) \quad \begin{cases} \mu_t(v_j, t) = -\Delta_2 \mu(v_j, t), & j \in \{n+1, \dots, m\}, t > 0 \\ \mu(v_j, t) = 0, & j \in \{1, \dots, n\}, t > 0 \\ \mu(v_j, 0) = f(v_j), & j \in \{n+1, \dots, m\} \end{cases}$$

Si identificamos, al igual que antes, $\mu(\cdot, t)$ con el vector

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix}$$

donde

$$x_j(t) = \mu(v_j, t), \quad j = 1, \dots, m,$$

entonces la ecuación (33) queda dada por

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_{n+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = -[R \ S] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \\ x_1 = \dots = x_n = 0 \\ x_{n+1}(0) = f(v_{n+1}), \dots, x_m(0) = f(v_m) \end{array} \right.$$

donde la matriz J_2 asociada al operador de Laplace discreto Δ_2 en este caso tiene la forma

$$J_2 = \begin{bmatrix} U & {}^tR \\ R & S \end{bmatrix}$$

con U es una matriz de tamaño $n \times n$ y S es de tamaño $(m - n) \times (m - n)$.

Ahora, la ecuación (34) es equivalente a

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_{n+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = -S \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \\ x_1(t) = \dots = x_n(t) = 0 \\ x_{n+1}(0) = f(v_{n+1}), \dots, x_m(0) = f(v_m) \end{array} \right.$$

de donde obtenemos la solución

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x_{n+1}(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix} = e^{-St} \begin{bmatrix} f(v_{n+1}) \\ \vdots \\ f(v_m) \end{bmatrix} \\ x_1(t) = \dots = x_n(t) = 0. \end{array} \right.$$

Notemos que el Lema 2.10.1 nos asegura que la matriz S es una matriz positiva definida.

5.3.2. Aproximación discreta usando grafos hexagonales. — Un hexágono en el plano es una traslación del hexágono con vértices $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (c/2, -c\sqrt{3}/2)$, $P_3 = (a - c/2, -c\sqrt{3}/2)$, $P_4 = (a, 0)$, $P_5 = (a - b/2, b\sqrt{3}/2)$ y $P_6 = (b/2, b\sqrt{3}/2)$, donde $a, b, c > 0$ (ver Figura 5.2).

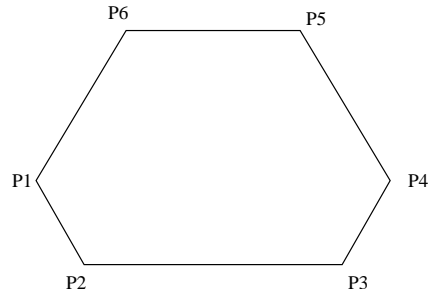


FIGURA 5.2

Usando diferentes hexágonos, uno puede construir una teselación del plano (ver Figura 5.3).

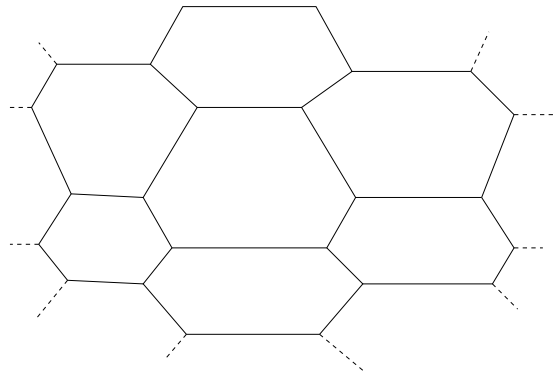


FIGURA 5.3

Ahora procedemos igual que en el caso reticular a considerar un grafo cuyos vértices son dados por la intersección de Γ con los ejes de la teselación y los vértices de la teselación que están en el dominio Ω (ver Figura 5.4). Al igual que antes, podemos asumir que los vértices del borde son dados por v_1, \dots, v_n y los del interior son dados por v_{n+1}, \dots, v_m .

Definimos como métrica en el grafo \mathcal{G} la distancia Euclidiana entre los vértices de cada eje. Luego la ecuación (32) queda dado, en tal grafo métrico, por

$$(37) \quad \begin{cases} \mu_t(v_j, t) &= \frac{-4}{3} \Delta_2 \mu(v_j, t), & j \in \{n+1, \dots, m\}, t > 0 \\ \mu(v_j, t) &= 0, & j \in \{1, \dots, n\}, t > 0 \\ \mu(v_j, 0) &= f(v_j), & j \in \{n+1, \dots, m\} \end{cases}$$

Ahora se puede proceder como en el caso reticular, excepto que ahora debemos usar la matriz $\frac{1}{3}J_2$ en vez de J_2 .

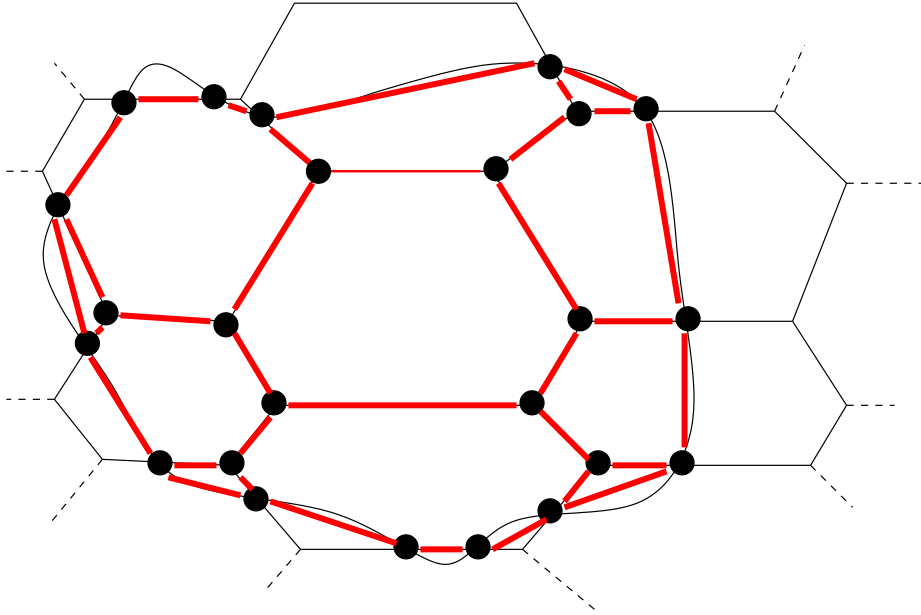


FIGURA 5.4. El grafo está dibujado en rojo

5.4. Caso de anillos

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un anillo cuyos bordes son Γ_0 y Γ_1 (ambas curvas de Jordan rectificables), $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas y consideremos el problema de Dirichlet

$$(38) \quad \begin{cases} \Delta\mu = f, & \Omega \\ \mu = g, & \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \end{cases}$$

La idea ahora es aproximar la solución de (38) por el método de diferencias finitas sobre grafos similares al descrito en la sección anterior. La única diferencia es que ahora tenemos dos curvas en el borde (ver Figura 5.5 para el caso reticular). Definimos como métrica en tal grafo la distancia Euclidiana entre los vértices de cada eje. Supongamos que los vértices en el borde son v_1, \dots, v_n y los que están en el interior son v_{n+1}, \dots, v_m .

La ecuación (38) queda dado, en tal grafo métrico reticular, por

$$(39) \quad \begin{cases} -\Delta_2\mu(v_j) = f_\rho(v_j), & j \in \{n+1, \dots, m\} \\ \mu(v_j) = g_\rho(v_j), & j \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

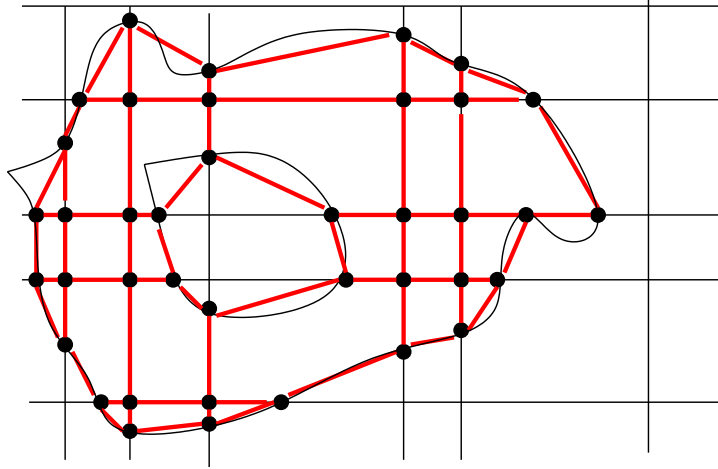


FIGURA 5.5. El grafo dibujado en rojo

Consideremos los vectores

$$a = \begin{bmatrix} g_\rho(v_1) \\ \vdots \\ g_\rho(v_n) \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} f_\rho(v_{n+1}) \\ \vdots \\ f_\rho(v_m) \end{bmatrix}$$

Supongamos que la matriz J_2 en este caso tiene la forma

$$J_2 = \begin{bmatrix} U & {}^tR \\ R & S \end{bmatrix}$$

Como consecuencia del Lema 2.10.1, S es invertible (de hecho positiva definida). Entonces, la solución μ del problema (39) tiene la forma

$$\begin{bmatrix} \mu(v_1) \\ \vdots \\ \mu(v_n) \end{bmatrix} = -a$$

$$\begin{bmatrix} \mu(v_{n+1}) \\ \vdots \\ \mu(v_m) \end{bmatrix} = S^{-1}(Ra - b)$$

En el caso de grafos hexagonales la ecuación (38) queda dado por

$$(40) \quad \begin{cases} -\Delta_2 \mu(v_j) = \frac{3}{4} f_\rho(v_j), & j \in \{n+1, \dots, m\} \\ \mu(v_j) = g_\rho(v_j), & j \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

5.5. Dominios no acotados

A continuación veremos como adaptar las técnicas anteriores en dominios acotados a dominios no acotados. Consideremos un dominio acotado $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$ con frontera dada por una curva de Jordan Γ_0 .

Sean $\Omega = \mathbb{R}^2 - \Omega_0$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas y consideremos el problema de Dirichlet (dejaremos de lado por el momento la condición de las soluciones hacia el infinito)

$$(41) \quad \begin{cases} \Delta \mu &= f, & \Omega \\ \mu &= g, & \Gamma_0 \end{cases}$$

Ya que las traslaciones son funciones armónicas, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $0 \in \Omega_0$.

5.5.1. Proceso de simetrización. —

5.5.1.1. *Una simetrización.* — Tomemos $\rho > 0$ de manera que

$$\Omega_0 \subset D_\rho = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \rho\},$$

y sea

$$R(x, y) = \left(\frac{\rho^2 x}{x^2 + y^2}, \frac{\rho^2 y}{x^2 + y^2} \right)$$

la reflexión en $S_\rho = \partial D_\rho$. Definamos los conjuntos

$$\begin{aligned} \Gamma_\rho &= R(\Gamma_0) \\ \Omega_\rho^0 &= \Omega \cap D_\rho, \\ \Omega_\rho^1 &= R(\Omega_\rho^0), \\ \Omega_\rho &= S_\rho \cup \Omega_\rho^0 \cup \Omega_\rho^1. \end{aligned}$$

Consideremos las funciones

$$\begin{aligned} f_\rho &: \Omega_\rho \rightarrow \mathbb{R} \\ g_\rho &: \Gamma_0 \cup \Gamma_\rho \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

definidas por

$$f_\rho(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in S_\rho \cup \Omega_\rho^0 \\ \frac{\rho^4}{(x^2 + y^2)^2} f(R(x, y)), & (x, y) \in R(\Omega_\rho^0) \end{cases}$$

y

$$g_\rho(x, y) = \begin{cases} g(x, y), & (x, y) \in \Gamma_0 \\ g(R(x, y)), & (x, y) \in \Gamma_\rho \end{cases}$$

Por la construcción, es clara la continuidad de g_ρ y notemos que f_ρ es también continua ya que para $(x, y) \in S_\rho$ se tiene que $R(x, y) = (x, y)$ y $\rho^4 = (x^2 + y^2)^2$. Consideremos ahora el problema de Dirichlet

$$(42) \quad \begin{cases} \Delta \nu_\rho &= f_\rho, & \Omega_\rho \\ \nu_\rho &= g_\rho, & \Gamma_0 \cup \Gamma_\rho \end{cases}$$

5.5.1.2. *Una posible aproximación.* — Supongamos que existe una solución μ al problema de Dirichlet (41). Entonces podemos definir la nueva función

$$\mu_\rho : \Omega_\rho \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$\mu_\rho(x, y) = \begin{cases} \mu(x, y), & (x, y) \in S_\rho \cup \Omega_\rho^0 \\ \mu(R(x, y)), & (x, y) \in R(\Omega_\rho^0) \end{cases}$$

Es claro que μ_ρ es continua y es del mismo tipo de diferenciabilidad que μ sobre $\Omega_\rho - S_\rho$ y que allí vale que $\Delta \mu_\rho = f_\rho$. Luego, μ_ρ es solución (débil) al problema de Dirichlet (42) la cual es simétrica respecto a la reflexión R . Desgraciadamente, el problema simetrizado no tiene solución única (por ejemplo, considere Γ_0 como el círculo unitario y $g(x, y) = 0$. En este caso obtenemos que las soluciones $\eta_1 = 0$ y η_2 la simetrización de la solución fundamental $\log(x^2 + y^2)$).

La gracia es que ahora hemos transformado el problema de Dirichlet (41) en un dominio no acotado al problema de Dirichlet (42) en un dominio acotado homeomorfo a un anillo. Además, se tiene que por cada solución del problema original existe una sucesión de soluciones débiles simetrizadas (de problemas simetrizados dependiendo del radio ρ) convergiendo (localmente uniforme) a tal solución. Desgraciadamente, la no unicidad de soluciones débiles simetrizadas del problema simetrizado produce problemas con este procedimiento. La idea general para resolver este proceso es escoger una sucesión creciente $\rho_n > 0$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \infty$, escoger una solución simetrizada del problema simetrizado para ρ_1 y exigir que la restricción al dominio $\Omega_{\rho_n}^0$ de la solución simetrizada correspondiente a ρ_{n+1} coincida con la restricción al mismo dominio de la solución simetrizada del problema correspondiente a ρ_n .

Para el proceso de discretización de este tipo de dominios anulares simétricos, conviene usar como grafos aquellos reticulares que se forman con rectas por el origen y círculos concéntricos en el origen (aquí conviene tener uno de tales círculos igual al círculo de reflexión).

5.5.2. Reducción a un dominio acotado. — Identifiquemos el plano \mathbb{R}^2 con el plano complejo \mathbb{C} . Sean $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $U^* = U - \{0\}$, $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y $\bar{U} = U \cup S^1$. Consideremos una aplicación de Riemann

$$\phi : U^* \rightarrow \Omega$$

La aplicación de Riemann ϕ es única módulo composición a la derecha por una rotación $R(z) = e^{i\theta}z$. Como Γ es una curva de Jordan (la cual es localmente arcoconexa), por el Teorema de extensión de Cartheodory, podemos extender continuamente ϕ a un homeomorfismo

$$\phi : U^* \cup S^1 \rightarrow \Omega \cup \Gamma$$

y podemos reescribir (41) en $U^* \cup S^1$ como

$$(43) \quad \begin{cases} \Delta\nu &= F_\phi(z), & z \in U^* \\ \nu(z) &= g(\phi(z)), & z \in S^1 \end{cases}$$

donde $\nu(z) = \mu(\phi(z))$ y $F_\phi(z) = |\phi'(z)|^2 f(\phi(z))$.

Ya que $\lim_{z \rightarrow 0} \phi(z) = \infty$, podemos extender continuamente ϕ a un homeomorfismo

$$\phi : \bar{U} \rightarrow \bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma \cup \{\infty\} \subset \hat{\mathbb{C}}$$

Como consecuencia del Teorema de Morera, la restricción de tal extensión a U es un biholomorfismo entre U y $\Omega \cup \{\infty\}$. En particular, como ϕ es inyectiva, $|\phi'(0)| > 0$. De aquí se obtiene que si agregamos la condición

$$\lim_{w \rightarrow \infty} f(w) = A \in \mathbb{R},$$

entonces $\lim_{z \rightarrow 0} |\phi'(z)|^2 f(\phi(z)) = |\phi'(0)|^2 A$. En esta situación, el problema de Dirichlet (42) es equivalente al problema de Dirichlet

$$(44) \quad \begin{cases} \Delta\nu &= F_\phi(z), & z \in U \\ \nu(z) &= G_\phi(z), & z \in S^1 \end{cases}$$

donde $G_\phi(z) = g(\phi(z))$, el cual puede ser aproximado utilizando grafos conexos finitos (reticulares o hexagonales).

PARTE III

HOMOLOGÍA Y COHOMOLOGÍA EN GRAFOS Y MAPAS

CAPÍTULO 6

HOMOLOGÍA Y COHOMOLOGÍA EN GRAFOS

En este capítulo definiremos los grupos de homología y cohomología para grafos. En el siguiente capítulo daremos otra definición para el caso de mapas.

Consideremos un grafo $\mathcal{G} = (V, E)$ y un anillo conmutativo con unidad R .

6.1. Cadenas singulares en grafos

Consideramos el R -módulo generado por todos los vértices en V , el cual denotaremos por $C_0(\mathcal{G}, R)$. Un miembro de $C_0(\mathcal{G}, R)$, llamado una 0-cadena singular, es de la forma

$$\sum_{j=1}^n r_j v_j,$$

donde $r_j \in R$ y $v_j \in V$.

Escojamos una orientación por cada eje de E . Sea $e = \{v, w\} \in E$ un eje que conecta a los vértices v e w . Si tenemos una orientación donde v es el punto inicial, entonces usaremos la notación (v, w) para representar tal orientación. En este caso, usaremos la notación

$$(w, v) = -(v, w)$$

Podemos considerar el R -módulo generado por todos esos ejes orientados, el cual denotaremos por $C_1(\mathcal{G}, R)$. Un miembro de $C_1(\mathcal{G}, R)$, llamado una 1-cadena singular, es de la forma

$$e = \sum_{j=1}^n r_j (v_{j1}, v_{j2}),$$

donde $r_j \in R$ y v_{j1}, v_{j2} son vértices de \mathcal{G} que se conectan por un eje $\{v_{j1}, v_{j2}\} \in E$.

Ejercicio 35. — *Ver que la definición anterior no depende de la orientación escogida sobre los ejes del grafo.*

6.2. Homología de grafos

Una vez definidos los R -módulos de cadenas singulares, podemos definir el operador frontera, el cual es un homomorfismo entre R -módulos, dado por

$$\partial : C_1(\mathcal{G}, R) \rightarrow C_0(\mathcal{G}, R)$$

$$\partial \left(\sum_{j=1}^n r_j(v_{j1}, v_{j2}) \right) = \sum_{j=1}^n r_j(v_{j2} - v_{j1})$$

Se puede definir el primer grupo de homología del grafo \mathcal{G} con coeficientes en el anillo R al grupo Abelian

$$H_1(\mathcal{G}, R) = \text{Ker}(\partial)$$

y el cero grupo de homología del grafo \mathcal{G} con coeficientes en el anillo R al grupo Abelian

$$H_0(\mathcal{G}, R) = C_0(\mathcal{G}, R) / \text{Im}(\partial)$$

Ejercicio 36. — Calcular los grupos de homología del grafo K_n .

6.3. Co-cadenas singulares en grafos

Para $k = 0, 1$, denotamos por $C^k(\mathcal{G}, R)$ al R -módulo de homomorfismos entre R -módulos $f : C_k(\mathcal{G}, R) \rightarrow R$. Cada elemento de $C^k(\mathcal{G}, R)$ es llamada una k -co-cadena singular en \mathcal{G} . También hablaremos de una k -forma en el grafo.

Es claro que toda función $f : V \rightarrow R$ se puede extender a un homomorfismo entre R -módulos de la siguiente manera

$$f \left(\sum_{j=1}^n n_j v_j \right) = \sum_{j=1}^n n_j f(v_j)$$

y similarmente toda función $g : E \rightarrow R$ se puede extender a un homomorfismo entre R -módulos de la siguiente manera

$$g \left(\sum_{j=1}^n n_j e_j \right) = \sum_{j=1}^n n_j g(e_j)$$

Ejercicio 37. — Ver que todo elemento de $C^0(\mathcal{G}, R)$ está únicamente determinada por su restricción a V .

6.4. Operador de Derivación

El operador de derivación es el homomorfismo entre R -módulos dado por

$$d : C^0(\mathcal{G}, R) \rightarrow C^1(\mathcal{G}, R) : f \mapsto df,$$

donde

$$df : C_1(\mathcal{G}) \rightarrow K$$

$$df \left(\sum_{j=1}^n n_j(v_{j1}, v_{j2}) \right) = \sum_{j=1}^n n_j(f(v_{j2}) - f(v_{j1}))$$

Las 1-formas que están en la imagen del operador d son llamadas 1-formas exactas.

6.5. Cohomología de grafos

Se puede definir el primer grupo de cohomología del grafo \mathcal{G} con coeficientes en el anillo R al grupo Abeliano

$$H^1(\mathcal{G}, R) = C^1(\mathcal{G}, R)/Im(d)$$

y el cero grupo de cohomología del grafo \mathcal{G} con coeficientes en el anillo R al grupo Abeliano

$$H^0(\mathcal{G}, R) = Ker(d)$$

Ejercicio 38. — Calcular los grupos de cohomología del grafo K_n .

6.6. Integración en grafos

Sean $f, g \in C^0(\mathcal{G})$ y una 1-cadena

$$e = \sum_{j=1}^n n_j(v_{j1}, v_{j2}) \in C_1(\mathcal{G}, R)$$

donde R es un anillo conmutativo y con unidad. Se define la integral de g respecto a df como

$$\int_e g df = \sum_{j=1}^n n_j \int_{(v_{j1}, v_{j2})} g df = \sum_{j=1}^n n_j g \left(\frac{v_{j1} + v_{j2}}{2} \right) (f(v_{j2}) - f(v_{j1}))$$

De esta manera, el operador derivada puede escribirse como

$$df(e) = \int_e df$$

CAPÍTULO 7

HOMOLOGÍA Y COHOMOLOGÍA EN MAPAS

En este capítulo definiremos los grupos de homología y cohomología para mapas. En el capítulo anterior hemos dado una definición para el caso de grafos. El hecho que un mapa es una representación de un grafo en una superficie (la cual puede tener borde), podemos aprovechar la propiedad 2-dimensional de la superficie para definir grupos de homología y cohomología en dimensión 1. Este es el tipo de homología y cohomología que necesitaremos para los capítulos posteriores sobre superficies de Riemann discretas.

Consideremos un mapa $\mathcal{G} \subset \Sigma$ en una superficie (con posible borde $\partial\Sigma$) orientada Σ y R un anillo conmutativo y con unidad $1 \in R$. Denotemos por \mathcal{G}_0 sus vértices, por \mathcal{G}_1 sus aristas y por \mathcal{G}_2 sus caras.

En el caso en que $\partial\Sigma \neq \emptyset$, entonces debe ocurrir que cada componente del borde de Σ debe ser unión de aristas y vértices.

Consideremos una orientación sobre los aristas $e \in \mathcal{G}_1$ y en cada cara $F \in \mathcal{G}_2$ tenemos la orientación inducida por la orientación de Σ .

Indicaremos por (a, b) al arista orientado de manera que a es el vértice inicial y b es el vértice final.

7.1. Cadenas singulares en mapas

Procedemos de igual manera que en el caso general para definir los R -módulos de k -cadenas singulares, pero ahora para $k = 0, 1, 2$, como

$$C_k(\mathcal{G}, R) = \left\{ \sum_{x \in \mathcal{G}_k} n_x x : n_x \in R, n_x = 0 \text{ excepto un número finito de } x \text{'s} \right\}$$

Los elementos de $C_k(\mathcal{G}, R)$ son, al igual que antes, llamados las k -cadenas singulares.

Observación 7.1.1. — En caso que $R = \mathbb{Z}$ usaremos la notación $C_k(\mathcal{G}, \mathbb{Z}) = C_k(\mathcal{G})$.

Ejercicio 39. — Verificar que $C_k(\mathcal{G}, R)$ es un R -módulo y que no depende de la orientación escogida originalmente.

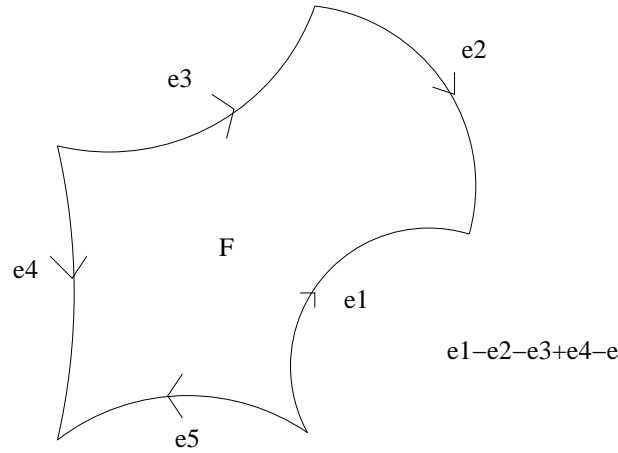


FIGURA 7.1

7.2. Operadores frontera

Para $k = 1, 2$ se define el operador frontera

$$\partial_k^{\mathcal{G}} : C_k(\mathcal{G}, R) \rightarrow C_{k-1}(\mathcal{G}, R)$$

de la siguiente manera.

$$\partial_1^{\mathcal{G}} \left(\sum_{e \in \mathcal{G}_1} n_e e \right) = \sum_{e \in \mathcal{G}_1} n_e \partial_1^{\mathcal{G}}(e)$$

donde

$$\partial_1(x_1, x_2) = x_2 - x_1$$

Ejercicio 40. — Ver que la definición de $\partial_1^{\mathcal{G}}$ no depende de la orientación escogida y que es un homomorfismo entre R -módulos.

Sea $F \in \mathcal{G}_2$, entonces (ver Figura 7.1)

$$\partial_2^{\mathcal{G}}(F) = \sum_{j=1}^n (-1)^{\delta_j} e_j$$

donde

$$\delta_j = \begin{cases} 0, & \text{si } e_j \text{ tiene orientación de manera que } F \text{ está a la izquierda} \\ 1, & \text{si } e_j \text{ tiene orientación de manera que } F \text{ está a la derecha} \end{cases}$$

De manera general,

$$\partial_2^{\mathcal{G}} \left(\sum_{F \in \mathcal{G}_2} n_F F \right) = \sum_{F \in \mathcal{G}_2} n_F \partial_2^{\mathcal{G}}(F)$$

Ejercicio 41. — Ver que la definición de $\partial_2^{\mathcal{G}}$ no depende de la orientación escogida y que es un homomorfismo entre R -módulos.

Proposición 7.2.1. —

$$\partial_1^{\mathcal{G}} \partial_2^{\mathcal{G}} = 0$$

Demonstración. — Tarea (Ind. Trabajar sólo con una cara). □

7.3. Primer grupo de Homología

El primer grupo de homología asociado al grafo \mathcal{G} y anillo R es definido como

$$H_1(\mathcal{G}, R) = \frac{Ker(\partial_1^{\mathcal{G}})}{Im(\partial_2^{\mathcal{G}})}$$

Los elementos de $Z_1(\mathcal{G}) = Ker(\partial_1^{\mathcal{G}})$ son llamados 1-cícl os y los elementos de $B_1(\mathcal{G}) = Im(\partial_2^{\mathcal{G}})$ son llamados 1-cícl os fronteras

7.4. Co-cadenas singulares en mapas

Para cada $k \in \{0, 1, 2\}$ definimos los R -módulos

$$C^k(\mathcal{G}, R) = Hom_R(C_k(\mathcal{G}, R), R)$$

Ya que $C_k(\mathcal{G}, R)$ no depende de la orientación escogida originalmente, tampoco lo hace el R -módulo $C^k(\mathcal{G}, R)$.

Los elementos de $C^k(\mathcal{G}, R)$ serán llamados k -formas del mapa \mathcal{G} con coeficientes en R .

Observación 7.4.1. — Toda k -forma $\phi \in C^k(\mathcal{G}, R)$ induce una función $\phi : \mathcal{G}_k \rightarrow R$. Recíprocamente, toda función $\psi : \mathcal{G}_k \rightarrow R$ se extiende de manera única a una k -forma $\psi \in C^k(\mathcal{G}, R)$ por la fórmula $\psi(\sum_{q \in \mathcal{G}_k} n_q q) = \sum_{q \in \mathcal{G}_k} n_q \psi(q)$. De esta manera, se puede hacer una identificación entre $C^k(\mathcal{G}, R)$ y el R -módulo dado por las funciones desde \mathcal{G}_k hacia R .

Observación 7.4.2. — En caso que $R = \mathbb{C}$ usaremos la notación $C^k(\mathcal{G}, \mathbb{C}) = C^k(\mathcal{G})$.

7.5. Dualidades

7.5.1. $k=0$. —

$$C^0(\mathcal{G}, R) \times C_0(\mathcal{G}, R) \rightarrow R$$

$$(f, \sum_{j=1}^r n_j v_j) \mapsto \langle f, \sum_{j=1}^r n_j v_j \rangle := \sum_{j=1}^r n_j f(v_j)$$

7.5.2. $k=1$. —

$$C^1(\mathcal{G}, R) \times C_1(\mathcal{G}, R) \rightarrow R$$

$$(\alpha, \sum_{j=1}^r n_j e_j) \mapsto \langle \alpha, \sum_{j=1}^r n_j e_j \rangle := \sum_{j=1}^r n_j \alpha(v_j) := \sum_{j=1}^r n_j \int_{e_j} \alpha$$

7.5.3. $k=2$. —

$$C^2(\mathcal{G}, R) \times C_2(\mathcal{G}, R) \rightarrow R$$

$$(\omega, \sum_{j=1}^r n_j F_j) \mapsto \langle \omega, \sum_{j=1}^r n_j F_j \rangle := \sum_{j=1}^r n_j \omega(F_j) := \sum_{j=1}^r n_j \iint_{F_j} \omega$$

7.6. Operadores cofrontera

Para $k = 0, 1$ el operador cofrontera $d_k^{\mathcal{G}}$ se define por la siguiente regla :

$$d_k^{\mathcal{G}} : C^k(\mathcal{G}, R) \rightarrow C^{k+1}(\mathcal{G}, R)$$

$$d_k^{\mathcal{G}}(\phi) = \phi \circ \partial_{k+1}^{\mathcal{G}}$$

Luego, usando la notación hecha anteriormente, tenemos la *Fórmula de Stokes discreta*

$$\int_w d_k^{\mathcal{G}}(\phi) = \phi(\partial_{k+1}^{\mathcal{G}}(w))$$

7.6.1. $k=0$. —

$$d_0^{\mathcal{G}} : C^0(\mathcal{G}, R) \rightarrow C^1(\mathcal{G}, R)$$

$$d_0^{\mathcal{G}}(f) = f \circ \partial_1^{\mathcal{G}}$$

$$\int_{\sum_{j=1}^r n_j(x_j, y_j)} d_0^{\mathcal{G}}(f) =$$

$$d_0^{\mathcal{G}}(f) \left(\sum_{j=1}^r n_j(x_j, y_j) \right) = \sum_{j=1}^r n_j f(\partial_1^{\mathcal{G}}(x_j, y_j)) = \sum_{j=1}^r n_j f(y_j - x_j) = \sum_{j=1}^r n_j (f(y_j) - f(x_j))$$

7.6.2. k=1. —

$$d_1^{\mathcal{G}} : C^1(\mathcal{G}, R) \rightarrow C^2(\mathcal{G}, R)$$

$$d_1^{\mathcal{G}}(\alpha) = \alpha \circ \partial_2^{\mathcal{G}}$$

$$\iint_{\sum_{j=1}^r n_j F_j} d_1^{\mathcal{G}}(\alpha) =$$

$$d_1^{\mathcal{G}}(\alpha) \left(\sum_{j=1}^r n_j F_j \right) = \sum_{j=1}^r n_j d_1^{\mathcal{G}}(\alpha)(F_j) = \sum_{j=1}^r n_j \iint_{F_j} d_1^{\mathcal{G}}(\alpha)$$

Si

$$\partial_2^{\mathcal{G}}(F_j) = \sum_{s=1}^{s_j} (-1)^{\delta_{s,j}} e_{s,j},$$

donde $e_{s,j}$ tiene la orientación de manera que la cara F_j está a la izquierda y $\delta_{s,j} \in \{0, 1\}$, entonces

$$\iint_{F_j} d_1^{\mathcal{G}}(\alpha) = \sum_{s=1}^{s_j} \int_{e_{s,j}} \alpha$$

Proposición 7.6.1. —

$$d_1^{\mathcal{G}} d_0^{\mathcal{G}} = 0$$

Demonstración. — Como

$$d_1^{\mathcal{G}}(\alpha) = \alpha \circ \partial_2^{\mathcal{G}}$$

$$d_0^{\mathcal{G}}(f) = f \circ \partial_2^{\mathcal{G}}$$

tenemos que

$$d_1^{\mathcal{G}}(d_0^{\mathcal{G}}(f)) = d_1(f \circ \partial_1^{\mathcal{G}}) = f \circ \partial_1^{\mathcal{G}} \circ \partial_2^{\mathcal{G}}$$

Como $\partial_1^{\mathcal{G}} \circ \partial_2^{\mathcal{G}} = 0$, entonces obtenemos el resultado deseado. \square

7.7. Primer grupo de Cohomología

El primer grupo de cohomología asociado al grafo \mathcal{G} y R es definido como

$$H^1(\mathcal{G}, R) = \frac{Ker(d_1^{\mathcal{G}})}{Im(d_0^{\mathcal{G}})}$$

Los elementos de $Z^1(\mathcal{G}) = Ker(d_1^{\mathcal{G}})$ son llamados 1-cocícllos y los elementos de $B^1(\mathcal{G}) = Im(d_0^{\mathcal{G}})$ son llamados 1-cocícllos fronteras . Los 1-cocícllos son llamados las 1-formas cerradas y los elementos de $B^1(\mathcal{G})$ son llamados las 1-formas exactas .

PARTE IV

ESTRUCTURAS DE SUPERFICIES DE RIEMANN DISCRETAS

CAPÍTULO 8

ALGUNAS DESCOMPOSICIONES CELULARES IMPORTANTES

En este capítulo definiremos algunas descomposiciones celulares asociadas a un mapa dado sobre alguna superficie, posiblemente con borde.

8.1. Descomposición celular

8.1.1. Superficies sin borde. — Consideremos un mapa $\Gamma \subset \Sigma$ en una superficie orientada Σ . Este mapa produce una *descomposición celular* de Σ . Los vértices de Γ forman las células 0-dimensionales, los ejes de Γ (junto con sus vértices finales) forman las células 1-dimensionales y las componentes conexas de $\Sigma - \Gamma$ (junto a las células 1-dimensionales en su borde) forman las células 2-dimensionales (caras). Denotaremos por Γ_k al conjunto de las células k -dimensionales ($k = 0, 1, 2$) de la descomposición celular anterior y a la descomposición celular por el mismo símbolo Γ .

8.1.2. Superficies con borde. — Consideremos un mapa $\Gamma \subset \Sigma$ en una superficie orientada Σ con borde $\partial\Sigma \neq \emptyset$. Recordemos que en este caso, cada componente del borde está formado de ejes y vértices del mapa Γ . Podemos considerar el doble Σ^d , la cual admite un homeomorfismo de orden 2, digamos $\tau : \Sigma^d \rightarrow \Sigma^d$, que revierte orientación y cuyo conjunto de puntos fijos dividen esta en dos componentes, una de ellas siendo Σ y la otra siendo $\tau(\Sigma)$. No es difícil ver que podemos extender el mapa Γ a todo Σ^d de manera que esta sea invariante por τ ; la cual seguiremos denotando por Γ . Diremos que Γ es un mapa de (Σ^d, τ) .

8.2. Descomposición celular dual

8.2.1. Superficies sin borde. — Ya hemos visto como asociar una descomposición celular a Σ usando Γ . Ahora veremos como asociarle una descomposición celular dual, la cual denotaremos por Γ^* .

Por cada cara $F \in \Gamma_2$ escogemos un punto en su interior, el cual denotaremos por F^* . Estos puntos serán las células 0-dimensionales de Γ^* .

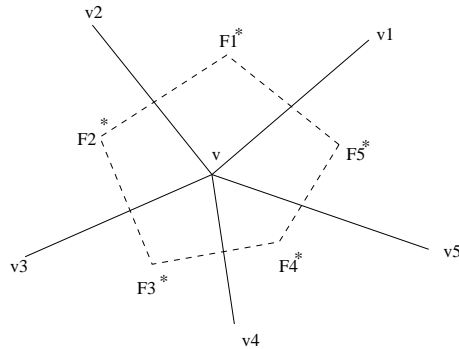


FIGURA 8.1

Sea $e \in \Gamma_1$ una célula 1-dimensional. Entonces, tenemos dos caras $F_1, F_2 \in \Gamma_2$ (quizás iguales) que tienen a e en su borde. Consideramos un arco continuo y simple e^* que conecta F_1^* con F_2^* (el cual será un bucle si $F_1 = F_2$), el cual intersecta e en un único punto interior y está (fuera de tal punto de corte) completamente contenida en $F_1 \cup F_2$. Estos arcos e^* serán las células 1-dimensionales de Γ^* .

Por cada célula 0-dimensional $v \in \Gamma_0$ hay sólo un número finito de caras en Γ_2 que lo contienen en su borde. Denotemos por $F_1, \dots, F_n \in \Gamma_2$ tales caras y supongamos que estas están ordenadas de manera opuesta a las manecillas del reloj. De esta manera, tenemos los vértices duales $F_1^*, \dots, F_n^* \in \Gamma_0^*$. Los ejes duales determinados por los vértices duales determinan un polígono v^* que contiene a v en su interior (ver Figura 8.1). Estos polígonos serán las células 2-dimensionales de Γ^* .

Ejercicio 42. — Verificar que Γ^* es un mapa, es decir, ella define una descomposición celular como hemos dispuesto al comienzo.

Ejercicio 43. — Verificar que la descomposición celular dual es única módulo homotopía y que Γ^{**} es homotópica a Γ .

Ejercicio 44. — Construya descomposiciones duales para las descomposiciones duales del Ejemplo 3 y de aquellos que construyó en el Ejercicio 9.

8.2.2. Superficies con borde. — Consideremos ahora un mapa para una superficie Σ con borde. En este caso, tenemos el par (Σ^d, τ) (en la cual Σ^d es una superficie orientada sin borde y $\tau : \Sigma^d \rightarrow \Sigma^d$ es un homeomorfismo de orden dos que revierte orientación y de manera que $\Sigma^d / \langle \tau \rangle$ es homeomorfo a Σ), tenemos un mapa de Σ que se extiende a un mapa de Σ^d , digamos Γ , que es invariante por τ . En este caso se puede escoger una descomposición dual Γ^* en Σ^d la cual es también invariante por τ . En este caso decimos

que Γ^* es una descomposición dual de Σ en (Σ^d, τ) . En el caso de una superficie con borde (Σ^d, τ) supondremos que la descomposición celular dual Γ^* es invariante por τ .

Observación 8.2.1. — Supongamos que tenemos una descomposición Γ (en cualquiera de los casos anteriores) y una descomposición dual Γ^* . Es claro que Γ es una descomposición dual de Γ^* . De ahora en adelante usaremos $\Gamma^{**} = \Gamma$.

8.3. El doble celular

8.3.1. Superficies sin borde. — Consideremos una descomposición celular dual Γ^* para Γ . El *doble celular* es definido como

$$\Lambda = \Gamma \sqcup \Gamma^*$$

donde \sqcup denota la unión disjunta. Observe que Λ no es la unión de las dos descomposiciones celulares, de hecho, Λ no es subconjunto de Σ , si de $\Sigma \sqcup \Sigma$. Hacemos las siguientes notaciones :

$$\begin{aligned}\Lambda_0 &= \Gamma_0 \sqcup \Gamma_0^* \\ \Lambda_1 &= \Gamma_1 \sqcup \Gamma_1^* \\ \Lambda_2 &= \Gamma_2 \sqcup \Gamma_2^*\end{aligned}$$

Diremos que los elementos de Λ_0 son los vértices de Λ , que los elementos de Λ_1 son los ejes de Λ y que los elementos de Λ_2 son las caras de Λ .

8.3.2. Superficies con borde. — Supongamos que tenemos descomposiciones duales Γ y Γ^* para (Σ^d, τ) . Entonces el dual $\Lambda = \Gamma \cup \Gamma^*$ es invariante por τ .

8.4. El celular diamante

8.4.1. Superficies sin borde. — Consideremos una descomposición celular dual Γ^* para Γ . El *celular diamante* \diamond es definido de manera que sus vértices es dado por

$$\diamond_0 = \Gamma_0 \cup \Gamma_0^*$$

y sus ejes \diamond_1 es definido como sigue. Por cada $x \in \Gamma_0^*$ tenemos una cara $F_x \in \Gamma_2$ que lo contiene en su interior. El borde de F_x contiene a los vértices $x_1, \dots, x_n \in \Sigma_0$. Entonces, consideramos n arcos simples (dos a dos disjuntos aparte de x) cada uno de ellos conectando x con uno de los vértices x_j (ver Figura 8.2).

En el caso de una superficie con borde (Σ^d, τ) consideramos que la descomposición celular diamante \diamond sea invariante por τ .

8.4.2. Superficies con borde. — Supongamos que tenemos descomposiciones duales Γ y Γ^* para (Σ^d, τ) . Entonces el celular diamante asociado \diamond se puede escoger ser también invariante por τ .

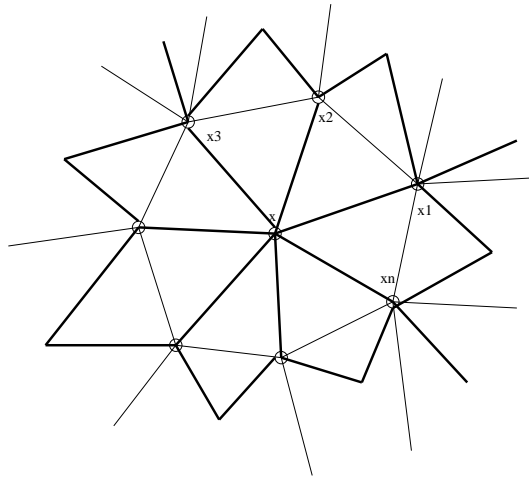


FIGURA 8.2

CAPÍTULO 9

SUPERFICIES DE RIEMANN DISCRETAS

En este capítulo introduciremos los conceptos de estructuras de superficies de Riemann discretas y de funciones analíticas discretas. La idea es pensar que dos mapas duales definen direcciones ortogonales.

9.1. Superficies de Riemann discretas

9.1.1. Superficies sin borde. — Sea Σ una superficie orientada sin borde. Una *estructura de superficie de Riemann discreta* en Σ es un triple (Γ, Γ^*, ρ) , donde Γ es una descomposición celular de Σ , Γ^* es una descomposición celular dual y $\rho : \Gamma_1 \cup \Gamma_1^* \rightarrow (0, +\infty)$ es una función tal que

$$\rho(e)\rho(e^*) = 1, \quad \forall e \in \Gamma_1,$$

donde e^* denota al eje dual que intersecta al eje e .

Ejemplo 21. — Si Γ es una descomposición celular de Σ y Γ^* es una descomposición celular dual, entonces usando $\rho \equiv 1$, obtenemos una estructura de superficie de Riemann discreta.

Ejercicio 45. — Sea Γ una descomposición celular de Σ , Γ^* una descomposición celular dual y $\rho : \Gamma_1 \rightarrow (0, +\infty)$ una función cualquiera. Verifique que existe una extensión (que es única) de ρ a Γ_1^* de manera que obtenemos una estructura de superficie de Riemann discreta (Γ, Γ^*, ρ) .

9.1.2. Superficies con borde. — Sea Σ una superficie orientada con borde y (Σ^d, τ) su doble asociado, es decir, Σ^d es una superficie orientada sin borde. Una *estructura de superficie de Riemann real discreta* en (Σ^d, τ) es una estructura de superficie de Riemann discreta en Σ^d . Notemos que, por la propiedad invariante de Γ y Γ^* por la acción de τ , vemos que $\rho(\tau(e)) = \rho(e)$ para todo $e \in \Lambda_1$, donde Λ es el doble asociado.

Observación 9.1.1. — La estructura de superficie de Riemann para la superficie con borde Σ es dada por la restricción a Σ de Γ , Γ^* y ρ a ellas (en esta caso, si un eje de Γ^* cruza un borde de Σ , entonces redefinimos ρ allí a la mitad del valor. De todas maneras, es mejor seguir mirando la estructura de superficies de Riemann real discreta para el par (Σ^d, τ) para mantener las mismas ideas generales que el caso sin borde.

9.2. Estructuras inducidas por métricas discretas

Sea Γ una descomposición celular de Σ y Γ^* una descomposición celular dual. Dada una métrica discreta d para (Γ, Γ^*) , es decir, una métrica discreta para los dos grafos Γ y Γ^* , se puede construir la métrica discreta ρ_d definida por :

$$\rho_d(e) = \frac{d(e^*)}{d(e)}, \quad e \in \Lambda_1$$

de manera que $(\Gamma, \Gamma^*, \rho_d)$ es una estructura de superficie de Riemann discreta en Σ .

Recíprocamente, si (Γ, Γ^*, ρ) es una estructura de superficie de Riemann discreta en Σ , entonces definiendo la métrica discreta d como

$$d(e) = 1, \quad e \in \Gamma_1$$

$$d(e^*) = \rho(e), \quad e^* \in \Gamma_1^*$$

obtenemos que $\rho_d = \rho$.

Consideremos dos métricas discretas, d_1 y d_2 , para (Γ, Γ^*) ambas definiendo la misma estructura de superficie de Riemann discreta, es decir, $\rho_{d_1} = \rho_{d_2}$. Luego, por la definición debemos tener que

$$\frac{d_1(e^*)}{d_1(e)} = \frac{d_2(e^*)}{d_2(e)} \quad \forall e \in \Lambda_1.$$

Definamos

$$\lambda : \Lambda_1 \rightarrow (0, +\infty)$$

$$\lambda(e) = \frac{d_1(e)}{d_2(e)}, \quad e \in \Lambda_1$$

Tenemos que $\lambda(e) = \lambda(e^*)$, para todo $e \in \Lambda_1$, y además que

$$d_1 = \lambda d_2$$

Ejercicio 46. — Considere dos métricas discretas d_1 y d_2 para (Γ, Γ^*) . Verificar que $\rho_{d_1} = \rho_{d_2}$ si y sólo si existe una función $\lambda : \Lambda_1 \rightarrow (0, +\infty)$ tal que $\lambda(e) = \lambda(e^*)$ para todo $e \in \Lambda_1$, satisfaciendo la igualdad $d_1 = \lambda d_2$.

Ejemplo 22. — Consideremos una superficie orientada Σ con una estructura de superficie de Riemann clásica. Luego, en Σ tenemos una métrica Riemanniana de curvatura constante. Tomemos una descomposición celular Γ y una dual Γ^* . Supongamos que todos los ejes son arcos geodésicos de tal métrica Riemanniana. Así, podemos considerar la métrica discreta d para (Γ, Γ^*) donde $d(e)$ es la longitud de $e \in \Gamma_1 \cup \Gamma_1^*$. De esta manera obtenemos una estructura de superficie de Riemann discreta $(\Gamma, \Gamma^*, \rho_d)$ para Σ . La pregunta natural es: ¿Se puede descubrir la estructura clásica de superficie de Riemann usando estas estructuras discretas? Christian Mercat [20, 21] ha desarrollado la idea de descomposiciones celulares críticas que permiten dar respuesta positiva a esta pregunta.

Ejemplo 23. — Consideremos el plano complejo \mathbb{C} y la descomposición celular Γ cuyos vértices son los puntos de $\mathbb{Z}[i]$, es decir, de la forma $a + bi$, con $a, b \in \mathbb{Z}$ y los ejes son de la forma $\{z + ti : t \in [0, 1]\}$, $\{z + t : t \in [0, 1]\}$, con $z \in \mathbb{Z}[i]$. Como descomposición dual Γ^* consideramos $\Gamma^* = (1 + i)/2 + \Gamma$. Usemos en este caso $\rho \equiv 1$. Obtenemos así una estructura de superficie de Riemann discreta para \mathbb{C} dada por (Γ, Γ^*, ρ) .

9.3. Estructuras conformemente equivalentes

Consideremos una superficie orientada Σ , junto a un mapa Γ y su dual Γ^* . La superficies de Riemann discretas $(\Gamma, \Gamma^*, \rho_1)$ y $(\Gamma, \Gamma^*, \rho_2)$ son llamadas *conformemente equivalentes marcadas* si existe una constante positiva $\mu > 0$ tal que $\rho_2(e) = \mu\rho_1(e)$, para todo $e \in \Gamma_1$. Note que necesariamente $\rho_2(e^*) = \mu^{-1}\rho_1(e^*)$, para todo $e^* \in \Gamma_1^*$.

CAPÍTULO 10

ESPACIOS DE MODULI

10.1. Espacio de Teichmüller

Consideremos una superficie orientada sin borde Σ y (Γ, Γ^*) un par de descomposiciones duales para Σ . El *espacio de Teichmüller* de (Γ, Γ^*) , denotado por

$$\mathcal{T}(\Gamma, \Gamma^*),$$

es el conjunto de las *clases conformes marcadas* de métricas ρ tales que (Γ, Γ^*, ρ) es superficie de Riemann discreta.

Si fijamos un eje $e_1 \in \Gamma_1$, entonces cada clase de equivalencia conforme marcada de estructuras de superficies de Riemann discretas en (Γ, Γ^*) tiene un único representante ρ con la propiedad $\rho(e_1) = 1$. Luego, $\mathcal{T}(\Gamma, \Gamma^*)$ se puede identificar con el espacio $\mathbb{C}^{|\Gamma_1|-1}$.

Ejemplo 24. — Supongamos que Σ es una superficie orientada cerrada de género g . En este caso, Γ_j es finito. Supongamos que $\Gamma_1 = \{e_1, \dots, e_m\}$. Entonces cada clase de equivalencia marcada de estructuras de superficies de Riemann discretas en (Γ, Γ^*) tiene un único representante ρ con la propiedad $\rho(e_1) = 1$. Luego,

$$\mathcal{T}(\Gamma, \Gamma^*) \cong (0, +\infty)^{m-1}$$

Observación 10.1.1. — Consideremos una superficie orientada con borde Σ , (Σ^d, τ) su doble asociado y (Γ, Γ^*) un par de descomposiciones duales para (Σ^d, τ) . En este caso se tiene que el espacio de Teichmüller $\mathcal{T}(\Gamma, \Gamma^*)$ se puede identificar como el espacio de Teichmüller de la estructura de superficie de Riemann discreta para Σ respecto a Γ .

10.2. Grupo modular

Denotemos por $Aut(\Gamma)$ al grupo de automorfismos del mapa $\Gamma \subset \Sigma$. Cada automorfismo $\phi_\Gamma \in Aut(\Gamma)$, al ser este un mapa en la superficie orientada Σ , induce de manera natural un homeomorfismo $f_\phi : \Sigma \rightarrow \Sigma$, módulo homotopía. Diremos que $\phi_\Gamma \in Aut(\Gamma)$

preserva orientación si f_ϕ preserva orientación; en caso contrario, diremos que *revierte orientación*. Denotemos por $Aut^+(\Gamma)$ al subgrupo de $Aut(\Gamma)$ cuyos elementos preservan orientación. En particular, f_ϕ permite construir un automorfismo ϕ_{Γ^*} del mapa Γ^* de manera que $\phi_\Gamma(e)^* = \phi_{\Gamma^*}(e^*)$, para todo $e \in \Gamma_1$. De esta manera, obtenemos un automorfismo ϕ del grafo dual Λ , llamado una *transformación modular* de (Γ, Γ^*) . Diremos que la transformación modular ϕ *preserva orientación* si f_ϕ preserva orientación; en caso contrario, diremos que *revierte orientación*.

El grupo, con la composición de funciones, formado de las transformaciones modulares es llamado el *Grupo modular* de (Γ, Γ^*) , denotado por

$$Mod(\Gamma, \Gamma^*)$$

y su subgrupo formado de aquellas transformaciones modulares que preservan orientación lo denotaremos por

$$Mod^+(\Gamma, \Gamma^*).$$

Es claro que pueden ocurrir sólo dos situaciones :

- (1) $Mod(\Gamma, \Gamma^*) = Mod^+(\Gamma, \Gamma^*)$ o bien
- (2) $[Mod(\Gamma, \Gamma^*) : Mod^+(\Gamma, \Gamma^*)] = 2$.

Es claro de la definición que el grupo modular $Mod(\Gamma, \Gamma^*)$ (respectivamente, $Mod^+(\Gamma, \Gamma^*)$) es naturalmente isomorfo al cociente $Aut(\Gamma)/K$ (respectivamente, $Aut^+(\Gamma)/K^+$), donde $K < Aut(\Gamma)$ (respectivamente, $K^+ < Aut^+(\Gamma)$) es el subgrupo de aquellos automorfismos $\phi_\Gamma \in Aut(\Gamma)$ (respectivamente, $\phi_\Gamma \in Aut^+(\Gamma)$) tales que $\phi_\Gamma(e) = \pm e$ para todo $e \in \Gamma_1$.

Se tiene que

$$Mod(\Gamma, \Gamma^*) \cong Aut(\Gamma)/K$$

$$Mod^+(\Gamma, \Gamma^*) \cong Aut^+(\Gamma)/K^+$$

Dada $\rho \in \mathcal{T}(\Gamma, \Gamma^*)$ y $\phi \in Mod(\Gamma, \Gamma^*)$, tenemos de manera natural una nueva estructura de superficie de Riemann discreta $(\Gamma, \Gamma^*, \rho_\phi)$, donde, para cada $e \in \Gamma_1$ vale que $\rho_\phi(e) = \rho(\phi(e))$. De esta manera, tenemos una acción natural

$$Mod(\Gamma, \Gamma^*) \times \mathcal{T}(\Gamma, \Gamma^*) \rightarrow \mathcal{T}(\Gamma, \Gamma^*)$$

$$(\rho, \phi) \mapsto \rho_\phi$$

Observación 10.2.1. — En el caso de una superficie con borde (Σ^d, τ) y (Γ, Γ^*) descomposiciones duales para (Σ^d, τ) , entonces tenemos que $\tau \in Mod(\Gamma, \Gamma^*) - Mod^+(\Gamma, \Gamma^*)$ y también que $\tau \in Aut(\Gamma) - Aut^+(\Gamma)$.

10.3. Espacio de Móduli

Dos estructuras de superficies de Riemann $(\Gamma, \Gamma^*, \rho_1)$ y $(\Gamma, \Gamma^*, \rho_2)$ son llamada *conformemente equivalentes* (respectivamente, *equivalentes*) si existe $\phi \in Mod^+(\Gamma, \Gamma^*)$ (respectivamente, $\phi \in Mod(\Gamma, \Gamma^*)$) tal que $\phi(\rho_1) = \rho_2$. El conjunto de las clases conformales de estructuras de superficies de Riemann discretas en (Γ, Γ^*) es llamado el *espacio de móduli* de estructuras de superficies de Riemann discretas para (Γ, Γ^*) ; es decir

$$\mathcal{M}(\Gamma, \Gamma^*) = \mathcal{T}(\Gamma, \Gamma^*)/Mod^+(\Gamma, \Gamma^*)$$

y el conjunto de las clases de estructuras de superficies de Riemann discretas en (Γ, Γ^*) es

$$\widetilde{\mathcal{M}}(\Gamma, \Gamma^*) = \mathcal{T}(\Gamma, \Gamma^*)/Mod(\Gamma, \Gamma^*).$$

Si $Mod(\Gamma, \Gamma^*) = Mod^+(\Gamma, \Gamma^*)$, entonces es claro que $\widetilde{\mathcal{M}}(\Gamma, \Gamma^*) = \mathcal{M}(\Gamma, \Gamma^*)$, pero si $[Mod(\Gamma, \Gamma^*) : Mod^+(\Gamma, \Gamma^*)] = 2$, entonces $\widetilde{\mathcal{M}}(\Gamma, \Gamma^*) = \mathcal{M}(\Gamma, \Gamma^*)/\mathbb{Z}_2$, donde \mathbb{Z}_2 es generado por un automorfismo de orden dos del espacio de móduli $\mathcal{M}(\Gamma, \Gamma^*)$.

Observación 10.3.1. — En el caso de una superficie con borde (Σ^d, τ) y (Γ, Γ^*) descomposiciones duales para (Σ^d, τ) , entonces podemos ver $\widetilde{\mathcal{M}}(\Gamma, \Gamma^*)$ como el espacio de moduli de la superficie con borde Σ .

10.4. Automorfismos conformes y anticonformes

Sea (Γ, Γ^*, ρ) una superficie de Riemann discreta sobre una superficie orientada sin borde Σ . Más adelante daremos la definición de funciones analíticas y anti-analíticas discretas, en particular de automorfismos analíticos discretos de (Γ, Γ^*, ρ) . Por el momento nos contentaremos con las siguientes definiciones de automorfismos conformes y anti-conformes.

10.4.1. Automorfismos conformes discretos. — Un *automorfismo conforme discreto* de (Γ, Γ^*, ρ) es una transformaciones modular $\phi \in Mod^+(\Gamma, \Gamma^*)$ tal que ϕ restricto a Γ_1 preserva la métrica ρ , es decir, $\rho(\phi(e)) = \rho(e)$ para cada $e \in \Gamma_1$ (luego, para cada $e \in \Lambda_1$).

Denotamos por $Aut^+(\Gamma, \Gamma^*, \rho)$ al grupo de automorfismos conformes discretos de (Γ, Γ^*, ρ) . Es claro de la definición la igualdad

$$\{\phi \in Mod^+(\Gamma, \Gamma^*) : \phi(\rho) = \rho\} \cong Aut^+(\Gamma, \Gamma^*, \rho)/Aut_0^+(\Gamma, \Gamma^*, \rho)$$

donde $Aut_0^+(\Gamma, \Gamma^*, \rho)$ es el subgrupo normal de $Aut^+(\Gamma, \Gamma^*, \rho)$ consistiendo de aquellos automorfismos de dejan invariante (pero pueden reverstir la orientación) cada $e \in \Gamma_1$.

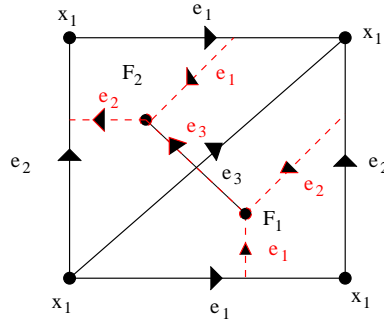


FIGURA 10.1

10.4.2. Automorfismos anticonformes discretos. — Un *automorfismo anticonforme discreto* de (Γ, Γ^*, ρ) es una transformación modular $\phi \in \text{Mod}(\Gamma, \Gamma^*) - \text{Mod}^+(\Gamma, \Gamma^*)$ tal que ϕ restringido a Γ_1 preserva la métrica ρ , es decir, $\rho(\phi(e)) = \rho(e)$ para cada $e \in \Gamma_1$ (luego, para cada $e \in \Lambda_1$).

Denotamos por $\text{Aut}(\Gamma, \Gamma^*, \rho)$ al grupo de automorfismos conformes y anticonformes discretos de (Γ, Γ^*, ρ) . Se tienen las dos siguientes posibilidades :

- (i) $\text{Aut}(\Gamma, \Gamma^*, \rho) = \text{Aut}^+(\Gamma, \Gamma^*, \rho)$, o bien
- (ii) $[\text{Aut}(\Gamma, \Gamma^*, \rho) : \text{Aut}^+(\Gamma, \Gamma^*, \rho)] = 2$.

Similarmente,

$$\{\phi \in \text{Mod}^+(\Gamma, \Gamma^*) : \phi(\rho) = \rho\} \cong \text{Aut}^+(\Gamma, \Gamma^*, \rho) / \text{Aut}_0^+(\Gamma, \Gamma^*, \rho)$$

donde $\text{Aut}_0^+(\Gamma, \Gamma^*, \rho)$ es el subgrupo normal de $\text{Aut}^+(\Gamma, \Gamma^*, \rho)$ consistiendo de aquellos automorfismos de dejan invariante (pero pueden revertir la orientación) cada $e \in \Gamma_1$.

Ejemplo 25. — Consideremos una superficie orientada con borde Σ y su doble (Σ^d, τ) . Sea (Γ, Γ^*) una descomposición dual para (Σ^d, τ) . Ya vimos que, por la misma definición, $\tau \in \text{Mod}(\Gamma, \Gamma^*) - \text{Mod}^+(\Gamma, \Gamma^*)$. Ahora, no es difícil ver que necesariamente se debe tener que para todo $\rho \in \mathcal{T}(\Gamma, \Gamma^*)$ vale que $\tau \in \text{Aut}(\Gamma, \Gamma^*, \rho) - \text{Aut}^+(\Gamma, \Gamma^*, \rho)$.

Ejemplo 26. — Consideremos Σ una superficie de género 1, el cual podemos pensar como el cuadrado unitario con sus lados opuestos identificados. Sea Γ definido por (ver Figura 10.1)

$$\Gamma_0 = \{x_1\}, \Gamma_1 = \{e_1, e_2, e_3\}, \Gamma_2 = \{F_1, F_2\}$$

En este caso tenemos que

$$\mathcal{T}(\Gamma, \Gamma^*) = (0, +\infty)^2$$

$$\text{Aut}(\Gamma) = \langle a(e_1, e_2, e_3) = (e_2, e_1, e_3), b(e_1, e_2, e_3) = (-e_1, -e_2, -e_3) \rangle \cong \mathbb{Z}_2^2$$

$$\text{Aut}^+(\Gamma) = \langle b(e_1, e_2, e_3) = (-e_1, -e_2, -e_3) \rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

$$K = K^+ = \langle b \rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

$$\text{Mod}(\Gamma, \Gamma^*) = \langle A(\lambda_1, \lambda_2) = \left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

$$\text{Mod}^+(\Gamma, \Gamma^*) = \{I\}$$

$$\mathcal{M}(\Gamma, \Gamma^*) = (0, +\infty)^2$$

$$\widetilde{\mathcal{M}}(\Gamma, \Gamma^*) = (0, +\infty)^2 / \langle A(\lambda_1, \lambda_2) = \left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \rangle \cong (0, 1] \times (0, +\infty)$$

El borde de $\widetilde{\mathcal{M}}(\Gamma, \Gamma^*)$ corresponde al caso en que tenemos ρ tal que

$$\rho(e_1) = \rho(e_2)$$

en cuyo caso, la superficie de Riemann discreta (Γ, Γ^*, ρ) admite una simetría (realizable por una reflexión en la diagonal del cuadrado unitario).

Notemos que, en todos los casos, el automorfismo de grafo b induce un automorfismo no trivial de (Γ, Γ^*, ρ) , que genera $\text{Aut}_0(\Gamma, \Gamma^*, \rho)$, es decir, genéricamente $\text{Aut}(\Gamma, \Gamma^*, \rho) = \text{Aut}^+(\Gamma, \Gamma^*, \rho) = \text{Aut}_0(\Gamma, \Gamma^*, \rho) \cong \mathbb{Z}_2$, pero cuando $\rho(e_1) = \rho(e_2)$ tenemos que $\mathbb{Z}_2 \cong \text{Aut}^+(\Gamma, \Gamma^*, \rho) = \text{Aut}_0(\Gamma, \Gamma^*, \rho) \triangleleft \text{Aut}(\Gamma, \Gamma^*, \rho) \cong \mathbb{Z}_2^2$

CAPÍTULO 11

FUNCIONES ANALÍTICAS DISCRETAS

11.1. Ecuación de Cauchy-Riemann discreta

Sea (Γ, Γ^*, ρ) una estructura de superficie de Riemann discreta y sea λ el doble correspondiente.

Consideremos una función

$$f : \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{C}$$

Queremos definir la noción que f sea analítica discreta en $v \in \Lambda_0$. Una posibilidad es tratar de emular la noción clásica por medio de la ecuación de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}$$

en el modelo discreto. Para esto, la idea es pensar que los ejes de Γ y los ejes de Γ^* determinan direcciones ortogonales.

Si $v \in \Lambda_0$, entonces podemos definir sus vecinos como aquellos vértices $w \in \Lambda_0 - \{v\}$ de manera que exista un eje $e \in \Lambda_1$ que los conecta. Es claro que si $v \in \Gamma_0$ (respectivamente, $v \in \Gamma_0^*$), entonces sus vecinos también están en Γ_0 (respectivamente, Γ_0^*).

Sea $x \in \lambda_0$ y supongamos que los vértices vecinos de $v \in \Lambda_0$ son dados por (ver Figura 11.1)

$$x_1, \dots, x_n \in \Lambda_0$$

Ahora, por cada vértice vecino x_j de x tenemos, por definición, un eje $e_j = \{x, x_j\} \in \Lambda_1$ que conecta x con x_j . También tenemos un eje dual $e_j^* = \{y_j, \hat{y}_j\} \in \Lambda_1$ (si $e_j \in \Gamma_1$, entonces $e_j^* \in \Gamma_1^*$ y si $e_j \in \Gamma_1^*$, entonces $e_j^* \in \Gamma_1$) (ver Figura 11.2).

Procedemos dar una orientación a los ejes como sigue. Primero, damos una orientación a cada eje $e_j = \{x, x_j\}$ de manera que x sea el punto inicial y x_j sea el punto final. Ahora damos la orientación a cada eje dual $e_j^* = \{y_j, \hat{y}_j\}$ de manera que cuando caminamos a lo largo de e_j en el sentido positivo, entonces el sentido positivo para e_j^* sea hacia la izquierda. También supondremos que \hat{y}_j es el vértice final (ver Figura 11.3).

Notemos que si hemos colocado los vértices vecinos ordenados de manera opuesta a las manecillas del reloj, entonces debe ocurrir que $y_{j+1} = \hat{y}_j$.

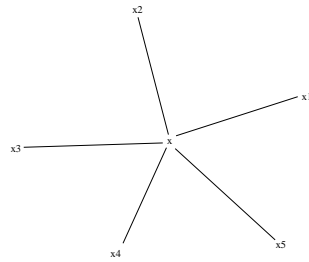


FIGURA 11.1

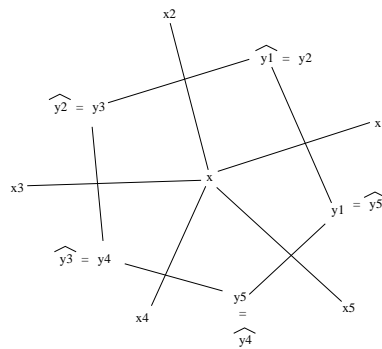


FIGURA 11.2

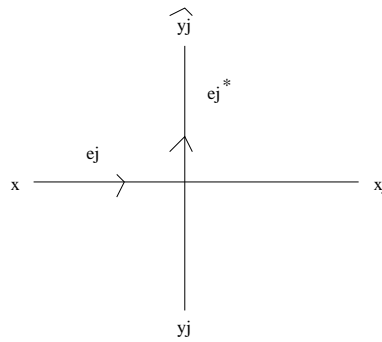


FIGURA 11.3

De esta manera, parece muy adecuado emular la ecuación de Cauchy-Riemann clásica por la versión discreta siguiente

Ecuación de Cauchy-Riemann discreta en $x \in \Lambda_0$

$$f(\widehat{y}_j) - f(y_j) = i\rho(\{x, x_j\})(f(x_j) - f(x)), \quad j = 1, \dots, n,$$

ó de manera equivalente

$$\int_{(y_j, \widehat{y}_j)} df = i\rho(\{x, x_j\}) \int_{(x, x_j)} df, \quad j = 1, \dots, n,$$

donde $N(x) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Observación 11.1.1. — Sea $d : \Lambda_1 \rightarrow (0, +\infty)$ una métrica discreta para (Γ, Γ^*) . Hemos visto que la métrica discreta d define una estructura de superficie de Riemann discreta $(\Gamma, \Gamma^*, \rho_d)$, donde

$$\rho_d(e) = \frac{d(e^*)}{d(e)}, \quad e \in \Gamma_1$$

$$\rho_d(e^*) = \frac{d(e)}{d(e^*)}, \quad e^* \in \Gamma_1^*$$

En este caso, la Ecuación de Cauchy-Riemann discreta puede ser escrita como

$$\frac{f(\widehat{y}_j) - f(y_j)}{d(\{\widehat{y}_j, y_j\})} = i \frac{(f(x_j) - f(x))}{d(\{x, x_j\})}, \quad j = 1, \dots, n.$$

11.2. Funciones analíticas y anti-analíticas discretas

Sea (Γ, Γ^*, ρ) una estructura de superficie de Riemann discreta, λ el doble correspondiente y $f : \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{C}$ una función.

Definición 11.2.1. — La función $f : \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{C}$ es *analítica discreta* en $x \in \Lambda_0$ si valen las Ecuaciones de Cauchy-Riemann discretas en x , es decir

$$f(\widehat{y}_j) - f(y_j) = i\rho(\{x, x_j\})(f(x_j) - f(x)),$$

para todos los vértices vecinos x_j de x . Si f es analítica discreta en todos los puntos de Λ_0 , entonces diremos que f es *analítica discreta*.

Observación 11.2.2. — La definición de función analítica discreta fué introducida por Lelong-Ferrand en el caso $\Sigma = \mathbb{R}^2$, donde Γ es la descomposición celular definida por el reticulado generado por $(1, 0)$ y $(0, 1)$ en [19].

Definición 11.2.3. — Una función $f : \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{C}$ es llamada *anti-analítica discreta* si \overline{f} es analítica discreta.

Ejercicio 47. — Verificar que la suma y ampliación por constantes complejas de funciones analíticas discretas (respectivamente, anti-analíticas discretas) es analítica discreta (respectivamente, anti-analítica discreta). Verificar que el producto de funciones analíticas discretas no siempre es analítica discreta.

11.3. Teorema de Cauchy discreto

Teorema 11.3.1 (Teorema de Cauchy discreto). — Sea (Γ, Γ^*, ρ) una estructura de superficie de Riemann discreta, λ el doble correspondiente y $f : \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica disceta en el punto $x_0 \in \Lambda_0$. Si $x_1, \dots, x_n \in \Lambda_0$ son los vértices vecinos de x_0 , entonces

$$\sum_{j=1}^n \rho(\{x_0, x_j\})(f(x_j) - f(x_0)) = 0$$

Demonstración. — Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $x_0 \in \Gamma_0$; luego $x_1, \dots, x_n \in \Gamma_0$. En este caso, $x_0^* \in \Gamma_2^*$. El borde de x_0^* (orientado de manera que x_0 esta a la izquierda siguiendo tal orientación) es de la forma

$$\partial x_0^* = (y_1, y_2) + (y_2, y_3) + \dots + (y_n, y_1) \in C_1(\Lambda)$$

donde

$$(y_j, y_{j+1}) = (x_0, x_n)^*$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= (f(y_2) - f(y_1)) + (f(y_3) - f(y_2)) + \dots + (f(y_1) - f(y_n)) = \\ &= i\rho(\{x_0, x_2\})(f(x_2) - f(x_0)) + i\rho(\{x_0, x_3\})(f(x_3) - f(x_0)) + \dots + i\rho(\{x_0, x_1\})(f(x_1) - f(x_0)) \end{aligned}$$

□

Corolario 11.3.2 (Fórmula integral de Cauchy discreta). — Sea (Γ, Γ^*, ρ) una estructura de superficie de Riemann discreta, λ el doble correspondiente y $f : \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica disceta en el punto $x_0 \in \Lambda_0$. Si $x_1, \dots, x_n \in \Lambda_0$ son los vértices vecinos de x_0 , entonces

$$f(x_0) = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \rho(\{x_0, x_j\})} \sum_{j=1}^n \rho(\{x_0, x_j\}) f(x_j)$$

Corolario 11.3.3. — Funciones analíticas discretas son armónicas.

11.4. Armónicas conjugadas

El Teorema de Cauchy discreto asegura que toda función analítica discreta es necesariamente una función armónica. Ahora, sea $f \in C^0(\Lambda)$ y escribamos $f = u + iv$, donde $u, v : \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{R}$. Como $\Delta_2 f = \Delta_2 u + i\Delta_2 v$, tenemos que

$$f \text{ es analítica discreta} \implies u, v \text{ son armónicas}$$

Sea $x \in \Lambda_0$ y sus vecinos x_1, \dots, x_n . Por cada vértice vecino x_j de x tenemos, por definición, un eje $e_j = \{x, x_j\} \in \Lambda_1$ que conecta x con x_j . También tenemos un eje dual $e_j^* = \{y_j, \hat{y}_j\} \in \Lambda_1$ (si $e_j \in \Gamma_1$, entonces $e_j^* \in \Gamma_1^*$ y si $e_j \in \Gamma_1^*$, entonces $e_j^* \in \Gamma_1$) (ver Figura 11.2).

Ahora, las ecuaciones de Cauchy-Riemann discretas nos aseguran que, para cada $x \in \Gamma_0$ vale que

$$f(\hat{y}_j) - f(y_j) = i\rho(\{x, x_j\})(f(x_j) - f(x)), \quad j = 1, \dots, n.$$

Esto nos asegura las igualdades siguientes

$$\begin{cases} u(\hat{y}_j) - u(y_j) = -\rho(\{x, x_j\})(v(x_j) - v(x)), & j = 1, \dots, n. \\ v(\hat{y}_j) - v(y_j) = \rho(\{x, x_j\})(u(x_j) - u(x)), & j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Lo anterior nos dice que u determina v salvo adición de una constante.

11.5. Descomposición

Sea $f \in C^0(\Lambda)$ una función analítica discreta. Si

$$\hat{u} : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \hat{u}(z) = f(z)$$

$$\hat{v} : \Gamma_0^* \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \hat{v}(z) = f(z),$$

entonces \hat{u} y \hat{v} son armónicas discretas satisfaciendo la igualdad

$$\hat{v}(\hat{y}) - \hat{v}(y) = i\rho(\{x, \hat{x}\})(\hat{u}(\hat{x}) - \hat{u}(x)),$$

para cada caso en que $e = (x, \hat{x})$ y $e^* = (y, \hat{y})$, de manera que

$$f = u + v,$$

donde

$$u(x) = \begin{cases} \hat{u}(x), & x \in \Gamma_0 \\ 0, & x \in \Gamma_0^* \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Gamma_0 \\ \hat{v}(x), & x \in \Gamma_0^* \end{cases}$$

Recíprocamente, si tenemos funciones armónicas discretas

$$\hat{u} : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{v} : \Gamma_0^* \rightarrow \mathbb{C},$$

satisfaciendo la igualdad

$$\hat{v}(\hat{y}) - \hat{v}(y) = i\rho(\{x, \hat{x}\})(\hat{u}(\hat{x}) - \hat{u}(x)),$$

para cada caso en que $e = (x, \hat{x})$ y $e^* = (y, \hat{y})$, entonces

$$f = u + v,$$

es analítica discreta, donde

$$u(x) = \begin{cases} \hat{u}(x), & x \in \Gamma_0 \\ 0, & x \in \Gamma_0^* \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Gamma_0 \\ \hat{v}(x), & x \in \Gamma_0^* \end{cases}$$

11.6. Funciones analíticas discretas entre superficies de Riemann discretas

Supongamos que tenemos dos superficies de Riemann discretas, digamos (Γ, Γ^*, ρ) sobre Σ_1 , y (G, G^*, η) sobre Σ_2 . Denotemos el doble de la primera por Λ^Γ y la de la segunda por Λ^G .

Definición 11.6.1. — Una función

$$F : \Lambda_0^\Gamma \rightarrow \Lambda_0^G$$

es llamada una *función admisible* entre las estructuras de Riemann discretas si esta es la restricción de una función continua $F : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ la cual define funciones celulares entre la descomposición celular Γ y una de las descomposiciones celulares G o G^* y entre la descomposición celular Γ^* y la otra. En otras palabras, si valen las siguientes :

- (i) si $x, y \in \Lambda_0^\Gamma$ son vecinos, entonces $F(x), F(y) \in \Lambda_0^G$ coinciden o son vecinos,
- (ii) si $\{x, y\}, \{u, v\} \in \Lambda_1^\Gamma$ son ejes duales y $F(x) \neq F(y)$, entonces $F(u) \neq F(v)$ y $\{F(x), F(y)\}, \{F(u), F(v)\} \in \Lambda_1^G$ son duales, y
- (iii) si $\{x, y\}, \{u, v\} \in \Lambda_1^\Gamma$ son ejes duales y $F(x) = F(y)$, entonces $F(u) = F(v) = F(x) = F(y)$.

La admisibilidad es como una versión discreta de continuidad .

Definición 11.6.2. — Diremos que una función admisible $F : \Lambda_0^\Gamma \rightarrow \Lambda_0^G$ es analítica discreta si para toda función analítica discreta $h : \Lambda_0^G \rightarrow \mathbb{C}$ resulta que $h \circ F : \Lambda_0^\Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica discreta.

Ejercicio 48. — Considere una función admisible $F : \Lambda_0^\Gamma \rightarrow \Lambda_0^G$ la cual es biyectiva. Verificar que ella y su inversa son necesariamente analíticas discretas (en este caso decimos que son isomorfismos analíticos o anti-analíticos discretos).

Observación 11.6.3. — Notemos que todo automorfismo conforme discreto de la Riemann discreta (Γ, Γ^*, ρ) es un isomorfismo analítico discreto. Similarmente, todo automorfismo anticonforme es un isomorfismo anti-analítico discreto.

Ejemplo 27. — Consideremos el plano complejo \mathbb{C} y la descomposición celular Γ cuyos vértices son los puntos de $\mathbb{Z}[i]$ y los ejes son de la forma $\{z + ti : t \in [0, 1]\}$, $\{z + t : t \in [0, 1]\}$, con $z \in \mathbb{Z}[i]$. Como descomposición dual Γ^* consideramos $\Gamma^* = (1 + i)/2 + \Gamma$ y consideremos la estructura de superficie de Riemann discreta para \mathbb{C} dada por (Γ, Γ^*, ρ) , donde $\rho \equiv 1$. Entonces es claro que las traslaciones

$$T_a(z) = z + a, \quad a \in \Lambda_0$$

son automorfismos analíticos discretos. Las dilataciones de la forma

$$D_a(z) = az, \quad a \in \Lambda_0 - \{0\}$$

son funciones analíticas discretas, pero no necesariamente automorfismos con nuestra definición.

Ejercicio 49. — Sea (Γ, Γ^*, ρ) una superficie de Riemann discreta. Sea $\tilde{\Gamma}$ otra descomposición celular que es dual a Γ . Verificar que existe una estructura de superficie de Riemann discreta $(\Gamma, \tilde{\Gamma}, \eta)$ y un isomorfismo analítico discreto entre ellas que actúa como la identidad en Γ_0 .

CAPÍTULO 12

ESTRUCTURAS DISCRETAS EN EL PLANO DEFINIDOS POR UN RETICULADO

Consideremos el plano complejo \mathbb{C} y la descomposición celular Γ cuyos vértices son los puntos de $\mathbb{Z}[i]$ y los ejes son de la forma $\{z + ti : t \in [0, 1]\}$, $\{z + t : t \in [0, 1]\}$, con $z \in \mathbb{Z}[i]$. Como descomposición dual Γ^* consideramos $\Gamma^* = (1+i)/2 + \Gamma$ y consideremos la estructura de superficie de Riemann discreta para \mathbb{C} dada por (Γ, Γ^*, ρ) , donde $\rho \equiv 1$.

Una función $f : \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica discreta en el punto $z \in \Lambda_0$ si y sólo si se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann discretas, es decir

$$\left\{ \begin{array}{l} f(z + \frac{1+i}{2}) - f(z + \frac{1-i}{2}) = i(f(z+1) - f(z)) \\ f(z + \frac{-1+i}{2}) - f(z + \frac{1+i}{2}) = i(f(z+i) - f(z)) \\ f(z + \frac{-1-i}{2}) - f(z + \frac{-1+i}{2}) = i(f(z-1) - f(z)) \\ f(z + \frac{1-i}{2}) - f(z + \frac{-1-i}{2}) = i(f(z-i) - f(z)) \end{array} \right.$$

Ejercicio 50. — Sea $A = \mathbb{Z} \cup i\mathbb{Z} \subset \Lambda_0$ y $F : A \rightarrow \mathbb{C}$ una función dada. Construir una extensión $F : \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{C}$ que sea analítica discreta.

12.1. Funciones Constantes

Sea $a, b \in \mathbb{C}$ dados. La función $f : \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} a, & z \in \mathbb{Z}[i] \\ b, & z \in \frac{1+i}{2} + \mathbb{Z}[i] \end{cases}$$

es una función analítica discreta. Observemos que en esta caso las funciones constantes tienen dos valores, uno para Γ_0 y otro para Γ_0^* .

12.2. Polinomios

Ahora veremos los polinomios $P_n(z) = z^n$.

Ejercicio 51. — Verificar que las funciones $P_1(z) = z$ y $P_2(z) = z^2$ son analíticas discretas, pero que $P_3(z) = z^3$ no lo es. En particular, concluir que el producto de funciones analíticas discretas no siempre es analítica discreta.

Teorema 12.2.1. — Si $n \geq 3$, entonces no existe una métrica ρ_n de manera que $P_n(z)$ sea analítica discreta para la estructura de superficie de Riemann discreta en el plano dada por $(\Gamma, \Gamma^*, \rho_n)$.

Demonstración. — Veamos sólo el caso $n = 3$. Supongamos que tenemos ρ_3 de manera que $P_3(z)$ sea analítica discreta para la estructura de superficie de Riemann discreta en el plano dada por $(\Gamma, \Gamma^*, \rho_3)$. Una de las ecuaciones de Cauchy-Riemann discreta nos asegura que para todo $z \in \mathbb{Z}[i]$ se debe cumplir la igualdad

$$\left(z + \frac{-1-i}{2}\right)^3 - \left(z + \frac{-1+i}{2}\right)^3 = i\rho_3(\{z-1, z\})((z-1)^3 - z^3)$$

Pero en este caso, tomado $z = i$ obtenemos que

$$\rho_3(\{i-1, i\}) = \frac{28-3i}{26} \notin (0, +\infty)$$

una contradicción. □

Ejercicio 52. — Terminar la demostración anterior para el caso $n \geq 4$.

Ahora, consideremos la función $P_n(z)$ restringida sobre $\Gamma_0 = \mathbb{Z}[i]$. ¿Será posible redefinirla sobre Γ_0^* de manera que esta sea analítica discreta en (Γ, Γ^*, ρ) ?

Analizemos esta pregunta para $n = 3$. Fijemos algún valor $a \in \mathbb{C}$ y definamos

$$F\left(\frac{1-i}{2}\right) = a$$

$$F(z) = z^3, \quad z \in \mathbb{Z}[i]$$

Queremos ver si es posible definir $F(z)$ para el resto de los puntos en Γ_0^* de manera que F sea analítica discreta. Consideremos una elección para tales valores :

$$w_z = F\left(z + \frac{1-i}{2}\right), \quad \forall z \in \mathbb{Z}[i]$$

donde $w_0 = a$. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann discretas dan el siguiente sistema de ecuaciones :

$$\begin{cases} w_{z+i} &= w_z + i(1 + 3z + 3z^2) \\ w_{z-1+i} &= w_{z+i} + i(-i - 3z + 3iz^2) \\ w_{z-1} &= w_{z-1+i} + i(-1 + 3z - 3z^2) \\ w_z &= w_{z-1} + i(i - 3z - 3iz^2) \end{cases}$$

Notemos que la igualdad $w_z = w_{z-1} + i(i-3z-3iz^2)$ es consecuencia de las otras tres. Ahora no es difícil ver que el resto de los valores w_z quedan únicamente determinados por a , por ejemplo, tomando $z = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}w_i &= a + i \\w_{-1+i} &= a + 1 + i \\w_{-1} &= a + 1\end{aligned}$$

En conclusión, todas las funciones analíticas discretas F para (Γ, Γ^*, ρ) , cuyas restricciones a Γ_0 es dada por $P_3(z) = z^3$, están únicamente determinadas por el valor de $F(\frac{1-i}{2})$, es decir, es un espacio vectorial complejo de dimensión 1.

Ejercicio 53. — Analizar el ejemplo anterior para los polinomios $P_n(z) = z^n$, $n \geq 4$.

12.3. Descomposición

Ahora veamos el tema de descomposición de funciones analíticas discretas. Sabemos que toda función analítica discreta $f : \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{C}$ se puede escribir como $f = u + v$, donde

$$u(x) = \begin{cases} \hat{u}(x), & x \in \Gamma_0 \\ 0, & x \in \Gamma_0^* \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Gamma_0 \\ \hat{v}(x), & x \in \Gamma_0^* \end{cases}$$

y

$$\hat{u} : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{v} : \Gamma_0^* \rightarrow \mathbb{C}$$

son funciones discretas armónicas que satisfacen

$$\begin{aligned}\hat{v}(w+i) - \hat{v}(w) &= i(\hat{u}(z+1) - \hat{u}(z)), \\ \hat{v}(w+i-1) - \hat{v}(w+i) &= i(\hat{u}(z+i) - \hat{u}(z)), \quad w = z + \frac{1-i}{2}.\end{aligned}$$

Ahora, si escogemos de manera arbitraria $a \in \mathbb{C}$, entonces definiendo

$$\hat{v}\left(\frac{1-i}{2}\right) = a$$

podemos determinar \hat{v} de manera única, es decir, \hat{v} queda únicamente determinada salvo una constante en \mathbb{C} . De esta manera, para obtener las funciones analíticas discretas, necesitamos ver como construir las funciones armónicas discretas

$$\hat{u} : \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{C}$$

La condición de armonicidad en el punto $z \in \mathbb{Z}[i]$ es en este caso equivalente a pedir

$$4\hat{u}(z) = \hat{u}(z+1) + \hat{u}(z+i) + \hat{u}(z-1) + \hat{u}(z-i).$$

Podemos hacer una elección arbitraria para los valores de \hat{u} en los puntos en $\mathbb{Z} \cup (\mathbb{Z}-i)$ los cuales determinan únicamente los valores de \hat{u} en el resto de $\mathbb{Z}[i]$. En otras palabras, si

$$a = (\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$$

$$b = (\dots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$$

entonces la definición

$$\widehat{u}_{(a,b)} : \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{C}$$

por

$$\widehat{u}_{(a,b)}(n) = a_n, \quad \widehat{u}_{(a,b)}(n-i) = b_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

permite definir una isomorfismo entre el espacio de funciones armónicas discretas en $\mathbb{Z}[i]$ y $\mathcal{P} = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.

Ahora, para cada $(a, b) \in \mathcal{P}$, $\widehat{u}_{(a,b)}$ determina de manera única, módulo una constante $c \in \mathbb{C}$ una única función armónica discreta $\widehat{v}_{(a,b,c)}$ de manera que $f = u_{(a,b)} + v_{(a,b,c)}$ es analítica discreta. De esta manera, el espacio de las funciones analíticas discretas en $C^0(\Lambda)$ es naturalmente equivalente al espacio $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{C}$.

Si para cada $n \in \mathbb{Z}$ denotamos por $e_n = (\dots, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$, donde el 1 va en la posición n , por $0 = (\dots, 0, 0, 0, \dots)$, y

$$e_{n,0} = \widehat{u}_{(e_n,0)}, \quad e_{0,n} = \widehat{u}_{(0,e_n)},$$

entonces, si

$$(a, b) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(e_n, 0) + b_n(0, e_n)$$

tenemos que

$$\widehat{u}_{(a,b)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e_{n,0} + b_n e_{0,n}$$

12.4. Teorema de Morera discreto

Escogemos una orientación por cada eje $e \in \diamond_1$ y consideramos el \mathbb{Z} -módulo generado por todos esos ejes orientados : $C_1(\diamond)$.

Si tenemos una función $f : \Lambda_0 = \diamond_0 \rightarrow \mathbb{C}$ y $(x, y) \in C_1(\diamond)$, entonces podemos definir la integral

$$\int_x^y f(z) dz = \int_{(x,y)} f(z) dz = \frac{f(x) + f(y)}{2}(y - x)$$

Ahora, extendemos esto a todo $C_1(\diamond)$ de manera de obtener un homomorfismos entre \mathbb{Z} -módulos, es decir

$$\int_{\sum_{j=1}^n n_j(x_{j1}, x_{j2})} f(z) dz = \sum_{j=1}^n n_j \left(\frac{f(x_{j1}) + f(x_{j2})}{2} \right) (x_{j2} - x_{j1})$$

Consideremos una cara de la descomposición celular diamante \diamond como lo muestra la Figura 12.1. Consideremos el camino cerrado dado por

$$\gamma = \left(z, z + \frac{1-i}{2} \right) + \left(z + \frac{1-i}{2}, z + 1 \right) + \left(z + 1, z + \frac{1+i}{2} \right) + \left(z + \frac{1+i}{2}, z \right) \in C_1(\diamond)$$

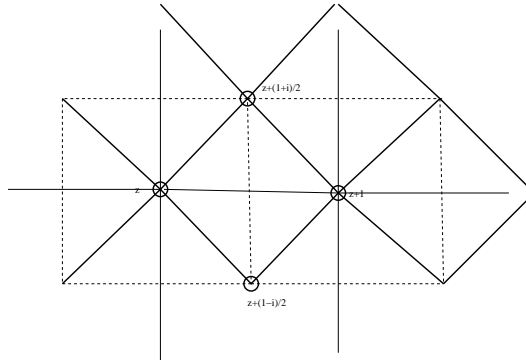


FIGURA 12.1

Luego,

$$-2 \int_{\gamma} f(z) dz = \left(f\left(z + \frac{1+i}{2}\right) - f\left(z + \frac{1-i}{2}\right) \right) - i(f(z+1) - f(z))$$

Esta igualdad permite ver el siguiente.

Teorema 12.4.1 (Versión discreta del teorema de Morera). — Una función $f : \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica discreta si y sólo si la integral de f a lo largo de cualquier camino cerrado en $C_1(\diamond)$ es idénticamente 0.

Corolario 12.4.2. — Si $f : \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica discreta, entonces la función $F : \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$F(z) = \int_0^z f(z) dz$$

donde los arcos de integración son escogidos en $C_1(\diamond)$ define una función analítica discreta.

Ejercicio 54. — Sean $f, g : \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{C}$ funciones analíticas discretas y considere la definición

$$\int_{\sum_{j=1}^n n_j(x_{j1}, x_{j2})} f dg = \sum_{j=1}^n n_j \left(\frac{f(x_{j1}) + f(x_{j2})}{2} \right) (g(x_{j2}) - g(x_{j1}))$$

Defina, para cada $z \in \Lambda_0$ la función

$$F(z) = \int_0^z f dg$$

donde la integración se realiza sobre un camino en $C_1(\diamond)$ que parte desde 0 y termina en z .

- 1.- Verificar que la definición anterior no depende del camino escogido.
- 2.- Buscar ejemplos de f y g de manera que $F(z)$ no es analítica discreta.

Ejemplo 28. — Recordemos que los polinomios $P_n(z) = z^n$, con $n \geq 3$, no son funciones analíticas discretas. Pero las siguientes "pseudo-Potencias" lo son (ver el Corolario 12.4.2):

$$z^{(0)} = 1, \quad z^{(n)} = n \int_0^z w^{(n-1)} dw, \quad n = 1, \dots$$

Estas pseudo-potencias generan el espacio vectorial de los polinomios discretos. En [8], Duffin verificó que $z^{(n)} - z^n$ es un polinomio en z y \bar{z} de grado a lo más $(n - 2)$.

Ahora que tenemos los análogos de las potencias de z , podemos construir más funciones analíticas discretas por medio de series de potencia. Por ejemplo, podemos definir la exponencial discreta

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{(n)}$$

De hecho, uno puede definir, para $|t| < 2$, la función

$$e^{z,t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{(n)} t^n$$

J. Lelong-Ferrand verificó la fórmula

$$e^{z,t} = \left(\frac{2+t}{2-t} \right)^{\operatorname{Re}(z)} \left(\frac{2+it}{2-it} \right)^{\operatorname{Im}(z)}$$

la cual es analítica discreta para cualquier valor $t \in \mathbb{C} - \{\pm 2, \pm 2i\}$.

CAPÍTULO 13

DIFERENCIALES EN SUPERFICIES DE RIEMANN DISCRETAS

Durante todo este capítulo supondremos que tenemos una estructura de superficie de Riemann discreta, digamos (Γ, Γ^*, ρ) , sobre una superficie orientada Σ , y su correspondiente doble Λ . Consideramos una orientación en los ejes $e \in \Gamma_1$ y colocamos una orientación en los ejes duales $e^* \in \Gamma_1^*$ de manera que si e y e^* son ejes duales, entonces las orientaciones de e y e^* son como se bosqueja en la figura 13.1.

13.1. Homología para superficies de Riemann discretas

Ya hemos definido los \mathbb{Z} -módulos de los mapas Γ y Γ^* . En el caso de Λ , que no es una mapa, pero que debemos pensar como la unión disjunta de dos mapas, uno define :

$$C_k(\Lambda) = C_k(\Gamma) \oplus C_k(\Gamma^*), \quad k = 0, 1, 2.$$

Observación 13.1.1. — Con esta convención en la asignación de orientaciones, tenemos que $(e^*)^* = e^{**} = -e$.

También definimos el operador frontera

$$\partial_k^\Lambda : C_k(\Lambda) \rightarrow C_{k-1}(\Lambda)$$

de manera que

$$\partial_k^\Lambda(u + v) = \partial_k^\Gamma(u) + \partial_k^{\Gamma^*}(v)$$

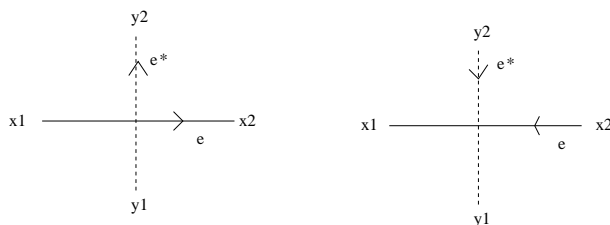


FIGURA 13.1

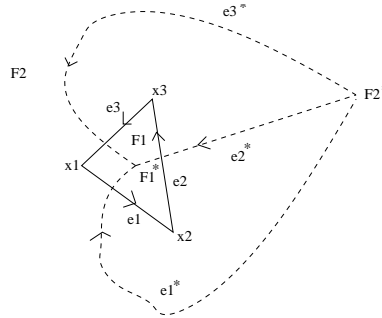


FIGURA 13.2

donde $u \in C_k(\Gamma)$, $v \in C_k(\Gamma^*)$.

Ejercicio 55. — Verificar que $\partial_1^\Lambda \partial_2^\Lambda = 0$.

El primer grupo de homología asociado al doble Λ es definido como

$$H_1(\Lambda, \mathbb{Z}) = \frac{\text{Ker}(\partial_1^\Lambda)}{\text{Im}(\partial_2^\Lambda)}$$

Ejercicio 56. — Verificar que

$$H_1(\Lambda, \mathbb{Z}) = H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) \oplus H_1(\Gamma^*, \mathbb{Z})$$

Ejemplo 29. — Sea $\Sigma = S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ la esfera 2-dimensional. Consideremos el mapa $\Gamma = K_3$ y su dual Γ^* (ver Figura 13.2).

$$\begin{aligned} \partial_2^\Gamma(F_1) &= e_1 + e_2 + e_3 \\ \partial_2^\Gamma(F_2) &= -e_1 - e_2 - e_3 \\ \partial_2^\Gamma(nF_1 + mF_2) &= (n - m)(e_1 + e_2 + e_3) \\ \text{Im}(\partial_2^\Gamma) &= \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle \cong \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_1^\Gamma(e_1) &= x_2 - x_1 \\ \partial_1^\Gamma(e_2) &= x_3 - x_2 \\ \partial_1^\Gamma(e_3) &= x_1 - x_3 \\ \partial_1^\Gamma(ae_1 + be_2 + ce_3) &= (c - a)x_1 + (a - b)x_2 + (b - c)x_3 \\ \text{Ker}(\partial_1^\Gamma) &= \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle \cong \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) = \{0\}$$

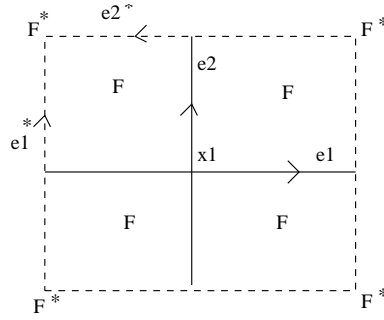


FIGURA 13.3

$$\begin{aligned}\partial_2^{\Gamma^*}(x_1^*) &= e_1^* - e_3^* \\ \partial_2^{\Gamma^*}(x_2^*) &= e_2^* - e_1^* \\ \partial_2^{\Gamma^*}(x_3^*) &= e_3^* - e_2^* \\ \partial_2^{\Gamma^*}(nx_1^* + mx_2^* + rx_3^*) &= (n-m)e_1^* + (m-r)e_2^* + (r-n)e_3^* \\ \text{Im}(\partial_2^{\Gamma^*}) &= \langle e_1^* - e_2^*, e_1^* - e_3^* \rangle \cong \mathbb{Z}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_1^{\Gamma^*}(e_1^*) &= F_1^* - F_2^* \\ \partial_1^{\Gamma^*}(e_2^*) &= F_1^* - F_2^* \\ \partial_1^{\Gamma^*}(e_3^*) &= F_1^* - F_2^* \\ \partial_1^{\Gamma^*}(ae_1^* + be_2^* + ce_3^*) &= (a+b+c)(F_1^* - F_2^*) \\ \text{Ker}(\partial_1^{\Gamma^*}) &= \langle e_1^* - e_2^*, e_1^* - e_3^* \rangle \cong \mathbb{Z}^2\end{aligned}$$

$$H_1(\Gamma^*, \mathbb{Z}) = \{0\}$$

$$H_1(\Lambda, \mathbb{Z}) = \{0\}$$

Ejemplo 30. — Ahora consideremos $\Sigma = S^1 \times S^1$, es decir un toro. Podemos pensar en Σ como el cuadrado unitario donde los lados opuestos están identificados. Consideremos el mapa Γ y su dual Γ^* como se muestra en la figura 13.3.

En este caso $\Gamma_0 = \{x_1\}$, $\Gamma_1 = \{e_1, e_2\}$, $\Gamma_2 = \{F\}$, $\Gamma_0^* = \{F^*\}$, $\Gamma_1^* = \{e_1^*, e_2^*\}$ y $\Gamma_2^* = \{x_1^*\}$.

$$\begin{aligned}\partial_2^{\Gamma}(F) = 0 &\implies \text{Im}(\partial_2^{\Gamma}) = \{0\} \\ \partial_1^{\Gamma}(e_1) = \partial_1^{\Gamma}(e_2) = 0 &\implies \text{Ker}(\partial_1^{\Gamma}) = \langle e_1, e_2 \rangle \cong \mathbb{Z}^2 \\ H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}^2\end{aligned}$$

$$\partial_2^{\Gamma^*}(x_1^*) = 0 \implies \text{Im}(\partial_2^{\Gamma^*}) = \{0\}$$

$$\partial_1^{\Gamma^*}(e_1^*) = \partial_1^{\Gamma^*}(e_2^*) = 0 \implies \text{Ker}(\partial_1^{\Gamma^*}) = \langle e_1^*, e_2^* \rangle \cong \mathbb{Z}^2$$

$$H_1(\Gamma^*, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$$

$$H_1(\Lambda, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^4$$

Teorema 13.1.2. — Sea (Γ, Γ^*, ρ) una estructura de superficie de Riemann discreta sobre una superficie orientada Σ que es cerrada de género g . Entonces

$$H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) \cong H_1(\Gamma^*, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$$

$$H_1(\Lambda, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{4g}$$

Demonstración. — Como Γ_1 es un grafo conexo, podemos considerar un árbol maximal $T \subset \Gamma_1$. Luego, cada vez que adicionamos un eje $e \in \Gamma_1 - T$ a T obtenemos un ciclo $\gamma_e \subset T \cup e$. Como Σ tienen género g , podemos encontrar $2g$ ejes, digamos, $e_1, \dots, e_{2g} \in \Gamma_1 - T$ tal que cada uno de ellos define un ciclo, digamos $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$, donde $\gamma_j \subset T \cup e_j$. Ahora, esos $2g$ ciclos forman una base para $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$. Más aún, esos ciclos se pueden reordenar de manera que en la superficie Σ valen las siguientes propiedades de intersección de caminos en homología usual ($1 \leq i, j \leq g$):

$$\begin{cases} \gamma_i \cdot \gamma_j = 0 \\ \gamma_{i+g} \cdot \gamma_{j+g} = 0 \\ \gamma_i \cdot \gamma_{j+g} = \delta_{ij} \end{cases}$$

La demostración para Γ^* es similar. La última parte sale del hecho que $H_1(\Lambda, \mathbb{Z}) = H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) \oplus H_1(\Gamma^*, \mathbb{Z})$. □

Observación 13.1.3. — Los caminos $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ que se construyen en la demostración anterior forman una base canónica de homología para $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$.

Ejemplo 31. — Sea $\Sigma = \mathbb{C}$. Consideremos el mapa Γ donde $\Gamma_0 = \mathbb{Z}[i]$, los ejes en Γ_1 son los trazos rectos de la forma $\{z+t : t \in [0, 1]\}$ y $\{z+ti : t \in [0, 1]\}$. Cada cara es un cuadrado unitario. Orientamos cada eje anterior siguiendo la orientación natural dada por $t \in [0, 1]$. De esta manera, en cada vértice $z_{n,m} = n + im \in \mathbb{Z}[i]$ tenemos un eje saliendo hacia la derecha ($e_{n,m,1}$), uno saliendo hacia arriba ($e_{n,m,i}$), uno llegando desde la izquierda ($e_{n-1,m,1}$) y uno llegando desde abajo ($e_{n,m,-1,i}$). En este caso, denotemos por $F_{n,m}$ a la cara con vértice en $z_{n,m}$ y conteniendo a los ejes $e_{n,m,1}$ y $e_{n,m,i}$.

$$\partial_2^\Gamma(F_{n,m}) = e_{n,m,1} + e_{n+1,m,i} - e_{n,m+1,1} - e_{n,m,i}$$

$$\partial_1^\Gamma(e_{n,m,1}) = z_{n+1,m} - z_{n,m}$$

$$\partial_1^\Gamma(e_{n,m,i}) = z_{n,m+1} - z_{n,m}$$

Luego, $\text{Ker}(\partial_1^\Gamma) = \text{Im}(\partial_2^\Gamma)$ y se tiene que $H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) = \{0\}$.

13.2. Cohomología para superficies de Riemann discretas

Anteriormente hemos definido los espacios vectoriales $C^k(\Gamma)$ y $C^k(\Gamma^*)$ el \mathbb{Z} -módulo $C_k(\Lambda) = C_k(\Gamma) \oplus C_k(\Gamma^*)$, $k = 0, 1, 2$. Podemos definir el espacio vectorial $C^k(\Lambda) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_k(\Lambda), \mathbb{C})$.

Ejercicio 57. — Verificar que

$$C^k(\Lambda) = C^k(\Gamma) \oplus C^k(\Gamma^*), \quad k = 0, 1, 2.$$

El operador cofrontera para Λ se define como

$$d_k^\Lambda : C^k(\Lambda) \rightarrow C^{k+1}(\Lambda)$$

$$d_k^\Lambda(u + v) = d_k^\Gamma(u) + d_k^\Gamma(v)$$

donde $u \in C^k(\Gamma)$ y $v \in C^k(\Gamma^*)$.

Ejercicio 58. — Verificar que $d_1^\Lambda d_0^\Lambda = 0$.

El primer grupo de cohomología asociado al doble Λ es definido como

$$H^1(\Lambda, \mathbb{C}) = \frac{\text{Ker}(d_1^\Lambda)}{\text{Im}(d_0^\Lambda)}$$

Ejercicio 59. — Verificar que

$$H^1(\Lambda, \mathbb{C}) = H^1(\Gamma, \mathbb{C}) \oplus H^1(\Gamma^*, \mathbb{C})$$

Teorema 13.2.1. — Si Σ es una superficie orientada cerrada de género g , entonces

$$H^1(\Gamma, \mathbb{Z}) \cong H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$$

$$H^1(\Gamma^*, \mathbb{Z}) \cong H_1(\Gamma^*, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$$

$$H^1(\Lambda, \mathbb{Z}) \cong H_1(\Lambda, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{4g}$$

Demonstración. — (Idea) Como $H_1(\Lambda, \mathbb{Z}) \cong H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) \oplus H_1(\Gamma^*, \mathbb{Z})$, $H^1(\Lambda, \mathbb{C}) \cong H^1(\Gamma, \mathbb{C}) \oplus H^1(\Gamma^*, \mathbb{C})$ y $H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) \cong H_1(\Gamma^*, \mathbb{Z})$, basta con verificar que $H^1(\Gamma, \mathbb{Z}) \cong H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$. Ahora, basta con asegurar que la dualidad

$$C^1(\Gamma) \times C_1(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\left(\alpha, \sum_{j=1}^r n_j e_j \right) \mapsto \sum_{j=1}^r n_j \int_{e_j} \alpha$$

induce una dualidad

$$H^1(\Gamma, \mathbb{C}) \times H_1(\Gamma, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

con lo cual se verifica que $H^1(\Gamma, \mathbb{C}) \cong H_1(\Gamma, \mathbb{C})^*$ (dual). Como $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ tiene dimensión finita como \mathbb{Z} -módulo, se obtiene que $H^1(\Gamma, \mathbb{C}) \cong H_1(\Gamma, \mathbb{C})$ y, en particular,

obtenemos que $H^1(\Gamma, \mathbb{Z}) \cong H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$. Una demostración más rigurosa será dada más adelante.

□

13.3. La función \star de Hodge

El operador \star de Hodge

$$\star : C^k(\Lambda) \rightarrow C^{2-k}(\Lambda), \quad k = 0, 1, 2,$$

se define como sigue :

Caso $k = 0$. —

$$\begin{aligned} \star : C^0(\Lambda) &\rightarrow C^2(\Lambda) \\ \iint_F \star f &= f(F^*) \end{aligned}$$

Caso $k = 1$. —

$$\begin{aligned} \star : C^1(\Lambda) &\rightarrow C^1(\Lambda) \\ \int_e \star \alpha &= -\rho(e^*) \int_{e^*} \alpha \end{aligned}$$

Caso $k = 2$. —

$$\begin{aligned} \star : C^2(\Lambda) &\rightarrow C^0(\Lambda) \\ \star \omega(v) &= \iint_{v^*} \omega \end{aligned}$$

Proposición 13.3.1. —

$$\star^2 = (-1)^k I_{C^k(\Lambda)}$$

Demonstración. —

(1) Caso $k = 0$. Sean $f \in C^0(\Lambda)$ y $v \in C_0(\Lambda)$.

$$\star(\star f)(v) = \iint_{v^*} \star f = f(v^{**}) = f(v)$$

(2) Caso $k = 2$. Sean $\omega \in C^2(\Lambda)$ y $F \in C_2(\Lambda)$.

$$\star(\star \omega)(F) = \star \omega(F^*) = \iint_{F^{**}} \omega = \iint_F \omega = \omega(F)$$

(3) Caso $k = 1$. Sean $\alpha \in C^1(\Lambda)$ y $e \in C_1(\Lambda)$.

$$\begin{aligned} \star(\star \alpha)(e) &= -\rho(e^*) \int_{e^*} \star \alpha = (-\rho(e^*))(-\rho(e^{**})) \int_{e^{**}} \alpha = \\ &= \rho(e^*)\rho(e) \int_{-e} \alpha = - \int_e \alpha = -\alpha(e) \end{aligned}$$

□

Ejercicio 60. — Verificar que el operador \star produce isomorfismos entre los siguientes espacios vectoriales

$$\star : C^k(\Gamma) \rightarrow C^{2-k}(\Gamma^*)$$

$$\star : C^k(\Gamma^*) \rightarrow C^{2-k}(\Gamma)$$

Ejercicio 61. — Verificar que si $f \in C^0(\Lambda)$, entonces las ecuaciones discretas de Cauchy-Riemann para f puede escribirse como

$$\star d_0^\Lambda f = -i d_0^\Lambda f$$

NOTACION. Desde ahora en adelante usaremos la notación d para indicar d_k^Λ .

13.3.1. Caso $k = 1$. — Tenemos que el operador \star de Hodge produce un automorfismo de orden 4 a nivel de la 1-formas :

$$\star : C^1(\Lambda) \rightarrow C^1(\Lambda)$$

En particular, tenemos el isomorfismo

$$i\star : C^1(\Gamma) \rightarrow C^1(\Gamma^*)$$

$$\alpha \mapsto i\star \alpha$$

cuyo inverso es

$$i\star : C^1(\Gamma^*) \rightarrow C^1(\Gamma)$$

Ya que $\star : C^1(\Lambda) \rightarrow C^1(\Lambda)$ satisface que $\star^2 = -I$, tenemos que sus valores propios son $\pm i$. Podemos considerar sus espacios propios asociados :

$$C^{1,0}(\Lambda) = \{\alpha \in C^1(\Lambda) : \star\alpha = -i\alpha\}$$

$$C^{0,1}(\Lambda) = \{\alpha \in C^1(\Lambda) : \star\alpha = i\alpha\}$$

Ahora, si $\alpha \in C^1(\Lambda)$, entonces

$$\frac{\alpha + i\star\alpha}{2} \in C^{1,0}(\Lambda)$$

$$\frac{\alpha - i\star\alpha}{2} \in C^{0,1}(\Lambda)$$

De lo anterior, obtenemos la suma directa

$$C^1(\Lambda) = C^{1,0}(\Lambda) \oplus C^{0,1}(\Lambda)$$

Notemos que cada sumando es invariante por \star y que \star actúa como multiplicación por $-i$ sobre $C^{1,0}(\Lambda)$ y como multiplicación por i sobre $C^{0,1}(\Lambda)$.

Consideremos las proyecciones naturales

$$\pi_{1,0} = \frac{1}{2}(I + i\star) : C^1(\Lambda) \rightarrow C^{1,0}(\Lambda)$$

$$\pi_{0,1} = \frac{1}{2}(I - i\star) : C^1(\Lambda) \rightarrow C^{0,1}(\Lambda)$$

13.4. Diferenciales analíticas y anti-analíticas discretas

Una 1-forma $\alpha \in C^1(\Lambda)$ es llamada analítica discreta si

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in C^{1,0}(\Lambda) \\ d\alpha = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \star\alpha = -i\alpha \\ d\alpha = 0 \end{array} \right\}$$

Una 1-forma $\alpha \in C^1(\Lambda)$ es llamada anti-analítica discreta si

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \in C^{0,1}(\Lambda) \\ d\alpha = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \star\alpha = i\alpha \\ d\alpha = 0 \end{array} \right\}$$

Denotaremos por $H^{1,0}(\Lambda)$ al conjunto de las 1-formas discretas analíticas y por $H^{0,1}(\Lambda)$ al de las 1-formas anti-analíticas discretas, es decir

$$H^{1,0}(\Lambda) = C^{1,0}(\Lambda) \cap Ker(d)$$

$$H^{0,1}(\Lambda) = C^{0,1}(\Lambda) \cap Ker(d)$$

Ejercicio 62. — Verificar que $H^{1,0}(\Lambda)$ y $H^{0,1}(\Lambda)$ son subespacios vectoriales de $C^1(\Lambda)$.

Ejercicio 63. — Verificar que si $\alpha \in H^{1,0}(\Lambda)$, entonces $\bar{\alpha} \in H^{0,1}(\Lambda)$ y, viceversa, si $\alpha \in H^{0,1}(\Lambda)$, entonces $\bar{\alpha} \in H^{1,0}(\Lambda)$. Verificar que la conjugación produce un isomorfismo como espacios vectoriales reales entre $H^{1,0}(\Lambda)$ y $H^{0,1}(\Lambda)$.

Proposición 13.4.1. — Si $\alpha \in C^1(\Lambda)$ es analítica discreta o antianalítica discreta, entonces α es cerrada y co-cerrada, es decir, $d\alpha = 0 = d\star\alpha$.

Demonstración. — Por la definición $d\alpha = 0$. Ahora, como $\star\alpha = \pm i\alpha$, se tiene que

$$d\star\alpha = d(\pm i\alpha) = \pm id\alpha = 0$$

□

Como consecuencia del resultado anterior, podemos escribir

$$H^{1,0}(\Lambda) = C^{1,0}(\Lambda) \cap (Ker(d) \cap Ker(d\star))$$

$$H^{0,1}(\Lambda) = C^{0,1}(\Lambda) \cap (Ker(d) \cap Ker(d\star))$$

Ejemplo 32. — Sea $f \in C^0(\Lambda)$. Consideremos la 1-forma $df \in C^1(\Lambda)$. Como $d^2 = 0$, tenemos que

$df \in H^{1,0}(\Lambda) \iff \star df = -idf$ (Ecuaciones de Cauchy-Riemann discretas para f), es decir,

df es diferencial analítica discreta $\iff f$ es función analítica discreta.

Teorema 13.4.2. — Si $\alpha \in H^{1,0}(\Lambda)$ y

$$\int_e \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall e \in C_1(\Lambda),$$

entonces $\alpha = 0$. El mismo resultado vale si reemplazamos \mathbb{R} con $i\mathbb{R}$.

Demonstración. — Supongamos que tenemos

$$\int_e \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall e \in C_1(\Lambda).$$

Luego, para $e \in C_1(\Lambda)$ vale que

$$\begin{aligned} \int_e \star \alpha &= -\rho(e^*) \int_{e^*} \alpha \in \mathbb{R} \\ \int_e -i\alpha &= -i \int_e \alpha \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

Como $\star \alpha = -i\alpha$ (pues $\alpha \in H^{1,0}(\Lambda)$), las dos ecuaciones aseguran que $\alpha = 0$. □

13.5. Diferenciales meromorfas discretas

Diremos que una 1-forma $\alpha \in C^{1,0}(\Lambda)$ es una 1-forma meromorfa discreta.

Si consideramos una 1-forma $\alpha \in C^1(\Lambda)$ y $F \in C_2(\Lambda)$, entonces por la fórmula de Stokes discreta tenemos la igualdad

$$\iint_F d\alpha = \int_{\partial F} \alpha$$

donde $\partial : C_2(\Lambda) \rightarrow C_1(\Lambda)$ es el operador frontera. Usando esta fórmula vemos que

$$\alpha \in H^{1,0}(\Lambda) \iff \begin{cases} \alpha \in C^{1,0}(\Lambda) \\ \int_{\partial F} \alpha = 0, \quad \forall F \in C_2(\Lambda) \end{cases}$$

De esta manera, podemos definir que un vértice $v \in \Lambda_0$ es un polo de la diferencial meromorfa discreta $\alpha \in C^{1,0}(\Lambda)$ si

$$\int_{\partial v^*} \alpha \neq 0 \quad \left(\iff \iint_{v^*} d\alpha \neq 0 \right).$$

Se define el residuo de α en $v \in \Lambda_0$ como

$$\text{Res}_v(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial v^*} \alpha = \frac{1}{2\pi i} \iint_{v^*} d\alpha$$

De la definición del residuo es claro el siguiente hecho.

Teorema 13.5.1. — Sea $\alpha \in C^{1,0}(\Lambda)$ y $\gamma \in C_1(\Lambda)$ un camino simple cerrado que acota un disco D_γ en la superficie Σ , orientado de manera que tal disco está a la izquierda. Entonces,

$$\oint_\gamma \alpha = 2\pi i \sum_{v^* \in D_2} \text{Res}_v(\alpha),$$

donde D_2 denota todas las caras de Λ_2 que están contenidas en D_γ .

Ejercicio 64. — Demostrar el resultado anterior.

Corolario 13.5.2. — Si Σ es superficie cerrada y $\alpha \in C^{1,0}(\Lambda)$, entonces

$$\sum_{v \in \Lambda_0} \text{Res}_v(\alpha) = 0$$

13.6. El operador discreto de Laplace revisitado

Emulando la situación clásica, podemos definir el operador de Laplace discreto como

$$\Delta_2 : C^k(\Lambda) \rightarrow C^k(\Lambda)$$

$$\Delta_2 = -(d \star d \star + \star d \star d)$$

Ejercicio 65. — Verificar que Δ_2 deja invariante $C^k(\Gamma)$ y $C^k(\Gamma^*)$.

13.7. Funciones armónicas revisitadas

En el primer capítulo definimos el operador de Laplace para funciones definidas sobre los vértices de un grafo (de grado finito) con una métrica discreta. Tal definición coincide con la dada en esta sección para $k = 0$. En efecto, en este caso

$$\Delta_2 : C^0(\Lambda) \rightarrow C^0(\Lambda)$$

$$\Delta_2 = -\star d \star d$$

Sea $f \in C^0(\Lambda)$ y $v \in \Gamma_0$. Denotemos por $v_1, \dots, v_l \in \Gamma_0$ los vecinos de v , y supongamos que $\partial v^* = \sum_{j=1}^l (-1)^{\delta_j} e_j^*$, donde $\delta_j \in \{0, 1\}$. En este caso $\delta_j = 0$ si el eje e_j está orientado de manera que v es el punto inicial y $\delta_j = 1$ en caso contrario. Ahora,

$$\begin{aligned} \Delta_2 f(v) &= - \star d \star df(v) = - \iint_{v^*} d \star df = - \int_{\partial v^*} \star df = - \sum_{j=1}^l (-1)^{\delta_j} \int_{e_j^*} \star df = \\ &= - \sum_{j=1}^l (-1)^{\delta_j} (-\rho(e_j^{**})) \int_{e_j^{**}} df = - \sum_{j=1}^l (-1)^{\delta_j} \rho(e_j^{**}) \int_{e_j} df = - \sum_{j=1}^l (-1)^{\delta_j} \rho(e_j) \int_{e_j} df = \\ &= - \sum_{j=1}^l \rho(e_j) \int_{(-1)^{\delta_j} e_j} df = - \sum_{j=1}^l \rho(e_j) (f(v_j) - f(v)) = \sum_{j=1}^l \rho(e_j) (f(v) - f(v_j)) \end{aligned}$$

De manera similar para el caso cuando $v \in \Gamma_0^*$.

13.8. Formas armónicas

Una k -forma $\alpha \in C^k(\Lambda)$ es llamada armónica si $\Delta_2 \alpha = 0$.

Ejercicio 66. — Verificar que toda 1-forma analítica y anti-analítica discreta es armónica.

Ejercicio 67. — Si $f \in C^0(\mathcal{G})$ es armónica, entonces df es armónica.

Si consideremos el operador

$$d^* = - \star d \star$$

entonces tenemos el siguiente diagrama

$$C^2(\Lambda) \xrightarrow{d^*} C^1(\Lambda) \xrightarrow{d^*} C^0(\Lambda) \xrightarrow{d^*} 0$$

Proposición 13.8.1. —

$$d^* d^* = 0$$

Demonstración. — Basta analizar el caso

$$C^2(\Lambda) \xrightarrow{(d^*)^2} C^0(\Lambda)$$

Tenemos que

$$d^* d^* = (- \star d \star)(- \star d \star) = \star d \star^2 d \star = - \star d^2 \star = 0$$

□

También tenemos los diagramas siguientes

$$\begin{array}{ccccccc} C^2(\Lambda) & \xrightarrow{d^*} & C^1(\Lambda) & \xrightarrow{d^*} & C^0(\Lambda) & \xrightarrow{d^*} & 0 \\ C^2(\Lambda) & \xleftarrow{d} & C^1(\Lambda) & \xleftarrow{d} & C^0(\Lambda) & \xleftarrow{d} & 0 \end{array}$$

Proposición 13.8.2. —

$$\Delta_2 = dd^* + d^*d$$

Demonstración. —

$$dd^* + d^*d = -d \star d \star - \star d \star d = -(d \star d \star + \star d \star d) = \Delta_2$$

□

Corolario 13.8.3. — $\text{Ker}(d) \cap \text{Ker}(D^*) = \text{Ker}(d) \cap \text{Ker}(d\star) \subset \text{Ker}\Delta_2$.

PARTE V

SUPERFICIES DE RIEMANN DISCRETAS COMPACTAS

En esta parte nos restringiremos al caso de estructuras de superficies de Riemann discretas sobre superficies orientadas y cerradas. Primero veremos el teorema de descomposición de Hodge y calcularemos la dimensión del espacio de diferenciales holomorfas analíticas. Luego analizaremos el concepto de matrices de Riemann discretas.

CAPÍTULO 14

EL TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN DE HODGE

En este capítulo, Σ será una superficie orientada cerrada de género g y (Γ, Γ^*, ρ) una estructura de superficie de Riemann discreta sobre Σ . En este caso, los grafos Γ y Γ^* son finitos.

14.1. Operador adjunto de d

Como los mapas Γ y Γ^* son finitos, tenemos que los espacios vectoriales complejos $C^k(\Lambda)$ son finito dimensionales.

Consideremos los productos hermitianos positivos definidos canónicos dados por

$$(f, g) = \sum_{x \in \Lambda_0} f(x) \overline{g(x)}, \quad f, g \in C^0(\Lambda)$$

$$(\alpha, \beta) = \sum_{e \in \Lambda_1} \rho(e) \int_e \alpha \overline{\int_e \beta}, \quad \alpha, \beta \in C^1(\Lambda)$$

$$(\omega, \theta) = \sum_{F \in \Lambda_2} \iint_F \omega \overline{\iint_F \theta}, \quad \omega, \theta \in C^2(\Lambda)$$

Ejercicio 68. — Verificar que en $C^1(\Lambda)$ vale la igualdad

$$(\alpha, \beta) = (\star\alpha, \star\beta)$$

es decir, que el operador \star de Hodge es una isometría para el producto Hermitiano positivo definido en $C^1(\Lambda)$.

Usando estos productos hermitianos, podemos considerar el operador adjunto de d .

Proposición 14.1.1. — El operador adjunto de

$$d : C^{k-1}(\Lambda) \rightarrow C^k(\Lambda)$$

es

$$d^* : C^k(\Lambda) \rightarrow C^{k-1}(\Lambda)$$

Demonstración. — Veamos el caso $k = 1$. Para cada $x_0 \in \Lambda_0$ sea $f_{x_0} \in C^0(\Lambda)$ definida por

$$f_{x_0}(x_0) = 1, \quad f_{x_0}(x) = 0, \quad \text{si } x \neq x_0$$

Es claro que la colección

$$\{f_x : x \in \Lambda_0\}$$

define una base de $C^0(\Lambda)$. Consideremos una orientación en los ejes de Λ y denotemos por (x, y) al eje orientado de manera que x es la partida.

Sea $f = f_{x_0}$ y denotemos por x_1, \dots, x_n los vértices vecinos de x_0 . Escribamos

$$\partial x_0^* = \sum_{j=1}^n (-1)^{\delta_j} e_j^*$$

donde

$$\delta_j = \begin{cases} 0, & e_j = (x_0, x_j) \\ 1, & e_j = (x_j, x_0) \end{cases}$$

Para $\alpha \in C^1(\Lambda)$ tenemos

$$\begin{aligned} (df, \alpha) &= \sum_{(x, \hat{x}) \in \Lambda_1} \rho(\{x, \hat{x}\}) \int_{(x, \hat{x})} df \int_{(x, \hat{x})} \bar{\alpha} = \sum_{(x, \hat{x}) \in \Lambda_1} \rho(\{x, \hat{x}\}) (f(\hat{x}) - f(x)) \int_{(x, \hat{x})} \bar{\alpha} = \\ &= \sum_{j=1}^n \rho(e_j) (-1)^{\delta_j} (f(x_j) - f(x_0)) \int_{e_j} \bar{\alpha} = \sum_{j=1}^n \rho(e_j) (-1)^{\delta_j+1} f(x_0) \int_{e_j} \bar{\alpha} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (f, d^* \alpha) &= \sum_{x \in \Lambda_0} f(x) \overline{d^* \alpha(x)} = \overline{d^* \alpha(x_0)} = -\overline{\star d \star \alpha(x_0)} = -\overline{\iint_{x_0^*} d \star \alpha} = \\ &= -\overline{\int_{\partial x_0^*} \star \alpha} = -\sum_{j=1}^n (-1)^{\delta_j} \overline{\int_{e_j^*} \star \alpha} = \sum_{j=1}^n (-1)^{\delta_j} \rho(e_j) \overline{\int_{e_j^{**}} \alpha} = \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{\delta_j} \rho(e_j) (-1) \int_{e_j} \bar{\alpha} = \sum_{j=1}^n \rho(e_j) (-1)^{\delta_j+1} f(x_0) \int_{e_j} \bar{\alpha} \end{aligned}$$

□

Ejercicio 69. — Completar la demostración anterior considerando los demás casos.

14.2. Descomposición de Hodge

El hecho que d y d^* son conjugados, respecto a los productos hermitianos usados, asegura que $(Im(d^*))^\perp = Ker(d)$, luego

$$C^k(\Lambda) = Im(d^*) \oplus_\perp Ker(d)$$

Como $d^2 = 0$ tenemos que

$$Im(d) < ker(d)$$

es decir

$$C^k(\Lambda) = Im(d^*) \oplus_\perp Im(d) \oplus_\perp (Ker(d) \cap (Im(d))^\perp)$$

y como además $(Im(d))^\perp = Ker(d^*)$, tenemos

$$C^k(\Lambda) = Im(d^*) \oplus_\perp Im(d) \oplus_\perp (Ker(d) \cap Ker(d^*))$$

Proposición 14.2.1. —

$$Ker(\Delta_2) = Ker(d) \cap Ker(d^*)$$

Demonstración. — Como $\Delta_2 = dd^* + d^*d$, es claro que

$$Ker(d) \cap Ker(d^*) < Ker(\Delta_2).$$

Recíprocamente, queremos ver que si $\alpha \in Ker(\Delta_2) \cap (Im(d) \cup Im(d^*))$, entonces $\alpha = 0$.

Supongamos que $\alpha \in Ker(\Delta_2) \cap Im(d)$. Entonces,

$$\alpha = d\eta \implies d\alpha = d^2\eta = 0 \implies \alpha \in Ker(d)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \Delta_2\alpha = 0 &\implies dd^*\alpha + d^*d\alpha = 0 \implies dd^*\alpha = 0 \\ &\implies d^*\alpha \in Im(d^*) \cap Ker(d) = (Ker(d))^\perp \cap Ker(d) = \{0\} \\ &\implies d^*\alpha = 0 \implies \alpha \in Ker(d^*) \implies \alpha \in Ker(d) \cap Ker(d^*) \end{aligned}$$

Similarmente, si $\alpha \in Ker(\Delta_2) \cap Im(d^*)$. Entonces,

$$\alpha = d^*\eta \implies d^*\alpha = (d^*)^2\eta = 0 \implies \alpha \in Ker(d^*)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \Delta_2\alpha = 0 &\implies dd^*\alpha + d^*d\alpha = 0 \implies d^*d\alpha = 0 \\ &\implies d\alpha \in Im(d) \cap Ker(d^*) = (Ker(d^*))^\perp \cap Ker(d^*) = \{0\} \\ &\implies d\alpha = 0 \implies \alpha \in Ker(d) \implies \alpha \in Ker(d) \cap Ker(d^*) \end{aligned}$$

□

Corolario 14.2.2 (Descomposición de Hodge). —

$$C^k(\Lambda) = Im(d^*) \oplus_\perp Im(d) \oplus_\perp Ker(\Delta_2)$$

Observemos que, al ser \star un isomorfismo,

$$Ker(d^*) = ker(-\star d\star) = Ker(d\star) = \{\alpha \in C^k(\Lambda) : d\star\alpha = 0\}$$

Si $d\star\alpha = 0$, entonces decimos que α es una forma co-cerrada.

Ya que $Ker(\Delta_2) = Ker(d) \cap Ker(d^*) = Ker(d) \cap Ker(d\star)$, obtenemos la siguiente consecuencia.

Corolario 14.2.3. —

$$\alpha \in C^k(\Lambda) \text{ es armónica} \iff d\alpha = 0 = d\star\alpha \iff d\alpha = 0 = d^*\alpha$$

es decir, las formas armónicas son exactamente aquella que son cerradas y co-cerradas al mismo tiempo.

Ejemplo 33. — En el caso $k = 0$, como $d^* = 0$, tenemos que

$$Ker(\Delta_2) = Ker(d)$$

es decir, las únicas funciones armónicas son las constantes en componentes del grafo.

Proposición 14.2.4. — $Im(d^*) = Im(\star d)$.

Demonstración. — Si $\alpha \in Im(d^*)$, entonces $\alpha = d^*u = -\star d\star u \in Im(\star d)$. Si $\beta \in Im(\star d)$, entonces $\beta = \star dv = -\star d\star(\star v) = d^*\star v \in Im(d^*)$. □

Corolario 14.2.5. —

$$C^k(\Lambda) = \{k\text{-formas coexactas}\} \oplus \{k\text{-formas exactas}\} \oplus \{k\text{-formas armónicas}\}$$

14.2.1. 1-Formas armónicas sobre Γ . — Supongamos que tenemos $\alpha \in C^1(\Gamma)$. Podemos hacer la extensión trivial a Γ^* , es decir, $\int_{e^*} \alpha = 0$ para todo $e^* \in \Gamma_1^*$, para considerara $\alpha \in C^1(\Lambda)$. Sabemos de lo anterior que $\alpha \in C^1(\Lambda)$ es armónica sí y sólo si $d\alpha = d\star\alpha = 0$. La condición $d\alpha = 0$, en este caso, es equivalente a tener que $\int_{\partial T} \alpha = 0$ para cada cara $T \in \Gamma_2$. La condición $d\star\alpha = 0$ es equivalente a la condición $\sum_{w \in N(v)} \rho(\{v, w\}) \int_{\{v, w\}} \alpha = 0$ para cada $v \in \Gamma_0$. De esta manera, podemos hablar de 1-formas armónicas en $C^1(\Gamma)$:

$$\alpha \in C^1(\Gamma) \text{ es armónica} \iff \begin{cases} \int_{\partial T} \alpha = 0, & T \in \Gamma_2 \\ \sum_{w \in N(v)} \rho(\{v, w\}) \int_{\{v, w\}} \alpha = 0, & v \in \Gamma_0 \end{cases}$$

14.3. Descomposición de Hodge para el caso $k = 1$

En este caso tenemos las siguientes descomposiciones

$$C^1(\Lambda) = \text{Im}(d^*) \oplus_{\perp} \text{Im}(d) \oplus_{\perp} \text{Ker}(\Delta_2)$$

$$C^1(\Lambda) = C^{1,0}(\Lambda) \oplus C^{0,1}(\Lambda)$$

En particular, para cada $\alpha \in \text{Ker}(\Delta_2)$ existen únicos $w_1 \in C^{1,0}(\Lambda)$ y $w_2 \in C^{0,1}(\Lambda)$ de manera que

$$\alpha = w_1 + w_2$$

Como

$$\star w_1 = -iw_1, \quad \star w_2 = iw_2$$

$$\alpha \in \text{Ker}(\Delta_2) = \text{Ker}(d) \cap \text{Ker}(d^*) = \text{Ker}(d) \cap \text{Ker}(d\star)$$

tenemos que

$$0 = d\alpha = dw_1 + dw_2$$

$$0 = d\star\alpha = i(dw_2 - dw_1)$$

de donde obtenemos que

$$dw_1 = dw_2 = 0$$

es decir

$$w_1 \in H^{1,0}(\Lambda), \quad w_2 \in H^{0,1}(\Lambda)$$

de donde concluimos que

$$\text{Ker}(\Delta_2) \subset H^{1,0}(\Lambda) \oplus H^{0,1}(\Lambda)$$

Por otro lado, ya sabemos que

$$H^{1,0}(\Lambda) \subset \text{Ker}(\Delta_2), \quad H^{0,1}(\Lambda) \subset \text{Ker}(\Delta_2)$$

Teorema 14.3.1. —

$$\text{Ker}(\Delta_2) = H^{1,0}(\Lambda) \oplus H^{0,1}(\Lambda)$$

Si $\alpha \in C^1(\Lambda)$, entonces la descomposición

$$C^1(\Lambda) = \text{Im}(d) \oplus_{\perp} \text{Im}(d^*) \oplus_{\perp} \text{Ker}(\Delta_2)$$

asegura la existencia de únicos

$$\alpha_1 = df \in \text{Im}(d), \quad \alpha_2 = d^*\omega \in \text{Im}(d^*), \quad \alpha_3 \in \text{Ker}(\Delta_2)$$

de manera que

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

Recordemos que

$$H^1(\Lambda, \mathbb{C}) = \text{Ker}(d)/\text{Im}(d)$$

Si $\alpha \in \text{Ker}(d)$, entonces, como $\text{Ker}(\Delta_2) = \text{Ker}(d) \cap \text{Ker}(d^*)$, tenemos que

$$0 = d\alpha = d\alpha_1 + d\alpha_2 + d\alpha_3 = d\alpha_2 \implies \alpha_2 \in \text{Ker}(d)$$

de donde vemos que

$$\alpha_2 \in \text{Ker}(d) \cap \text{Im}(d^*) = \text{Ker}(d) \cap (\text{Ker}(d))^\perp = \{0\}$$

para concluir que

$$\text{Ker}(d) = \text{Im}(d) \oplus_\perp \text{Ker}(\Delta_2)$$

es decir

Corolario 14.3.2. —

$$H^1(\Lambda, \mathbb{C}) \cong \text{Ker}(\Delta_2) = H^{1,0}(\Lambda) \oplus H^{0,1}(\Lambda)$$

Ya habíamos visto que la conjugación

$$\tau : H^{1,0}(\Lambda) \rightarrow H^{0,1}(\Lambda) : \alpha \mapsto \bar{\alpha}$$

es un isomorfismo entre espacios vectoriales reales. También observamos que (de manera no muy rigurosa)

$$H^1(\Lambda, \mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} H_1(\Lambda, \mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{4g}$$

luego, al tensorizar por \mathbb{C} obtenemos el siguiente hecho.

Corolario 14.3.3. —

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\Delta_2) &\cong H^1(\Lambda, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{4g} \\ H^{1,0}(\Lambda) &\cong H^{0,1}(\Lambda) \cong \mathbb{C}^{2g} \end{aligned}$$

CAPÍTULO 15

CÁLCULO DE $\dim_{\mathbb{C}} H^{1,0}(\Lambda) = 2g$

Consideremos una superficie orientada cerrada Σ de género g y (Γ, Γ^*, ρ) una estructura de superficie de Riemann discreta sobre Σ . En este caso, los grafos Γ y Γ^* son finitos.

15.1. Existencia de diferenciales meromorfas

Teorema 15.1.1. — Sea $z_1, z_2 \in \Gamma_0$, $z_1 \neq z_2$ y $\gamma \in C_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ un camino simple que conecta z_1 con z_2 . Entonces, existen únicas $\alpha, \beta \in C^1(\Gamma)$ tales que :

- (i) α, β son reales y armónicas en $\Gamma_0 - \{z_1, z_2\}$;
- (ii) $\theta = \alpha + i \star \alpha, \eta = \beta + i \star \beta \in C^{1,0}(\Lambda)$ son analíticas en $\Lambda_0 - \{z_1, z_2\}$;
- (iii) $\text{Res}_{z_1} \theta = \text{Res}_{z_1} \eta = 1, \text{Res}_{z_2} \theta = \text{Res}_{z_2} \eta = -1$;
- (iv) si $\delta \in C_1(\Lambda, \mathbb{Z})$ es un camino cerrado tal que $\delta \cap \gamma^* = \emptyset$, entonces

$$\int_{\delta} \theta, \int_{\delta} \eta \in i\mathbb{R}$$

Demonstración. — Demos una orientación a todos los ejes de Γ_1 y la inducida sobre Γ_1^* .

Unicidad. — Veamos la unicidad de α (el caso de β es similar). Supongamos que tenemos $\hat{\alpha} \in C^1(\Gamma)$ otro candidato para α , y consideremos $\hat{\theta} = \hat{\alpha} + i \star \hat{\alpha}$. Luego, $\theta - \hat{\theta} \in H^{1,0}(\Lambda)$ (por (ii) y (iii)) y tenemos que $\alpha - \hat{\alpha} = \text{Re}(\theta - \hat{\theta}) \in \text{Ker}(\Delta_2)$. Por (iv) tenemos que para todo camino cerrado $\delta \in C_1(\Gamma)$ (luego trivialmente vale que $\delta \cap \gamma^* = \emptyset$),

$$\int_{\delta} (\alpha - \hat{\alpha}) = 0$$

Podemos definir la función

$$h : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto h(x) = \int_{z_1}^x (\alpha - \hat{\alpha})$$

que es armónica. Como en grafos finitos conexos las funciones armónicas son las constantes, tenemos que h es constante. Como $h(z_1) = 0$, tenemos que $h \equiv 0$. Esto nos dice que $\alpha = \hat{\alpha}$.

Construcción de α . — Sea f la única solución al problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_2 f(x) = 0, & x \in \Gamma_0 - \{z_1, z_2\} \\ f(z_1) = 1, \\ f(z_2) = -1. \end{cases}$$

Sea

$$\tilde{\alpha} = \left\{ \begin{array}{l} df \in C^1(\Gamma) \\ 0 \in C^1(\Gamma^*) \end{array} \right\} \in C^1(\Lambda)$$

Es claro que

$$d\tilde{\alpha} = 0$$

$$d \star \tilde{\alpha} = \left\{ \begin{array}{l} d \star df \in C^2(\Gamma^*) \\ 0 \in C^2(\Gamma) \end{array} \right\} \in C^2(\Lambda)$$

Sea $x \in \Gamma_0$, sus vértices vecinos x_1, \dots, x_n y

$$\partial x^* = \sum_{j=1}^n (-1)^{\delta_j} e_j^*,$$

donde

$$\delta_j = \begin{cases} 0, & e_j = (x, x_j) \\ 1, & e_j = (x_j, x) \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \iint_{x^*} d \star \tilde{\alpha} &= \int_{\partial x^*} \star \tilde{\alpha} = \sum_{j=1}^n (-1)^{\delta_j} \int_{e_j^*} \star \tilde{\alpha} = \sum_{j=1}^n (-1)^{\delta_j+1} \rho(e_j^{**}) \int_{e_j^{**}} \tilde{\alpha} = \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{\delta_j} \rho(e_j) \int_{e_j} \tilde{\alpha} = \sum_{j=1}^n (-1)^{\delta_j} \rho(e_j) \int_{e_j} df = \sum_{j=1}^n (-1)^{\delta_j} \rho(e_j) (f(x_j) - f(x)) = -\Delta_2 f(x) \end{aligned}$$

Luego,

$$d \star \tilde{\alpha}(x^*) = -\Delta_2 f(x)$$

En particular,

$$d \star \tilde{\alpha}(x^*) = 0, \quad \forall x \in \Gamma_0 - \{z_1, z_2\},$$

de donde obtenemos que $\tilde{\alpha}$ es armónica en $\Lambda_0 - \{z_1, z_2\}$. Así, $\tilde{\theta} = \tilde{\alpha} + i \star \tilde{\alpha} \in C^1(\Lambda)$ es analítica discreta en $\Lambda_0 - \{z_1, z_2\}$.

Por el principio del máximo y del mínimo, el máximo de f es 1 que ocurre en z_1 y el mínimo de f es -1 que ocurre en z_2 .

Sean x_1, \dots, x_n los vértices vecinos de z_1 y

$$\partial z_1^* = \sum_{j=1}^n (-1)^{\delta_j} e_j^*,$$

donde

$$\delta_j = \begin{cases} 0, & e_j = (z_1, x_j) \\ 1, & e_j = (x_j, z_1) \end{cases}$$

Sabemos que $1 = f(z_1) \geq f(x_j)$ y que para algún j_0 tal desigualdad es estricta. Como $\tilde{\alpha} = 0$ sobre $C_1(\Gamma^*)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{e_j^*} \tilde{\theta} &= i \int_{e_j^*} \star \tilde{\alpha} = -i\rho(e_j^{**}) \int_{e_j^{**}} \tilde{\alpha} = \\ &= i\rho(e_j) \int_{e_j} \tilde{\alpha} = i\rho(e_j) \int_{e_j} df = i\rho(e_j)(f(x_j) - f(z_1)) \in i(-\infty, 0] \end{aligned}$$

Como para algún j_0 sabemos que $(f(x_{j_0}) - f(z_1)) < 0$, tenemos que

$$\int_{\partial z_1^*} \tilde{\theta} \in i(-\infty, 0)$$

y, en particular,

$$\text{Res}_{z_1} \tilde{\theta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial z_1^*} \tilde{\theta} = \frac{a}{2\pi} < 0$$

De esta manera

$$\alpha = \frac{2\pi}{a} \tilde{\alpha}$$

es real y armónica en $\Gamma_0 - \{z_1, z_2\}$ tal que

$$\theta = \alpha + i \star \alpha \in C^{1,0}(\Lambda)$$

es analítica en $\Lambda_0 - \{z_1, z_2\}$ con $\text{Res}_{z_1} \theta = 1$. Como la suma de los residuos es cero, también vale que $\text{Res}_{z_2} \theta = -1$.

Sea $\delta \in C_1(\Lambda, \mathbb{Z})$ un camino cerrado (en este caso podría ocurrir que $\delta \cap \gamma^* \neq \emptyset$). Tenemos que $\delta \in C_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ ó bien $\delta \in C_1(\Gamma^*, \mathbb{Z})$. Al igual que antes, como $\tilde{\alpha} = 0$ sobre $C_1(\Gamma^*, \mathbb{Z})$, tenemos que, si $e = (x, y) \in \Gamma_1$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{e^*} \tilde{\theta} &= i \int_{e^*} \star \tilde{\alpha} = i\rho(e) \int_e \tilde{\alpha} = \\ &= i\rho(e) \int_e df = i\rho(e)(f(y) - f(x)) \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

de donde vemos que si $\delta \in C_1(\Gamma^*, \mathbb{Z})$, entonces

$$\int_{\delta} \theta \in i\mathbb{R}$$

Si $\delta \in C_1(\Gamma, \mathbb{Z})$, entonces

$$\int_{\delta} \theta = \int_{\delta} \tilde{\alpha} + i \int_{\delta^*} \star \tilde{\alpha} = \int_{\delta} \tilde{\alpha} = \int_{\delta} df = 0$$

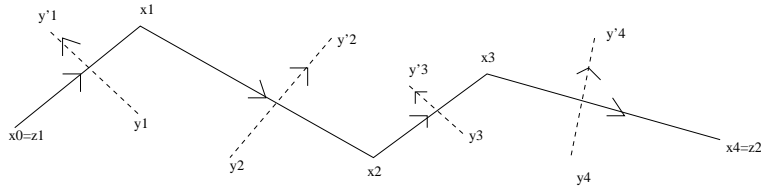


FIGURA 15.1. $n = 4$

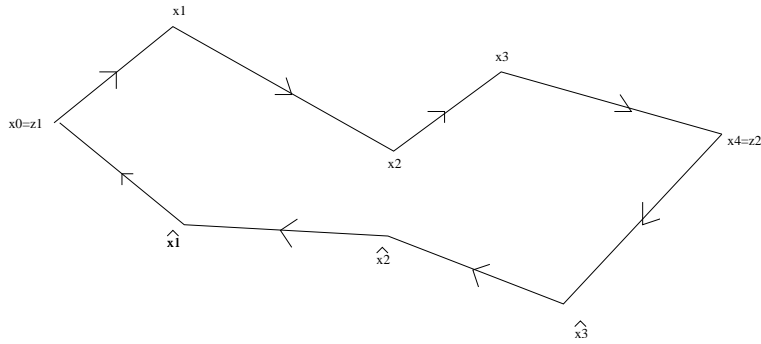


FIGURA 15.2. $n = 4$

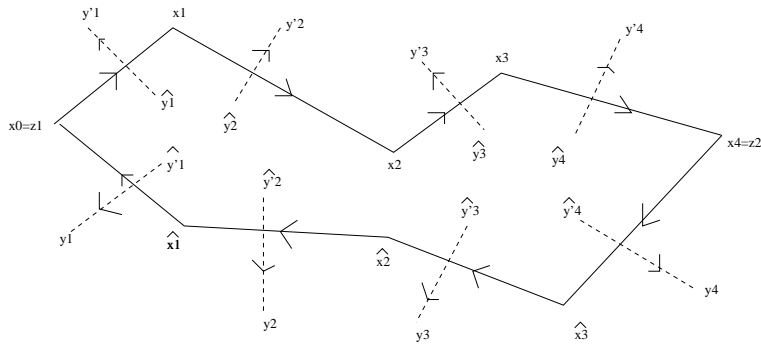


FIGURA 15.3. $n = 4$

Construcción de β . — La construcción de β es mucho más complicado y requiere el uso del problema de Neumann de manera apropiada. Supongamos que $\gamma = \sum_{j=1}^n \gamma_j \in C_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ donde $\gamma_j = (x_{j-1}, x_j)$, para $j = 1, \dots, n$, $x_0 = z_1$ y $x_n = z_2$. Sea $\gamma_j^* = (y_j, y_j')$, para cada $j = 1, \dots, n$; en cuyo caso $\gamma^* = \sum_{j=1}^n \gamma_j^*$ (ver Figura 15.1).

Procedemos a modificar Γ de la siguiente manera. Abrimos el arco $\gamma \subset \Sigma$ para obtener una poligonal cerrada (ver Figura 15.2). Denotemos la nueva descomposición celular por Γ_γ . Notemos que ahora tenemos una nueva cara (respecto al caso de Γ).

Ahora procedemos a modificar Γ^* como se muestra en Figura 15.3 para obtener un mapa nuevo Γ_γ^* .

Definamos el grafo \mathcal{G} cuyos vértices y ejes son los dados por Γ_γ^* , y consideremos el problema de Neumann en el grafo \mathcal{G} con

$$\begin{aligned} B &= \{w_1 = \widehat{y}_1, \dots, \widehat{y}_{n-1}, \widehat{y}'_2, \dots, \widehat{y}'_n, w_m = \widehat{y}'_1\} \quad (m = 2(n-1)) \\ a_1 &= \dots = a_{n-1} = -2\pi i, \quad a_n = \dots = a_{2n-2} = 2\pi i, \quad b = 1 \\ C &= \{y_1, \dots, y_{n-1}, y'_2, \dots, y'_n\} \end{aligned}$$

Luego, tenemos un único $g \in C^0(\mathcal{G})$ satisfaciendo las siguientes condiciones :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 g(v) = 0, \quad v \in \mathcal{G}_0 - B \\ g(\widehat{y}'_j) - g(y'_j) = -2\pi, \quad j = 1, \dots, n-1 \\ g(\widehat{y}_j) - g(y_j) = 2\pi, \quad j = 2, \dots, n \\ g(\widehat{y}'_1) = 1. \end{array} \right.$$

Sea

$$\widetilde{\beta} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \in C^1(\Gamma) \\ i dg \in C^1(\Gamma^*) \end{array} \right\} \in C^1(\Lambda).$$

Es claro de la definición que

$$d\widetilde{\beta} = 0$$

$$d \star \widetilde{\beta} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \in C^2(\Gamma^*) \\ id \star dg \in C^2(\Gamma) \end{array} \right\} \in C^2(\Lambda).$$

Definamos

$$\widetilde{\eta} = \widetilde{\beta} + i \star \widetilde{\beta} = \left\{ \begin{array}{l} \star dg \in C^1(\Gamma) \\ i dg \in C^1(\Gamma^*) \end{array} \right\} \in C^{1,0}(\Lambda).$$

Veamos que $\widetilde{\beta}$ es armónica en $\Lambda_0 - \{z_1, z_2\}$, luego $\widetilde{\eta}$ es analítica en $\Lambda_0 - \{z_1, z_2\}$. Para esto, basta ver (pues ya sabemos que $d\widetilde{\beta} = 0$) que $d \star \widetilde{\beta} = 0$ sobre cada cara $F \in C_2(\Gamma, \mathbb{Z})$.

Supongamos que

$$\partial F = \sum_{j=1}^r (-1)^{\delta_j} e_j,$$

donde

$$\delta_j = \begin{cases} 0, & \text{si } F^* \text{ es vértice inicial de } e_j^* \\ 1, & \text{si } F^* \text{ es vértice final de } e_j^* \end{cases}$$

Sea w_j el otro vértice del eje e_j^* . De esta manera,

$$\begin{aligned} \iint_F d \star \widetilde{\beta} &= \int_{\partial F} \star \widetilde{\beta} = \sum_{j=1}^r (-1)^{\delta_j} \int_{e_j} \star \widetilde{\beta} = \sum_{j=1}^r (-1)^{\delta_j+1} \rho(e_j^*) \int_{e_j^*} \widetilde{\beta} = \\ &= -i \sum_{j=1}^r \rho(e_j^*) \int_{(-1)^{\delta_j} e_j^*} dg = -i \sum_{j=1}^r \rho(e_j^*) (g(F^*) - g(w_j)) = -i \Delta_2 g(F^*) = 0 \end{aligned}$$

ya que $F^* \notin B$.

Calculemos el residuo de $\tilde{\eta}$ sobre el vértice z_1 . Supongamos que

$$\partial z_1^* = \sum_{j=1}^r (-1)^{\delta_j} e_j^*,$$

donde

$$\delta_j = \begin{cases} 0, & \text{si } z_1 \text{ es vértice inicial de } e_j \\ 1, & \text{si } z_1 \text{ es vértice final de } e_j \end{cases}$$

Ya que

$$\int_{e_j^*} \tilde{\eta} = i \int_{e_j^*} dg$$

y ∂z_1^* contiene al vértice y_1' , tenemos que

$$\text{Res}_{z_1} \tilde{\eta} = \int_{\partial z_1^*} \tilde{\eta} = 2\pi i$$

Como la suma de los residuos es 0, tenemos que

$$\text{Res}_{z_1} \tilde{\eta} = -2\pi i$$

Si consideramos

$$\beta = \frac{1}{2\pi i} \tilde{\eta}$$

entonces

$$\eta = \frac{1}{2\pi i} \tilde{\eta}$$

Sea $\delta \in C_1(\Lambda, \mathbb{Z})$ camino cerrado tal que $\delta \cap \gamma^* = \emptyset$.

Si $\delta \in C_1(\Gamma^*, \mathbb{Z})$, entonces, como $\delta \cap \gamma^* = \emptyset$,

$$\int_{\delta} \eta = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta} dg = 0$$

Si $\delta = \sum_{j=1}^k \delta_j \in C_1(\Gamma, \mathbb{Z})$, donde cada δ_j es dado por un eje orientado de Γ , entonces

$$\int_{\delta} \eta = \int_{\delta} \frac{1}{2\pi i} \star dg = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^k \int_{\delta_j} \star dg = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^k \rho(\delta_j^*) \int_{\delta_j^*} dg \in i\mathbb{R}$$

□

Observación 15.1.2. —

1.- En (iv) la condición $\delta \cap \gamma^* = \emptyset$ sólo se requiere para η y no para θ .

2.- Sea $\sigma = \text{Im}(\eta)$, donde η es como en el Teorema anterior. Entonces valen las siguientes.

2.1.- Si $\delta \in C_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ es camino cerrado, entonces

$$\int_{\delta} \sigma = 0;$$

2.2.- si $\delta \in C_1(\Gamma^*, \mathbb{Z})$ es camino cerrado, $\delta \cap \gamma^* = \emptyset$, entonces

$$\int_{\delta} \sigma = 0;$$

2.3.- si $e^* \in \gamma^*$, entonces

$$\int_{e^*} \sigma = 1.$$

3.- Consideremos la función f construida en la demostración para la construcción de α . Al considerar un camino aleatorio sobre el grafo asociado a Γ , la probabilidad de pasar de $x \in \Gamma_0$ a un vértice vecino $y \in \Gamma_0$ es dado por

$$P(x, y) = \frac{\rho(\{x, y\})}{\sum_{z \in N(x)} \rho(\{x, z\})}$$

donde $N(x)$ denota al conjunto de los vértices vecinos de x . La función

$$F(x) = \frac{f(x) + 1}{2}$$

es la probabilidad que una marcha aleatoria que parte desde x llegue a z_1 antes de pasar por z_2 .

15.2. Existencia de diferenciales analíticas

El Teorema 15.1.1 permite la construcción de diferenciales analíticas discretas en $C^1(\Lambda)$ como lo dice el siguiente resultado.

Teorema 15.2.1. — Consideremos $g \geq 1$. Sean $A, B \in C_1(\Lambda, \mathbb{Z})$ caminos cerrados simples y orientados tales que

- (i) $A \in \Gamma_1$ y $B \in \Gamma_1^*$; ó bien
- (ii) $A \in \Gamma_1^*$ y $B \in \Gamma_1$; y
- (iii) $A \cdot B = +1$ (intersección en Σ).

Entonces, existe una única 1-forma analítica

$$\Phi_{A,B} \in H^{1,0}(\Lambda)$$

tal que

$$\operatorname{Re} \left(\int_B \Phi_{A,B} \right) = 1$$

$$\int_{\gamma} \Phi_{A,B} \in i\mathbb{R}$$

para todo camino cerrado $\gamma \in C_1(\Lambda, \mathbb{Z}) - A^*$ y todo camino cerrado $\gamma \in C_1(\Lambda, \mathbb{Z})$ tal que $\gamma \cdot A = 0$ en $H_1(\Lambda, \mathbb{Z})$.

Demonstración. —

Existencia. — Escribamos $A = \gamma_1 \cup \gamma_2$, donde γ_j es arco simple conectando dos vértices distintos, digamos z_1 y z_2 . Usando el arco γ_j para el Teorema 15.1.1, obtenemos una 1-forma $\eta_j \in C^{1,0}(\Lambda)$ analítica en $\Lambda_0 - \{z_1, z_2\}$ y tales que

$$\operatorname{Res}_{z_1} \eta_1 = \operatorname{Res}_{z_2} \eta_2 = 1$$

$$\operatorname{Res}_{z_2} \eta_1 = \operatorname{Res}_{z_1} \eta_2 = -1$$

Basta con escoger

$$\Phi_{A,B} = \frac{1}{2\pi i} (\eta_1 + \eta_2).$$

Unicidad. — Supongamos que tenemos dos diferenciales analíticas, digamos $\alpha_1, \alpha_2 \in H^{1,0}(\Lambda)$, que satisfacen ser candidatos para $\Phi_{A,B}$. En este caso,

$$\beta = \alpha_1 - \alpha_2 \in H^{1,0}(\Lambda)$$

satisface que

$$\int_{\gamma} \beta \in i\mathbb{R}$$

para todo camino cerrado γ . Como

$$\star\beta = -i\beta,$$

vale que

$$\int_{\gamma} \beta = 0$$

para todo camino cerrado γ .

Esto nos permite construir una función armónica, fijando algún $x_0 \in \Gamma_0$

$$f : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto f(x) = \int_{x_0} \beta$$

Como Γ es finito, f es constante y como $f(x_0) = 0$, entonces $f = 0$. De esta manera, $\beta = 0$ en Γ_1 . Por el Teorema 13.4.2 $\beta = 0$ en $C^1(\Lambda)$, es decir, $\alpha_1 = \alpha_2$. □

Observación 15.2.2. — La forma real armónica $\operatorname{Re}(\Phi_{A,B})$ satisface que para todo camino cerrado $\delta \in C_1(\Lambda, \mathbb{Z})$ el valor

$$\int_{\delta} \operatorname{Re}(\Phi_{A,B})$$

es el número algebraico de veces que δ contiene un eje dual a un eje de A .

Lema 15.2.3. — Sean $w_0, \dots, w_{2g} \in H^{1,0}(\Lambda)$. Entonces, existen números complejos, no todos nulos, $\lambda_0, \dots, \lambda_{2g}$, de manera que

$$\lambda_0 w_0 + \dots + \lambda_{2g} w_{2g} = 0.$$

En particular,

$$\dim_{\mathbb{C}} H^{1,0}(\Lambda) \leq 2g$$

Demonstración. — Se puede construir $2g$ caminos cerrados y simples, digamos

$$A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g \in C_1(\Gamma, \mathbb{Z})$$

tales que

- (i) $A_j \cdot B_k = \delta_{jk}$;
- (ii) $A_j \cdot A_k = 0$;
- (iii) $B_j \cdot B_k = 0$.

La colección

$$\{A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g\}$$

define una base canónica de $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ (y una base canónica de homología para $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$).

Denotemos por

$$\gamma_j = A_j, \quad \gamma_{g+j} = B_j, \quad j = 1, \dots, g.$$

Consideremos el sistema lineal de tamaño $2g \times (2g + 1)$ siguiente

$$\begin{cases} \lambda_0 \int_{\gamma_1} w_0 + \lambda_1 \int_{\gamma_1} w_1 + \dots + \lambda_{2g} \int_{\gamma_1} w_{2g} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_0 \int_{\gamma_{2g}} w_0 + \lambda_1 \int_{\gamma_{2g}} w_1 + \dots + \lambda_{2g} \int_{\gamma_{2g}} w_{2g} = 0 \end{cases}$$

Como el sistema es de $2g$ ecuaciones en $2g + 1$ incógnitas, esta tiene una solución no nula

$$(\lambda_0, \dots, \lambda_{2g}) \neq (0, \dots, 0)$$

Con tal solución construimos las 1-forma analítica discreta

$$w = \sum_{k=0}^{2g} \lambda_k w_k \in H^{1,0}(\Lambda)$$

El sistema anterior nos dice que

$$\int_{\gamma_j} w = 0, \quad \forall j = 1, \dots, 2g.$$

Como $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}\}$ generan $H_1(\Lambda, \mathbb{Z})$, tenemos que

$$\int_{\gamma} w = 0, \quad \forall \gamma \in H_1(\Lambda, \mathbb{Z}).$$

De esta manera, podemos construir la función harmónica

$$f : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto f(x) = \int_{x_0}^x w$$

Tal función armónica debe ser constante y $f = 0$, es decir, $w = 0$.

□

15.3. $\dim_{\mathbb{C}} H^{1,0}(\Lambda) = 2g$

Teorema 15.3.1. —

$$\dim_{\mathbb{C}} H^{1,0}(\Lambda) = 2g$$

Demonstración. — Se puede construir $2g$ caminos cerrados y simples, digamos

$$A_1, \dots, A_g \in C_1(\Gamma, \mathbb{Z})$$

$$B_1, \dots, B_g \in C_1(\Gamma^*, \mathbb{Z})$$

tales que en Σ definen una base canónica de homología para $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$, es decir,

$$(i) A_j \cdot B_k = \delta_{jk};$$

$$(ii) A_j \cdot A_k = 0;$$

$$(iii) B_j \cdot B_k = 0.$$

Se puede construir $2g$ caminos cerrados y simples, digamos

$$A'_1, \dots, A'_g \in C_1(\Gamma^*, \mathbb{Z})$$

$$B'_1, \dots, B'_g \in C_1(\Gamma, \mathbb{Z})$$

tales que en Σ definen una base canónica de homología para $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$, es decir,

$$(i) A'_j \cdot B'_k = \delta_{jk};$$

$$(ii) A'_j \cdot A'_k = 0;$$

$$(iii) B'_j \cdot B'_k = 0.$$

de manera que las siguientes son bases canónicas

$$\{A_1, \dots, A_g, B'_1, \dots, B'_g\} \subset C_1(\Gamma, \mathbb{Z})$$

$$\{A'_1, \dots, A'_g, B_1, \dots, B_g\} \subset C_1(\Gamma^*, \mathbb{Z})$$

Sean las siguientes 1-formas analíticas en $H^{1,0}(\Lambda)$:

$$w_1 = \Phi_{A_1, B_1}, \dots, w_g = \Phi_{A_g, B_g},$$

$$w_{g+1} = \Phi_{A'_1, B'_1}, \dots, w_{2g} = \Phi_{A'_g, B'_g},$$

$$w_{2g+1} = \Phi_{-B_1, A_1}, \dots, w_{3g} = \Phi_{-B_g, A_g},$$

$$w_{3g+1} = \Phi_{-B'_1, A'_1}, \dots, w_{4g} = \Phi_{-B'_g, A'_g}.$$

Definamos

$$\gamma_1 = B_1, \dots, \gamma_g = B_g,$$

$$\gamma_{g+1} = B'_1, \dots, \gamma_{2g} = B'_g,$$

$$\gamma_{2g+1} = A_1, \dots, \gamma_{3g} = A_g,$$

$$\gamma_{3g+1} = A'_1, \dots, \gamma_{4g} = A'_g.$$

Tenemos que

$$\operatorname{Re} \left(\int_{\gamma_j} w_j \right) = 1, \quad j = 1, \dots, 4g.$$

Tomando

$$l(k) = \begin{cases} k + 2g, & k \leq 2g \\ k - 2g, & k > 2g \end{cases}$$

tenemos que

$$\int_{\gamma} w_k \in i\mathbb{R}$$

si γ es un camino cerrado tal que $\gamma \cap \gamma_{l(k)}^* = \emptyset$.

De esta manera,

$$\left(\operatorname{Re} \left(\int_{\gamma_j} w_k \right) \right) = I_{4g \times 4g}$$

Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_{4g} \in \mathbb{R}$ y

$$w = \sum_{j=1}^{4g} \lambda_j w_j$$

Entonces,

$$\operatorname{Re} \left(\int_{\gamma_j} w \right) = \lambda_j, \quad j = 1, \dots, 4g,$$

con lo cual obtendremos que

$$\{w_1, \dots, w_{4g}\}$$

es un conjunto \mathbb{R} -linealmente independiente.

Si $H = \langle w_1, \dots, w_{4g} \rangle < H^{1,0}(\Lambda)$, entonces tenemos de lo anterior que

$$\dim_{\mathbb{R}} H = 4g$$

es decir,

$$\dim_{\mathbb{C}} H = 2g$$

de donde obtenemos que

$$\dim_{\mathbb{C}} H^{1,0}(\Lambda) \geq 2g$$

y el resultado sale como consecuencia del Lema 15.2.3. □

Observación 15.3.2. — Como $H^{1,0}(\Lambda) \cong \mathbb{C}^{2g}$ y cada $w \in H^{1,0}(\Lambda)$ queda únicamente determinada por sus A_j y A'_j periodos en las bases dadas (como en la demostración anterior)

$$\left\{ \underbrace{A_1, \dots, A_g}_{C_1(\Gamma, \mathbb{Z})}, \underbrace{B_1, \dots, B_g}_{C^1(\Gamma^*, \mathbb{Z})} \right\}$$

$$\underbrace{\{A'_1, \dots, A'_g\}}_{C_1(\Gamma^*, \mathbb{Z})}, \underbrace{\{B'_1, \dots, B'_g\}}_{C^1(\Gamma, \mathbb{Z})}$$

existe una base

$$\{\theta_1, \dots, \theta_{2g}\} \subset H^{1,0}(\Lambda)$$

satisfaciendo que, para $j, r, l \in \{1, \dots, g\}$, las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \int_{A_j} \theta_j &= 1; & \int_{A'_j} \theta_{g+j} &= 1; \\ \int_{A_r} \theta_j &= 0 \quad (r \neq j); & \int_{A'_l} \theta_j &= 0; \\ \int_{A'_r} \theta_{g+j} &= 0 \quad (r \neq j); & \int_{A_i} \theta_{g+j} &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 34. — Consideremos (ver Figura 15.4) Σ una superficie de género $g = 1$ y la estructura de superficie de Riemann discreta

$$(\Gamma, \Gamma^*, \rho)$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \{x\}, \Gamma_1 = \{e_1, e_2\}, \Gamma_2 = \{F\} \\ \Gamma_0^* &= \{F^*\}, \Gamma_1^* = \{e_1^*, e_2^*\}, \Gamma_2^* = \{x^*\} \\ \rho(e_1) &= \frac{1}{\rho(e_1^*)} = m_1 > 0 \\ \rho(e_2) &= \frac{1}{\rho(e_2^*)} = m_2 > 0 \end{aligned}$$

En este ejemplo $C^1(\Lambda) = \text{Ker}(\Delta_2)$. En efecto, si $\gamma \in \{e_1, e_2, e_1^*, e_2^*\}$ y $\alpha \in C^1(\Lambda)$, entonces

$$\int_{\gamma} \star d \star d \alpha = -\rho(\gamma^*) \int_{\gamma^*} d \star d \alpha = -\rho(\gamma^*) (\star d \alpha(x) - \star d \alpha(x)) = 0$$

$$\int_{\gamma} d \star d \star \alpha = \star d \star \alpha(x^*) - \star d \star \alpha(x^*) = 0$$

Podemos considerar

$$\begin{aligned} \{A_1 = e_1, B_1 = e_1^*\} \\ \{A'_1 = e_2^*, B'_1 = -e_2\} \end{aligned}$$

Escojamos $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{C}$ y escojamos $\alpha \in C^1(\Lambda)$ definida por

$$\int_{e_1} \alpha = - \int_{e_2^*} \alpha = \tau_1$$

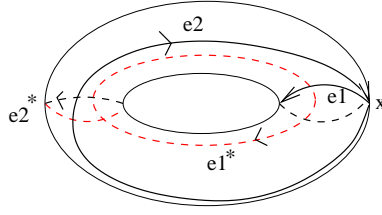


FIGURA 15.4

$$\int_{e_2} \alpha = - \int_{e_1^*} \alpha = \tau_2$$

Sea

$$\mu = \frac{m_1}{m_1 \tau_1 - i \tau_2} (\alpha + i \star \alpha) \in H^{1,0}(\Lambda) \cong \mathbb{C}^2$$

En esta caso,

$$\int_{A_1} \mu = 1, \quad \int_{B_1} \mu = i m_1 \in i\mathbb{R}$$

$$\int_{A'_1} \mu = m_1 \left(\frac{-\tau_1 + i m_2 \tau_2}{m_1 \tau_1 - i \tau_2} \right), \quad \int_{B'_1} \mu = \frac{-m_1}{m_2} \left(\frac{m_2 \tau_2 + i \tau_1}{m_1 \tau_1 - i \tau_2} \right) = \frac{i}{m_2} \int_{A'_1} \mu$$

Por otro lado, sabemos de la demostración del Teorema 15.3.1 que hay una base para $H^{1,0}(\Lambda)$ (como espacio vectorial real), digamos w_1, \dots, w_4 , de manera que

\int	e_1	e_2	e_3	e_4
w_1	ia_{11}	ia_{12}	$1 + ia_{13}$	ia_{14}
w_2	ia_{21}	$-1 + ia_{22}$	ia_{23}	ia_{24}
w_3	$1 + ia_{31}$	ia_{32}	ia_{33}	ia_{34}
w_4	ia_{41}	ia_{42}	ia_{43}	$1 + ia_{44}$

$(a_{ij} \in \mathbb{R})$

Como $w_j \in H^{1,0}(\Lambda)$ tenemos las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\star w_j = -i w_j, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Estas ecuaciones dicen, por ejemplo, que

$$\frac{-1}{m_1} (1 + ia_{13}) = -\rho(e_1^*) \int_{e_1^*} w_1 = \int_{e_1} \star w_1 = -i \int_{e_1} w_1 = a_{11}$$

de donde obtenemos que

$$a_{13} = 0, \quad a_{11} = \frac{-1}{m_1}.$$

De manera similar se puede obtener que

$$a_{12} = a_{14} = a_{21} = a_{22} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = a_{34} = a_{41} = a_{43} = a_{44} = 0$$

$$a_{24} = -m_2, \quad a_{33} = m_1, \quad a_{42} = \frac{-1}{m_2}.$$

Luego, podemos ver que si

$$\theta_1 = w_3 = im_1 w_1$$

$$\theta_2 = w_4 = \frac{i}{m_2} w_2$$

entonces

$$H^{1,0}(\Lambda) = \langle \theta_1, \theta_2 \rangle$$

\int	A_1	B_1	A'_1	B'_1
θ_1	1	im_1	0	0
θ_2	0	0	1	$\frac{i}{m_2}$

Volveremos a este ejemplo en el siguiente capítulo (ver Ejemplo 16.7).

CAPÍTULO 16

MATRICES DE RIEMANN DISCRETAS

Consideremos una superficie cerrada orientada Σ , de género $g \geq 1$, y una estructura discreta de superficies de Riemann (Γ, Γ^*, ρ) en ella. En el capítulo anterior hemos observado que $\dim_{\mathbb{C}} H^{1,0}(\Lambda) = 2g$, donde Λ es el doble definido por la estructura discreta. En este capítulo definiremos las matrices de Riemann discretas asociadas a "bases simplécticas". Seguiremos con cierta fidelidad el artículo de C. Mercat [22].

16.1. Forma Hermitiana

Recordemos que el espacio vectorial complejo $C^1(\Lambda)$ es, en este caso, un espacio finito dimensional sobre el cual tenemos una forma Hermitiana positiva definida dada por

$$(\alpha, \beta) = \sum_{e \in \Lambda_1} \rho(e) \int_e \alpha \int_e \bar{\beta}.$$

Más aún, el operador \star de Hodge es una isometría para el producto Hermitiano positivo definido, es decir,

$$(\alpha, \beta) = (\star\alpha, \star\beta)$$

Dentro del espacio $C^1(\Lambda)$ tenemos el subespacio vectorial complejo $H^{1,0}(\Lambda)$ de las 1-formas analítica discretas. Podemos restringir la forma Hermitiana (\cdot, \cdot) a tal subespacio. Ahora es claro la siguiente observación.

Proposición 16.1.1. — Si $\{w_1, \dots, w_{2g}\}$ es una base de $H^{1,0}(\Lambda)$, entonces la matriz de tamaño $2g \times 2g$ cuyo coeficiente (k, l) es dado por (w_k, w_l) es Hermitiana y positiva definida.

Similarmente, dentro de $C^1(\Lambda)$ tenemos el subespacio vectorial real formado de las 1-formas armónicas reales. Tal espacio es de dimensión real $4g$. Es claro que la forma Hermitiana positiva (\cdot, \cdot) restringe a tal espacio como un producto Euclidiano positivo definido. Luego, obtenemos la siguiente observación.

Proposición 16.1.2. — Si $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{4g}\}$ es una base del subespacio de las 1-formas diferenciales armónicas reales, entonces la matriz de tamaño $4g \times 4g$ cuyo coeficiente (k, l) es dado por (α_k, α_l) es real, simétrica y positiva definida.

Demonstración. — Como las formas α_j son todas reales, los coeficientes de la matriz son reales. La simetría de la matriz sale del hecho que el producto (\cdot, \cdot) es Hermitiano. Como las formas α_j forman una base de las formas armónicas cerradas y la forma es Hermitiana positiva definida, entonces la matriz es positiva definida. \square

Proposición 16.1.3. — Sean $f \in C^0(\Lambda)$ y $\theta \in C^1(\Lambda)$ tal que $d\theta = 0$. Entonces,

$$(df, -\star \bar{\theta}) = 0$$

Demonstración. — Consideremos alguna orientación en los ejes de Γ y denotemos los elementos (orientados) de Γ_1 como

$$e_1 = (x_{11}, x_{12}), \dots, e_m = (x_{m1}, x_{m2})$$

y los elementos de Γ_1^* (con la orientación inducida por la dada en los ejes de Γ) como

$$e_1^* = (y_{11}, y_{12}), \dots, e_m^* = (y_{m1}, y_{m2})$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \int_{e_j} -\star \bar{\theta} &= \rho(e_j^*) \int_{e_j^*} \bar{\theta} \\ \int_{e_j^*} -\star \bar{\theta} &= -\rho(e_j) \int_{e_j} \bar{\theta} \quad (\text{ya que } e_j^{**} = -e_j) \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} (df, -\star \bar{\theta}) &= \sum_{j=1}^m \rho(e_j) \int_{e_j} df \int_{e_j} -\star \bar{\theta} + \sum_{j=1}^m \rho(e_j^*) \int_{e_j^*} df \int_{e_j^*} -\star \bar{\theta} = \\ &= \sum_{j=1}^m \rho(e_j) (f(x_{j2}) - f(x_{j1})) \int_{e_j} -\star \bar{\theta} + \sum_{j=1}^m \rho(e_j^*) (f(y_{j2}) - f(y_{j1})) \int_{e_j^*} -\star \bar{\theta} = \\ &= \sum_{j=1}^m \rho(e_j) (f(x_{j2}) - f(x_{j1})) \rho(e_j^*) \int_{e_j^*} \bar{\theta} - \sum_{j=1}^m \rho(e_j^*) (f(y_{j2}) - f(y_{j1})) \rho(e_j) \int_{e_j} \bar{\theta} = \\ &= \sum_{j=1}^m (f(x_{j2}) - f(x_{j1})) \int_{e_j^*} \bar{\theta} - \sum_{j=1}^m (f(y_{j2}) - f(y_{j1})) \int_{e_j} \bar{\theta} \end{aligned}$$

La condición que $d\theta = 0$ es equivalente a decir que, para cada $F \in \Lambda_2$ vale que

$$\iint_F \theta = 0$$

Lo anterior y el hecho que cada x_{jk} es el centro de una cara de Γ_2^* y cada y_{jk} es el centro de una cara de Γ_2 nos permiten notar que las dos última sumas son necesariamente igual a 0.

□

Ejercicio 70. — Completar los detalles de la demostración anterior.

Ejemplo 35. — Sea Σ una superficie de género $g = 1$ con la estructura de superficie de Riemann discreta (Γ, Γ^*, ρ) (ver Figura 16.3) donde

$$\Gamma_0 = \{x_1, x_2\}, \Gamma_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}, \Gamma_2 = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$$

$$\Gamma_0^* = \{F_1^*, F_2^*, F_3^*, F_4^*\}, \Gamma_1^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*, e_5^*, e_6^*\}, \Gamma_2 = \{x_1^*, x_2^*\}$$

$$\rho(e_j) = \frac{1}{\rho(e_j^*)} = m_j > 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Sean $f \in C^0(\lambda)$ y $\theta \in C^1(\Lambda)$ definidas por

$$f(x_1) = r_1, \quad f(x_2) = r_2, \quad f(F_j^*) = s_j, \quad j = 1, \dots, 4,$$

$$\int_{e_j} \theta = a_j, \quad \int_{e_j^*} \theta = b_j, \quad j = 1, \dots, 6$$

La condición para $d\theta = 0$ es equivalente a tener

$$a_4 = a_1 - a_2 + a_3$$

$$a_5 = a_2 - a_3$$

$$a_6 = a_1 - a_2$$

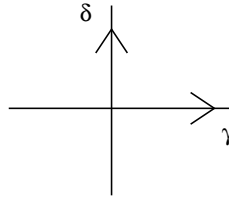
$$b_4 = -(b_1 + b_2 + b_3)$$

En este caso,

$$\int_{e_j} -\star \bar{\theta} = \frac{\bar{b}_j}{m_j}, \quad \int_{e_j^*} -\star \bar{\theta} = -m_j \bar{a}_j, \quad j = 1, \dots, 6$$

$$(df, -\star \bar{\theta}) = (r_2 - r_1)(\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \bar{b}_3 + \bar{b}_4) + (r_2 - r_2)(\bar{b}_5 + \bar{b}_6) - (s_1 - s_4)\bar{a}_1 - (s_2 - s_1)\bar{a}_2$$

$$- (s_3 - s_2)\bar{a}_3 - (s_4 - s_3)\bar{a}_4 - (s_4 - s_2)\bar{a}_5 - (s_3 - s_1)\bar{a}_6 = 0$$

FIGURA 16.1. $\int_{\delta} \eta_{\gamma} = -1$

16.2. Número de intersección discreto

Ahora procederemos a definir el concepto de número de intersección adaptada al grafo doble $\Lambda = \Gamma \cup \Gamma^*$.

Dado un ciclo simple $\gamma \in Z_1(\Lambda, \mathbb{Z}) \subset C_1(\Lambda, \mathbb{Z})$ siempre existe una 1-forma real harmónica η_{γ} tal que para cada camino cerrado $\delta \in C_1(\Lambda, \mathbb{Z})$ vale que la integral

$$\int_{\delta} \eta_{\gamma}$$

es igual al número (algebraico) de veces que γ contiene un eje dual de δ (ver Figura 16.1).

Esto nos dice que, si $\alpha \in C^1(\Lambda)$, entonces vale la siguiente igualdad (usando el hecho que $e^{**} = -e$)

$$\begin{aligned} (\eta_{\gamma}, -\star \bar{\alpha}) &= \sum_{e \in \Lambda_1} \rho(e) \int_e \eta_{\gamma} \int_e -\star \alpha = \sum_{e \in \gamma^*} \rho(e) \int_e \star \alpha = \\ &= \sum_{e \in \gamma^*} \rho(e) (-\rho(e^*)) \int_{e^*} \alpha = - \sum_{e \in \gamma^*} \int_{e^*} \alpha = - \sum_{e \in \gamma_{e^{**}}} \int_{e^*} \alpha = \int_{\gamma} \alpha, \end{aligned}$$

de donde se obtiene, de la Proposición 16.1.3, que la forma η_{γ} es única módulo formas exáctas, es decir, su clase de cohomología en $H^1(\Lambda)$ es única.

El *Número de intersección discreto* entre dos ciclos $\gamma_1, \gamma_2 \in Z_1(\Lambda, \mathbb{Z})$ es definido como

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = \int_{\gamma_1} \eta_{\gamma_2} = (\eta_{\gamma_1}, -\star \eta_{\gamma_2})$$

Ejercicio 71. — 1. Verificar que $\gamma_2 \cdot \gamma_1 = -\gamma_1 \cdot \gamma_2$.

2. Si $\gamma_1, \gamma_2 \in Z_1(\Gamma, \mathbb{Z})$, entonces $\gamma_1 \cdot \gamma_2 = 0$, con lo cual se ve la diferencia entre este número de intersección discreta y el número de intersección usual.

Ejercicio 72. — Sea $\gamma \in Z_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ un ciclo. Verificar que es posible construir un ciclo $\tilde{\gamma} \in Z_1(\Gamma^*, \mathbb{Z})$ tal que $\gamma \cdot \tilde{\gamma} = 0$, pero que son homólogos en la superficie Σ (decimos que ellos son paralelos).

16.3. Bases canónicas de homología

Construyamos círculos

$$A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g \in Z_1(\Gamma, \mathbb{Z})$$

definiendo una base para $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$, luego una base de $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$. Supongamos que esta base es una base canónica de homología para $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$.

Se construyen círculos

$$\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_g, \tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_g \in Z_1(\Gamma^*, \mathbb{Z})$$

que definen una base para $H_1(\Gamma^*, \mathbb{Z})$, luego una base de $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$, de manera que A_j es paralelo a \tilde{A}_j y B_j es paralelo a \tilde{B}_j . Esta es también una base canónica de homología para $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$.

La colección de círculos

$$A_1, \dots, A_g, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_g, \tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_g, B_1, \dots, B_g \in Z_1(\Lambda, \mathbb{Z})$$

definen un base para $H_1(\Lambda, \mathbb{Z})$.

Usemos la siguiente notación :

$$\gamma_j = A_j, \quad j = 1, \dots, g$$

$$\gamma_{g+j} = \tilde{A}_j, \quad j = 1, \dots, g$$

$$\gamma_{2g+j} = \tilde{B}_j, \quad j = 1, \dots, g$$

$$\gamma_{3g+j} = B_j, \quad j = 1, \dots, g$$

La matriz de intersección discreta de tales círculos es de la forma

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tal razón, decimos que la colección de círculos $\{\gamma_j\}$ es una *base canónica de homología* para $H_1(\Lambda, \mathbb{Z})$.

Consideremos las formas reales armónicas asociadas a los círculos γ_j , digamos

$$\eta_{\gamma_1}, \dots, \eta_{\gamma_{4g}}$$

Al definir las siguientes formas reales armónicas, para $j = 1, \dots, 2g$,

$$\begin{cases} \alpha_j & = \eta_{\gamma_{2g+j}} \\ \alpha_{2g+j} & = -\eta_{\gamma_j} \end{cases}$$

obtenemos que

$$\int_{\gamma_k} \alpha_r = \delta_{kr},$$

$$\gamma_k \cdot \gamma_l = (\alpha_k, -\star \alpha_l)$$

Diremos que la base de diferenciales discretas reales armónicas $\alpha_1, \dots, \alpha_{4g}$ anteriores es una *base dual* de la base canónica de homología anterior.

16.4. Relaciones bilineales

Teorema 16.4.1. — *Consideremos una base canónica de homología para $H_1(\Lambda, \mathbb{Z})$, digamos $\gamma_1, \dots, \gamma_{4g}$. Si θ_1, θ_2 son diferenciales discretas cerradas, entonces vale la relación bilineal discreta de Riemann*

$$(\theta_1, -\star \bar{\theta}_2) = \sum_{j=1}^{2g} \left(\int_{\gamma_j} \theta_1 \int_{\gamma_{2g+j}} \theta_2 - \int_{\gamma_{2g+j}} \theta_1 \int_{\gamma_j} \theta_2 \right)$$

Demonstración. — Sea $\alpha_1, \dots, \alpha_{4g}$ la base dual de diferenciales reales armónicas discretas de la base de homología canónica $\gamma_1, \dots, \gamma_{4g}$.

Ya que el espacio $C^1(\Lambda)$ es suma directa de diferenciales exactas, coexactas y armónicas, cada forma cerrada es suma de una exacta con una armónica. La proposición 16.1.3 nos permite suponer que θ_k es armónica discreta. Más aún, basta con suponer que θ_k es real (consideramos por separado su parte real y su parte imaginaria). Con estas restricciones, escribimos

$$\theta_k = \sum_{j=1}^{4g} a_j^k \alpha_j, \quad a_j^k = \int_{\gamma_j} \theta_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2.$$

Ahora,

$$(\theta_1, -\star \bar{\theta}_2) = \sum_{j=1}^{4g} \sum_{k=1}^{4g} a_j^1 a_k^2 (\alpha_j, -\star \alpha_k)$$

Como sabemos que $(\alpha_k, -\star \alpha_r) = \gamma_k \cdot \gamma_r = \int_{\gamma_k} \alpha_r$, tenemos que

$$(\theta_1, -\star \bar{\theta}_2) = \sum_{j=1}^{4g} \sum_{k=1}^{4g} a_j^1 a_k^2 \gamma_j \cdot \gamma_k = \sum_{j=1}^{2g} (a_j^1 a_{2g+j}^2 - a_{2g+j}^1 a_j^2)$$

de donde sale el resultado. \square

Ya que una forma diferencial discreta θ es armónica discreta sí y sólo si θ y $\star\theta$ son cerradas, el Teorema 16.4.1 permite obtener el siguiente.

Corolario 16.4.2. — *Consideremos una base canónica de homología para $H_1(\Lambda, \mathbb{Z})$, digamos, $\gamma_1, \dots, \gamma_{4g}$. Si θ es diferencial armónica discreta, entonces*

$$\|\theta\|^2 = \sum_{j=1}^{2g} \left(\int_{\gamma_j} \theta \int_{\gamma_{2g+j}} \star \bar{\theta} - \int_{\gamma_{2g+j}} \theta \int_{\gamma_j} \star \bar{\theta} \right)$$

En particular, si $\theta \in H^{1,0}(\Lambda)$, entonces

$$\|\theta\|^2 = i \sum_{j=1}^{2g} \left(\int_{\gamma_j} \theta \int_{\gamma_{2g+j}} \bar{\theta} - \int_{\gamma_{2g+j}} \theta \int_{\gamma_j} \bar{\theta} \right)$$

16.5. Matrices de Riemann

Consideremos una base canónica de homología para $H_1(\Lambda, \mathbb{Z})$, digamos

$$\gamma_j = A_j, \quad j = 1, \dots, g$$

$$\gamma_{g+j} = \tilde{A}_j, \quad j = 1, \dots, g$$

$$\gamma_{2g+j} = \tilde{B}_j, \quad j = 1, \dots, g$$

$$\gamma_{3g+j} = B_j, \quad j = 1, \dots, g$$

y sea $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{4g}\}$ una base dual del subespacio de las 1-formas diferenciales armónicas reales. Denotemos la matriz de la Proposición 16.1.2, respecto a esta base de diferenciales como

$$Q = \begin{bmatrix} A & D \\ B & C \end{bmatrix}$$

cuyo coeficiente (k, l) es dado por

$$(\alpha_k, \alpha_l) = \begin{cases} \int_{\gamma_{2g+k}} \star \alpha_l, & k = 1, \dots, 2g \\ - \int_{\gamma_{k-2g}} \star \alpha_l, & k = 2g + 1, \dots, 4g \end{cases}$$

es real, simétrica y positiva definida, es decir

$${}^t A = A, {}^t C = C, D = {}^t B$$

y A y C son matrices reales y simétricas positivas definidas.

Notemos de la construcción que las diferenciales $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \alpha_{3g+1}, \dots, \alpha_{4g}$ están soportadas en Γ , mientras que las diferenciales $\alpha_{2g+1}, \dots, \alpha_{3g}$ están soportadas sobre Γ^* . Esto nos asegura que

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $\{\alpha_j\}$ define una base de las formas armónicas cerradas y el operador de Hodge \star preserva tal espacio, podemos escribir \star en tal base (como vectores columna) como una matriz de tamaño $4g$ de la forma

$$[\star] = \begin{bmatrix} U & V \\ W & X \end{bmatrix}$$

Como $\star^2 = -1$, se tiene que $[\star]^{-1} = -[\star]$. Ahora, usando el hecho que

$$\gamma_k \cdot \gamma_l = (\alpha_k, -\star \alpha_l)$$

se tiene que

$$J = -Q[\star]$$

de donde se obtiene que

$$J[\star] = Q$$

es decir

$$[\star] = \begin{bmatrix} -B & -C \\ A & D \end{bmatrix}$$

La condición algebraica $[\star]^2 = -I$ queda dada por

$$\begin{cases} B^2 - CA = -I \\ AB = DA \\ BC = CD \\ D^2 - AC = -I \end{cases}$$

Ahora construimos las siguientes $4g$ formas analíticas discretas

$$w_j = \alpha_j + i \star \alpha_j, \quad j = 1, \dots, 4g.$$

Com las matrices A y C son positiva definidas, se tiene que

$$\{w_1, \dots, w_{2g}\} \quad \text{y} \quad \{w_{2g+1}, \dots, w_{4g}\}$$

son dos bases para $H^{1,0}(\Lambda)$.

Consideremos la matriz P , de tamaño $4g \times 4g$, cuyo coeficiente (k, l) es dado por

$$P_{k,l} = \frac{1}{2}(w_k, w_l) = (\alpha_k, \alpha_l) + i(\alpha_k, -\star \alpha_l)$$

Por la construcción de las formas analíticas discretas w_j , se tiene que

$$P = \begin{bmatrix} A & D \\ B & C \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} A & D \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -B & -C \\ A & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & D + iI \\ B - iI & C \end{bmatrix}$$

Notemos que la matriz $2A$ (respectivamente, $2C$) es la matriz definida en e la Proposición 16.1.1 respecto a la base $\{w_1, \dots, w_{2g}\}$ (respectivamente, $\{w_{2g+1}, \dots, w_{4g}\}$).

Notemos que, por la construcción hecha, tenemos

$$P = \begin{bmatrix} -i \int_{(\tilde{B}_1 \cdots \tilde{B}_g B_1 \cdots B_g)} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{2g} \end{bmatrix} & i \int_{(A_1 \cdots A_g \tilde{A}_1 \cdots \tilde{A}_g)} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{2g} \end{bmatrix} \\ -i \int_{(\tilde{B}_1 \cdots \tilde{B}_g B_1 \cdots B_g)} \begin{bmatrix} w_{2g+1} \\ w_{2g+2} \\ \vdots \\ w_{4g} \end{bmatrix} & i \int_{(A_1 \cdots A_g \tilde{A}_1 \cdots \tilde{A}_g)} \begin{bmatrix} w_{2g+1} \\ w_{2g+2} \\ \vdots \\ w_{4g} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Consideremos la nueva base de $H^{1,0}(\Lambda)$

$$\{\theta_1, \dots, \theta_{2g}\}$$

definida por

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_{2g} \end{bmatrix} = iC^{-1} \begin{bmatrix} w_{2g+1} \\ w_{2g+2} \\ \vdots \\ w_{4g} \end{bmatrix}$$

Luego tenemos que

$$\int_{(A_1 \cdots A_g \tilde{A}_1 \cdots \tilde{A}_g)} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_{2g} \end{bmatrix} = I_{2g}$$

$$\Pi = \int_{(\tilde{B}_1 \cdots \tilde{B}_g B_1 \cdots B_g)} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_{2g} \end{bmatrix} = -C^{-1}B + iC^{-1} \in \mathcal{H}_{2g}$$

donde \mathcal{H}_{2g} denota el espacio de Siegel de grado $2g$, es decir, el espacio de matrices simétricas, de tamaño $2g \times 2g$, con parte imaginaria positiva definida.

La base $\{\theta_1, \dots, \theta_{2g}\}$ es llamada la *base dual* asociada a la base canónica de $H_1(\Lambda, \mathbb{Z})$ anterior. La matriz Π anterior es la *Matriz de Periodos* asociada a la base canónica.

Notemos además que

$$\Pi = \begin{bmatrix} iC_1^{-1} & -C_1^{-1}B_1 \\ -C_2^{-1}B_2 & iC_2^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{(B_1 \cdots B_g)} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_g \end{bmatrix} & \int_{(\tilde{B}_1 \cdots \tilde{B}_g)} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_g \end{bmatrix} \\ \int_{(B_1 \cdots B_g)} \begin{bmatrix} \theta_{g+1} \\ \vdots \\ \theta_{2g} \end{bmatrix} & \int_{(\tilde{B}_1 \cdots \tilde{B}_g)} \begin{bmatrix} \theta_{g+1} \\ \vdots \\ \theta_{2g} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

También tenemos las matrices de periodo g -dimensionales

$$\Pi_1 = -C_1^{-1}B_1 + iC_1^{-1} = \int_{(B_1 \cdots B_g)} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_g \end{bmatrix} + \int_{(\tilde{B}_1 \cdots \tilde{B}_g)} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_g \end{bmatrix} \in \mathcal{H}_g$$

$$\Pi_2 = -C_2^{-1}B_2 + iC_2^{-1} = \int_{(B_1 \cdots B_g)} \begin{bmatrix} \theta_{g+1} \\ \vdots \\ \theta_{2g} \end{bmatrix} + \int_{(\tilde{B}_1 \cdots \tilde{B}_g)} \begin{bmatrix} \theta_{g+1} \\ \vdots \\ \theta_{2g} \end{bmatrix} \in \mathcal{H}_g$$

La condición ${}^t\Pi = \Pi$ junto con el Teorema 16.4.1 y el Corolario 16.4.2 aseguran la siguiente observación.

Corolario 16.5.1. — Sea (Γ, Γ^*, ρ) una estructura de superficie de Riemann discreta sobre la superficie orientada Σ de género g y sea $\gamma_1, \dots, \gamma_{4g}$ una base canónica de homología para $H_1(\Lambda, \mathbb{Z})$. Sea $\theta_1, \dots, \theta_{2g}$ la correspondiente base dual de $H^{1,0}(\Lambda)$. Entonces

(1)

$$\int_{\gamma_{2g+j}} \theta_r = \int_{\gamma_{2g+r}} \theta_j$$

(2) Para $\alpha, \beta \in H^{1,0}(\Lambda)$ vale que

$$0 = \sum_{j=1}^{2g} \left(\int_{\gamma_j} \alpha \int_{\gamma_{2g+j}} \beta - \int_{\gamma_{2g+j}} \alpha \int_{\gamma_j} \beta \right)$$

(3) Si $\theta \in H^{1,0}(\Lambda)$ es tal que

(3.1) $\int_{\gamma_j} \theta = 0$, para $j = 1, \dots, 2g$, o bien

(3.2) $\int_{\gamma_j} \theta = 0$, para $j = 1, \dots, 4g$,

entonces $\theta = 0$.

Observación 16.5.2. — Bajo ciertas condiciones la matrices de periodos g -dimensionales Π_1 y Π_2 [22] dan aproximaciones de la matriz de periodos de una estructura de superficie de Riemann para Σ .

16.6. La variedad Jacobiana

La existencia de bases duales a bases canónicas de homología permite ver que la imagen de $H_1(\Lambda, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{4g}$ por medio del homomorfismo de \mathbb{Z} -módulos

$$H_1(\Lambda, \mathbb{Z}) \rightarrow (H^{1,0}(\Lambda))^* \cong \mathbb{C}^{2g}$$

es un reticulado de rango maximal. La *Jacobiana* de la superficie de Riemann discreta (Γ, Γ^*, ρ) es la variedad Abeliana principalmente polarizada (su polarización es dada por la matriz de intersección)

$$J(\Gamma, \Gamma^*, \rho) = (H^{1,0}(\Lambda))^* / H_1(\Lambda, \mathbb{Z})$$

De manera más concreta, supongamos que

$$\gamma_1, \dots, \gamma_{4g}$$

es una base canónica de homología para $H_1(\Lambda, \mathbb{Z})$ y que

$$\theta_1, \dots, \theta_{2g}$$

es su base dual para $H^{1,0}(\Lambda)$, es decir

$$\int_{\gamma_k} \theta_r = \delta_{kr}, \quad k, r = 1, \dots, 2g.$$

Consideremos el reticulado L de \mathbb{C}^{2g} (cuyos vectores los miraremos como vectores columna) generado por los vectores canónicos E_1, \dots, E_{2g} , y los vectores columna de la matriz de periodos Π , digamos Π^1, \dots, Π^{2g} . Ya que la matriz simétrica Π tiene parte imaginaria positiva definida, tenemos que L es de rango maximal. De esta manera, tenemos que

$$J(\Gamma, \Gamma^*, \rho) = \mathbb{C}^{2g} / L$$

Si fijamos un punto $p_0 \in \Lambda_0$, entonces podemos construir la función (la cual está bien definida)

$$\phi_{p_0} : \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{C}^{2g} / L$$

$$\phi_{p_0}(p) = \begin{bmatrix} \int_{p_0}^p \theta_1 \\ \vdots \\ \int_{p_0}^p \theta_{2g} \end{bmatrix}$$

donde la integración se hace sobre cualquier camino simple en $C_1(\Lambda, \mathbb{Z})$ que conecta p_0 con p .

16.7. Ejemplos en género 1

16.7.1. De regreso al Ejemplo 34. — Consideremos (ver Figura 16.2) Σ una superficie de género $g = 1$ y la estructura de superficie de Riemann discreta

$$(\Gamma, \Gamma^*, \rho)$$

donde

$$\Gamma_0 = \{x\}, \Gamma_1 = \{e_1, e_2\}, \Gamma_2 = \{F\}$$

$$\Gamma_0^* = \{F^*\}, \Gamma_1^* = \{e_1^*, e_2^*\}, \Gamma_2 = \{x^*\}$$

$$\rho(e_1) = \frac{1}{\rho(e_1^*)} = m_1 > 0$$

$$\rho(e_2) = \frac{1}{\rho(e_2^*)} = m_2 > 0$$

En este caso particular, como vimos en el Ejemplo 34, se tiene que $C^1(\Lambda) = Ker(\Delta_2)$. Otra manera de ver esto es de la siguiente manera. Γ_2 contiene un solo elemento F_1 , cuyo borde es $\partial F_1 = e_1 + e_2 - e_1 - e_2 = 0$ y el único elemento de Γ_2^* F_1^* tienen como borde $\partial F_1^* = e_1^* + e_2^* - e_1^* - e_2^* = 0$. Ahora, una 1-forma $\alpha \in C^1(\Lambda)$ es armónica sí y sólo si $d\alpha = 0 = d \star \alpha$. Pero $\iint_{F_1} d\alpha = \int_{\partial F_1} \alpha = \int_0 \alpha = 0$, $\iint_{F_1^*} d\alpha = \int_{\partial F_1^*} \alpha = \int_0 \alpha = 0$, $\iint_{F_1} d \star \alpha = \int_{\partial F_1} \star \alpha = \int_0 \star \alpha = 0$, $\iint_{F_1^*} d \star \alpha = \int_{\partial F_1^*} \star \alpha = \int_0 \star \alpha = 0$, de donde vemos que trivialmente valen las igualdades $d\alpha = 0 = d \star \alpha$. Una base de diferenciales reales armónicas

$$\{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3, \tilde{\alpha}_4\}$$

es definida por la siguiente tabla de integración

\int	e_1	e_2	e_1^*	e_2^*
$\tilde{\alpha}_1$	1	0	0	0
$\tilde{\alpha}_2$	0	1	0	0
$\tilde{\alpha}_3$	0	0	1	0
$\tilde{\alpha}_4$	0	0	0	1

Consideremos la siguiente base canónica de homología para $H_1(\Lambda, \mathbb{Z})$

$$\{A_1 = e_1, \tilde{A}_1 = -e_2^*, \tilde{B}_1 = e_1^*, B_1 = e_2\},$$

de donde

$$\alpha_1 = \eta_{\tilde{B}_1}, \alpha_2 = \eta_{B_1}, \alpha_3 = -\eta_{A_1}, \alpha_4 = -\eta_{\tilde{A}_1}$$

En este caso podemos ver que

$$\alpha_1 = \tilde{\alpha}_1, \alpha_2 = -\tilde{\alpha}_4, \alpha_3 = \tilde{\alpha}_3, \alpha_4 = \tilde{\alpha}_2$$

La matriz que representa la forma Hermitiana en esta base es dada por

$$Q = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & D \\ B & C \end{bmatrix}$$

La matriz de periodos 2-dimensional es

$$\Pi = C^{-1}(-B + iI_2) = \begin{bmatrix} im_1 & 0 \\ 0 & \frac{i}{m_2} \end{bmatrix}$$

y las dos matrices de periodos 1-dimensionales son

$$\Pi_1 = im_1, \quad \Pi_2 = \frac{i}{m_2}$$

Luego, el Jacobiano de esta superficie de Riemann discreta es

$$J(\Gamma, \Gamma^*, \rho) = \mathbb{C}^2 / \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} im_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{i}{m_2} \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}}$$

$$J(\Gamma, \Gamma^*, \rho) \cong \mathbb{C} / \langle 1, im_1 \rangle_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{C} / \langle 1, \frac{i}{m_2} \rangle_{\mathbb{Z}}$$

En este ejemplo,

$$\mathcal{T}(\Gamma, \Gamma^*) \cong (0, +\infty) \quad (\text{el par } (m_1, m_2) \text{ corresponde a } \lambda = \frac{m_2}{m_1}),$$

$$\text{Aut}(\Gamma) = \langle a(e_1, e_2) = (e_2, -e_1), b(e_1, e_2) = (e_2, e_1) \rangle \cong D_4$$

$$\text{Aut}^+(\Gamma) = \text{Aut}_0^+(\Gamma) = \langle a^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

$$\text{Aut}_0(\Gamma) = \langle ab, ba \rangle \cong \mathbb{Z}_2^2$$

$$\text{Mod}(\Gamma, \Gamma^*) = \langle \phi(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

$$\text{Mod}^+(\Gamma, \Gamma^*) = \{I\}$$

$$\mathcal{M}(\Gamma, \Gamma^*) \cong (0, +\infty)$$

$$\widetilde{\mathcal{M}}(\Gamma, \Gamma^*) \cong (0, 1]$$

Genéricamente, $\text{Aut}(\Gamma, \Gamma^*, \rho) = \text{Aut}^+(\Gamma, \Gamma^*, \rho) \cong \mathbb{Z}_2$ y en el caso en que $\rho(e_1) = \rho(e_2)$ tenemos que $\mathbb{Z}_4 \cong \text{Aut}^+(\Gamma, \Gamma^*, \rho) \triangleleft \text{Aut}(\Gamma, \Gamma^*, \rho) \cong D_4$

En el borde, donde podemos asumir $\rho(e_1) = \rho(e_2) = 1$, obtenemos la matriz de Riemann del toro $\mathbb{C} / \langle 1, i \rangle_{\mathbb{Z}}$, es decir, $\Pi_1 = i = \Pi_2$.

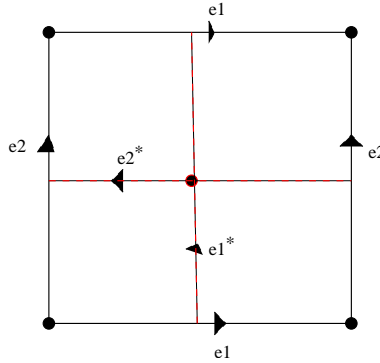


FIGURA 16.2

Observación 16.7.1. — Sabemos que existe una base dual de $H^{1,0}(\Lambda) \cong \mathbb{C}^2$,

$$\{\theta_1, \theta_2\}$$

tal que

$$\int_{A_1} \theta_1 = \int_{e_1} \theta_1 = 1$$

$$\int_{\tilde{A}_1} \theta_1 = - \int_{e_2^*} \theta_1 = 0$$

$$\int_{A_1} \theta_2 = \int_{e_1} \theta_2 = 0$$

$$\int_{\tilde{A}_1} \theta_2 = - \int_{e_2^*} \theta_2 = 1$$

la cual se puede obtener de la base real armónica anterior. Uno puede también calcularla directamente como sigue. Como $\theta_1, \theta_2 \in H^{1,0}(\Lambda)$ tenemos las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\star\theta_j = -i\theta_j, \quad j = 1, 2.$$

Usando estas ecuaciones podemos ver lo siguiente :

$$-\rho(e_1^*) \int_{e_1^*} \theta_1 = \int_{e_1} \star\theta_1 = -i \int_{e_1} \theta_1 = -i$$

de donde

$$\int_{\tilde{B}_1} \theta_1 = im_1$$

$$0 = -\rho(e_2^*) \int_{e_2^*} \theta_1 = \int_{e_2} \star\theta_1 = -i \int_{e_2} \theta_1$$

de donde

$$\int_{B_1} \theta_1 = 0$$

$$-\rho(e_1^*) \int_{e_1^*} \theta_2 = \int_{e_1} \star \theta_2 = -i \int_{e_1} \theta_2 = 0$$

de donde

$$\int_{\tilde{B}_1} \theta_2 = 0$$

$$\frac{1}{m_2} = -\rho(e_2^*) \int_{e_2^*} \theta_2 = \int_{e_2} \star \theta_2 = -i \int_{e_2} \theta_2$$

de donde

$$\int_{B_1} \theta_2 = \frac{i}{m_2}$$

Luego,

\int	A_1	\tilde{B}_1	\tilde{A}_1	B_1
θ_1	1	im_1	0	0
θ_2	0	0	1	$\frac{i}{m_2}$

16.7.2. Una descomposición triangular. — Consideremos (ver Figura 16.3) Σ una superficie de género $g = 1$ y la estructura de superficie de Riemann discreta

$$(\Gamma, \Gamma^*, \rho)$$

donde

$$\Gamma_0 = \{x_1, x_2\}, \Gamma_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}, \Gamma_2 = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$$

$$\Gamma_0^* = \{F_1^*, F_2^*, F_3^*, F_4^*\}, \Gamma_1^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*, e_5^*, e_6^*\}, \Gamma_2 = \{x_1^*, x_2^*\}$$

$$\rho(e_j) = \frac{1}{\rho(e_j^*)} = m_j > 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Procedamos a buscar las formas reales armónicas en $C^1(\Lambda)$. Sea $\alpha \in C^1(\Lambda)$ tal que

$$\int_{e_j} \alpha = a_j, \quad j = 1, \dots, 6$$

$$\int_{e_j^*} \alpha = b_j, \quad j = 1, \dots, 6$$

Entonces

$$\int_{e_j} \star \alpha = -\frac{b_j}{m_j}, \quad j = 1, \dots, 6$$

$$\int_{e_j^*} \star \alpha = m_j a_j, \quad j = 1, \dots, 6$$

Las ecuaciones $d\alpha = 0 = d \star \alpha$ son dadas por el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} a_5 - a_1 + a_4 = 0 \\ a_1 - a_6 - a_2 = 0 \\ a_2 - a_5 - a_3 = 0 \\ a_3 + a_6 - a_4 = 0 \\ -\frac{b_5}{b_1} + \frac{b_1}{b_6} - \frac{b_4}{b_2} = 0 \\ -\frac{m_5}{b_1} + \frac{m_1}{b_6} + \frac{m_4}{b_2} = 0 \\ \frac{m_1}{b_2} + \frac{m_6}{b_5} + \frac{m_2}{b_3} = 0 \\ -\frac{m_2}{b_3} + \frac{m_5}{b_6} + \frac{m_3}{b_4} = 0 \\ -\frac{m_3}{m_3} - \frac{m_6}{m_6} + \frac{b_4}{m_4} = 0 \\ m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3 + m_4 a_4 = 0 \\ b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0 \end{array} \right.$$

Resolviendo las 10 ecuaciones anteriores, obtenemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{-a_3(m_2 + m_3) + a_4(m_2 - m_4)}{m_1 + m_2} \\ a_2 = \frac{a_3(m_1 - m_3) - a_4(m_1 + m_4)}{m_1 + m_2} \\ a_5 = \frac{-a_3(m_2 + m_3) + a_4(m_1 + m_4)}{m_1 + m_2} \\ a_6 = \frac{-a_3 + a_4}{m_1 + m_2} \\ b_1 = \frac{m_1(b_4 m_3(m_2 - m_4) - b_3(m_2 + m_3)m_4)}{(m_1 + m_2)m_3 m_4} \\ b_2 = -\frac{m_2(b_3(-m_1 + m_3)m_4 + b_4 m_3(m_1 + m_4))}{(m_1 + m_2)m_3 m_4} \\ b_5 = -\frac{(b_3(m_2 + m_3)m_4 + b_4 m_3(m_1 + m_4))m_5}{(m_1 + m_2)m_3 m_4} \\ b_6 = \frac{\frac{b_4 m_6}{m_4} - \frac{b_3 m_6}{m_3}}{m_4 - m_3} \end{array} \right.$$

Así, una base para las formas reales armónicas se puede obtener considerando

$$(a_3, a_4, b_3, b_4) \in \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

Consideremos la base canónica para $H_1(\Lambda, \mathbb{Z})$ dada por

$$A_1 = e_5, \tilde{A}_1 = e_1^* + e_4^* + e_6^*, \tilde{B}_1 = e_5^* - e_3^* - e_4^*, B_1 = -e_6\}$$

de donde

$$\alpha_1 = \eta_{\tilde{B}_1}, \alpha_2 = \eta_{B_1}, \alpha_3 = -\eta_{A_1}, \alpha_4 = -\eta_{\tilde{A}_1}$$

Sabemos que debemos tener la siguiente tabla

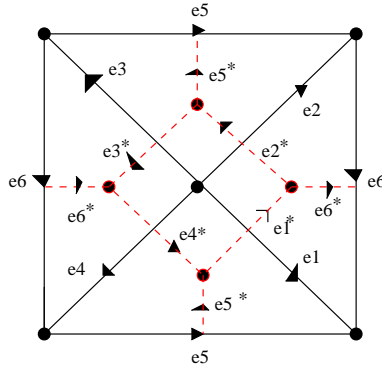


FIGURA 16.3

f	A_1	\tilde{A}_1	B_1	B_1
$\alpha_1 = \eta_{\tilde{B}_1}$	1	0	0	0
$\alpha_2 = \eta_{B_1}$	0	1	0	0
$\alpha_3 = -\eta_{A_1}$	0	0	1	0
$\alpha_4 = -\eta_{\tilde{A}_1}$	0	0	0	1

De esta manera,

$$\alpha_1 \iff a_5 = 1, b_1 + b_4 + b_6 = 0, b_5 - b_3 - b_4 = 0, -a_6 = 0$$

$$\alpha_2 \iff a_5 = 0, b_1 + b_4 + b_6 = 1, b_5 - b_3 - b_4 = 0, -a_6 = 0$$

$$\alpha_3 \iff a_5 = 0, b_1 + b_4 + b_6 = 0, b_5 - b_3 - b_4 = 1, -a_6 = 0$$

$$\alpha_4 \iff a_5 = 0, b_1 + b_4 + b_6 = 0, b_5 - b_3 - b_4 = 0, -a_6 = 1$$

y como consecuencia

$$\alpha_1 = \begin{cases} e_1, e_2 \mapsto \frac{m_3 + m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \\ e_3, e_4 \mapsto -\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \\ e_5 \mapsto 1 \\ e_6 \mapsto 0 \\ e_j^* \mapsto 0 \end{cases}$$

$$\alpha_2 = \left\{ \begin{array}{l} e_1^* \mapsto \frac{m_1(m_3m_5 + m_2(m_3 + m_4 + m_5))}{T} \\ e_2^* \mapsto \frac{-m_2(m_4m_5 + m_1(m_3 + m_4 + m_5))}{T} \\ e_3^* \mapsto \frac{-m_3(m_4(m_2 + m_5) + m_1(m_4 + m_5))}{T} \\ e_4^* \mapsto \frac{m_4(m_1m_3 + m_3m_5 + m_2(m_3 + m_5))}{T} \\ e_5^* \mapsto \frac{-m_1m_3m_5 + m_2m_4m_5}{T} \\ e_6^* \mapsto \frac{m_6((m_3 + m_4)m_5 + m_1(m_3 + m_4 + m_5) + m_2(m_3 + m_4 + m_5))}{T} \\ e_j \mapsto 0 \end{array} \right.$$

$$\alpha_3 = \left\{ \begin{array}{l} e_1^* \mapsto \frac{m_1(m_2m_4 + m_3(m_4 + m_6) + m_4m_6)}{T} \\ e_2^* \mapsto \frac{m_2(m_1m_3 + m_3(m_4 + m_6) + m_4m_6)}{T} \\ e_3^* \mapsto \frac{-m_3(m_1(m_2 + m_6) + m_2(m_4 + m_6))}{T} \\ e_4^* \mapsto \frac{-m_4(m_1(m_2 + m_3 + m_6) + m_2m_6)}{T} \\ e_5^* \mapsto \frac{m_5(m_3m_4 + m_1(m_2 + m_3 + m_6) + m_2(m_4 + m_6) + m_3m_6 + m_4m_6)}{T} \\ e_6^* \mapsto \frac{-m_6(m_1m_3 - m_2m_4)}{T} \\ e_j \mapsto 0 \end{array} \right.$$

$$\alpha_4 = \left\{ \begin{array}{l} e_2, e_3 \mapsto \frac{m_1 + m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \\ e_1, e_4 \mapsto -\frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \\ e_5 \mapsto 0 \\ e_6 \mapsto -1 \\ e_j^* \mapsto 0 \end{array} \right.$$

donde

$$T = m_5(m_4m_6 + m_3(m_4 + m_6)) + m_2(m_5m_6 + m_3(m_4 + m_6) + m_4(m_5 + m_6)) + \\ + m_1(m_2(m_3 + m_4 + m_5) + (m_4 + m_5)m_6 + m_3(m_4 + m_5 + m_6)) > 0$$

La matriz del producto Hermitiano asociado, en este caso, es dada por

$$Q = \begin{bmatrix} A & D \\ B & C \end{bmatrix}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^6 m_j \left(\int_{e_j} \alpha_1 \right)^2 & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^6 \frac{1}{m_j} \left(\int_{e_j^*} \alpha_2 \right)^2 \end{bmatrix}$$

$$B = {}^t D = \begin{bmatrix} 0 & \sum_{j=1}^6 \frac{1}{m_j} \left(\int_{e_j^*} \alpha_2 \right) \left(\int_{e_j^*} \alpha_3 \right) \\ \sum_{j=1}^6 m_j \left(\int_{e_j} \alpha_1 \right) \left(\int_{e_j} \alpha_4 \right) & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^6 \frac{1}{m_j} \left(\int_{e_j^*} \alpha_3 \right)^2 & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^6 m_j \left(\int_{e_j} \alpha_4 \right)^2 \end{bmatrix}$$

Luego, la matriz de periodos 2-dimensional es

$$\Pi = C^{-1}(iI_2 - B) = \begin{bmatrix} \frac{i}{\sum_{j=1}^6 \frac{1}{m_j} \left(\int_{e_j^*} \alpha_3 \right)^2} & -\frac{\sum_{j=1}^6 \frac{1}{m_j} \left(\int_{e_j^*} \alpha_2 \right) \left(\int_{e_j^*} \alpha_3 \right)}{\sum_{j=1}^6 \frac{1}{m_j} \left(\int_{e_j^*} \alpha_3 \right)^2} \\ -\frac{\sum_{j=1}^6 m_j \left(\int_{e_j} \alpha_1 \right) \left(\int_{e_j} \alpha_4 \right)}{\sum_{j=1}^6 m_j \left(\int_{e_j} \alpha_4 \right)^2} & \frac{i}{\sum_{j=1}^6 m_j \left(\int_{e_j} \alpha_4 \right)^2} \end{bmatrix}$$

y las matrices de periodos 1-dimensionales son

$$\Pi_1 = -\frac{\sum_{j=1}^6 \frac{1}{m_j} \left(\int_{e_j^*} \alpha_2 \right) \left(\int_{e_j^*} \alpha_3 \right)}{\sum_{j=1}^6 \frac{1}{m_j} \left(\int_{e_j^*} \alpha_3 \right)^2} + \frac{i}{\sum_{j=1}^6 \frac{1}{m_j} \left(\int_{e_j^*} \alpha_3 \right)^2} \in \mathcal{H}_1$$

$$\Pi_2 = -\frac{\sum_{j=1}^6 m_j \left(\int_{e_j} \alpha_1 \right) \left(\int_{e_j} \alpha_4 \right)}{\sum_{j=1}^6 m_j \left(\int_{e_j} \alpha_4 \right)^2} + \frac{i}{\sum_{j=1}^6 m_j \left(\int_{e_j} \alpha_4 \right)^2} \in \mathcal{H}_1$$

Ya que

$$\frac{\sum_{j=1}^6 m_j \left(\int_{e_j} \alpha_4 \right)^2}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \parallel \frac{m_3 m_4 + m_3 m_6 + m_4 m_6 + m_1(m_2 + m_3 + m_6) + m_2(m_4 + m_6)}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

y

$$\frac{\sum_{j=1}^6 m_j \left(\int_{e_j} \alpha_1 \right) \left(\int_{e_j} \alpha_4 \right)}{(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)^2} \parallel \frac{m_2 m_4(m_2 + m_4) + m_1^2(-m_3 + m_4) - m_1(m_2(m_3 - 2m_4) + m_3(m_3 + 2m_4))}{(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)^2}$$

tenemos que

$$\frac{Re(\Pi_2)}{(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)(m_3 m_4 + m_3 m_6 + m_4 m_6 + m_1(m_2 + m_3 + m_6) + m_2(m_4 + m_6))} \parallel \frac{-m_2 m_4(m_2 + m_4) + m_1^2(-m_3 + m_4) - m_1(m_2(m_3 - 2m_4) + m_3(m_3 + 2m_4))}{(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)(m_3 m_4 + m_3 m_6 + m_4 m_6 + m_1(m_2 + m_3 + m_6) + m_2(m_4 + m_6))}$$

y

$$\frac{Im(\Pi_2)}{m_3 m_4 + m_3 m_6 + m_4 m_6 + m_1(m_2 + m_3 + m_6) + m_2(m_4 + m_6)} \parallel \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{m_3 m_4 + m_3 m_6 + m_4 m_6 + m_1(m_2 + m_3 + m_6) + m_2(m_4 + m_6)}$$

En este caso,

$$\mathcal{T}(\Gamma, \Gamma^*) = (0, +\infty)^5$$

$$\begin{aligned} & \frac{Aut(\Gamma)}{Aut^+(\Gamma) = \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_4} \parallel \\ & \langle a(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6) = (e_2, e_3, e_4, e_1, -e_6, e_5), b(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6) = (e_2, e_1, e_4, e_3, e_5, -e_6) \rangle \cong D_4 \end{aligned}$$

$$Aut_0^+(\Gamma) = Aut_0(\Gamma) = \{I\}$$

$$K = K^+ = \{I\}$$

$$Mod(\Gamma, \Gamma^*) \cong Aut(\Gamma)$$

$$\begin{aligned} & \parallel \\ \langle A(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) &= \left(\frac{1}{\lambda_3}, \frac{\lambda_1}{\lambda_3}, \frac{\lambda_2}{\lambda_3}, \frac{\lambda_5}{\lambda_3}, \frac{\lambda_4}{\lambda_3} \right), B(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}, \frac{\lambda_1}{\lambda_3}, \frac{1}{\lambda_3}, \frac{\lambda_4}{\lambda_3}, \frac{\lambda_5}{\lambda_3} \right) \rangle \\ \text{Mod}^+(\Gamma, \Gamma^*) &= \langle A \rangle \cong \mathbb{Z}_4 \\ \mathcal{M}(\Gamma, \Gamma^*) &= (0, +\infty)^5 / \langle A \rangle \\ \widetilde{\mathcal{M}}(\Gamma, \Gamma^*) &= (0, +\infty)^5 / \langle A, B \rangle \end{aligned}$$

En este caso, genéricamente, $\text{Aut}(\Gamma, \Gamma^*, \rho) = \{I\}$. En el caso $\rho(e_5) = \rho(e_6)$, tenemos que genéricamente $\text{Aut}(\Gamma, \Gamma^*, \rho) \cong \mathbb{Z}_2$ y $\text{Aut}^+(\Gamma, \Gamma^*, \rho) = \{I\}$. En el caso $\rho(e_1) = \rho(e_3)$ y $\rho(e_2) = \rho(e_4)$, tenemos que genéricamente $\text{Aut}(\Gamma, \Gamma^*, \rho) = \text{Aut}^+(\Gamma, \Gamma^*, \rho) \cong \mathbb{Z}_2$. En el caso $\rho(e_1) = \rho(e_2)$ y $\rho(e_3) = \rho(e_4)$ tenemos que genéricamente $\text{Aut}(\Gamma, \Gamma^*, \rho) \cong \mathbb{Z}_2$ y $\text{Aut}^+(\Gamma, \Gamma^*, \rho) = \{I\}$. En el caso $\rho(e_1) = \rho(e_2) = \rho(e_3) = \rho(e_4)$ y $\rho(e_5) = \rho(e_6)$ tenemos que $\text{Aut}(\Gamma, \Gamma^*, \rho) \cong D_4$ y $\text{Aut}^+(\Gamma, \Gamma^*, \rho) \cong \mathbb{Z}_4$.

16.8. Matrices de Riemann discretas y automorfismos

Consideremos un mapa Γ sobre una superficie orientada cerrada Σ de género g , un mapa dual Γ^* y el correspondiente dual Λ . Tenemos asociado al par (Γ, Γ^*) el espacio de Teichmüller $\mathcal{T}(\Gamma, \Gamma^*)$, los grupos modulares $\text{Mod}^+(\Gamma, \Gamma^*) \triangleleft \text{Mod}(\Gamma, \Gamma^*)$ y los espacios de moduli $\mathcal{M}(\Gamma, \Gamma^*) = \mathcal{T}(\Gamma, \Gamma^*) / \text{Mod}^+(\Gamma, \Gamma^*)$ y $\widetilde{\mathcal{M}}(\Gamma, \Gamma^*) = \mathcal{T}(\Gamma, \Gamma^*) / \text{Mod}(\Gamma, \Gamma^*)$.

Fijemos además una base canónica de homología para $H_1(\Lambda, \mathbb{Z})$, digamos,

$$\gamma_1, \dots, \gamma_{4g}.$$

Denotemos por $H < \text{Mod}^+(\Gamma, \Gamma^*)$ el subgrupo normal formado de aquellas transformaciones modulares h tales que $h(\gamma_j) = \gamma_j$, para todo $j = 1, \dots, 4g$. El cociente $\text{Mod}^+(\Gamma, \Gamma^*) / H = \text{Tor}(\Gamma, \Gamma^*)$ es llamado el *grupo de Torelli* asociado a (Γ, Γ^*) .

Para cada $\rho \in \mathcal{T}(\Gamma, \Gamma^*)$ tenemos una estructura de superficie de Riemann discreta (Γ, Γ^*, ρ) sobre Σ y el grupo finito $\text{Aut}^+(\Gamma, \Gamma^*, \rho)$ de automorfismos conformes de tal estructura. Tenemos una base dual de diferenciales analíticas discretas para $H^{1,0}(\Lambda)$,

$$\theta_1, \dots, \theta_{2g}$$

es decir,

$$\int_{\gamma_j} \theta_k = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, 2g.$$

La matriz de periodos $2g$ -dimensional es dada por

$$\Pi_\rho = \int_{(\gamma_{2g+1} \cdots \gamma_{4g})} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{2g} \end{bmatrix}$$

y las matrices de periodos g -dimensionales dadas por

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \int_{(\gamma_{2g+1} \cdots \gamma_{3g})} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_g \end{bmatrix} + \int_{(\gamma_{3g+1} \cdots \gamma_{4g})} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_g \end{bmatrix} \in \mathcal{H}_g \\ \Pi_2 &= \int_{(\gamma_{2g+1} \cdots \gamma_{3g})} \begin{bmatrix} \theta_{g+1} \\ \vdots \\ \theta_{2g} \end{bmatrix} + \int_{(\gamma_{3g+1} \cdots \gamma_{4g})} \begin{bmatrix} \theta_{g+1} \\ \vdots \\ \theta_{2g} \end{bmatrix} \in \mathcal{H}_g \end{aligned}$$

Sea $f \in \text{Aut}^+(\Gamma, \Gamma^*, \rho)$. Entonces, como f es un homeomorfismo de Σ que preserva la orientación, tenemos que

$$f(\gamma_1), \dots, f(\gamma_{4g})$$

sigue siendo una base canónica de homología para $H_1(\Lambda, \mathbb{Z})$. Asociado a esta nueva base existe su base dual de diferenciales analíticas discretas

$$\theta_1^f, \dots, \theta_{2g}^f$$

y de manera correspondiente tenemos las matrices de periodos

$$\Pi^f \in \mathcal{H}_{2g}, \Pi_1^f, \Pi_2^f \in \mathcal{H}_g$$

Notación : $f^*(\theta_j^f) = \theta_j$.

No es difícil ver que debemos tener

$$\Pi_\rho^f = \Pi_\rho$$

Luego, el automorfismo $f \in \text{Aut}^+(\Gamma, \Gamma^*, \rho)$ define una transformación simpléctica $A_f \in \text{Sp}_{4g}(\mathbb{Z})$, luego actúa en el espacio de Siegel \mathcal{H}_{2g} , satisfaciendo

$$A_f(\Pi_\rho) = \Pi_\rho$$

Lo anterior nos asegura la existencia de una *funcion de periodos*

$$P : \mathcal{T}(\Gamma, \Gamma^*) \rightarrow \mathcal{H}_{2g} : \rho \mapsto \Pi_\rho$$

tal que para cada $t \in \text{Mod}^+(\Gamma, \Gamma^*)$ existe $A_t \in \text{Sp}_{4g}(\mathbb{Z})$ de manera que

$$P \circ t = A_t \circ P$$

Más aún, el núcleo del homomorfismo

$$t \in \text{Mod}^+(\Gamma, \Gamma^*) \rightarrow A_t \in \text{Sp}_{4g}(\mathbb{Z})$$

es exáctamente H . Luego, $Tor(\Gamma, \Gamma^*)$ es isomorfo por el homomorfismo anterior a un subgrupo del grupo simpléctico $Sp_{4g}(\mathbb{Z})$, el cual seguimos denotando por $Tor(\Gamma, \Gamma^*)$.

Como $Tor(\Gamma, \Gamma^*)$ es un grupo finito, tenemos que el cociente

$$\mathcal{H}_{2g} \rightarrow \mathcal{A}(\Gamma, \Gamma^*) = \mathcal{H}_{2g}/Tor(\Gamma, \Gamma^*)$$

es de grado finito. Llamamos a $\mathcal{A}(\Gamma, \Gamma^*)$ el *espacio de variedades Abelianas principalmente polarizadas respecto* (Γ, Γ^*) .

16.9. Problemas de Torelli y Schottky

Supongamos que tenemos fijo una superficie orientada cerrada Σ (de género $g \geq 1$), un mapa Γ y su dual Γ^* (el cual está en realidad determinada por Γ) y una base canónica de homología para $H_1(\Lambda, \mathbb{Z})$.

Cada métrica $\rho \in \mathcal{T}(\Gamma, \Gamma^*)$ determina una matriz de Riemann $\Pi \in \mathcal{H}_{2g}$ (es decir una representación explícita de la Jacobiana $J(\Gamma, \Gamma^*, \rho)$).

- 1.- ¿Puede uno determinar la estructura de Riemann discreta (módulo equivalencia conforme) a partir de su variedad Jacobiana? (Problema de Torelli)
- 2.- Dada (Γ, Γ^*) , determinar la imagen $P(\mathcal{T}(\Gamma, \Gamma^*)) \subset \mathcal{H}_{2g}$. (Problema de Schottky)

16.9.1. Problema de Torelli. — Consideremos el ejemplo de la Sección 16.7.2. En ese caso, si tomamos la métrica ρ_1 definida por

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = 1$$

entonces obtenemos la matriz de periodos

$$\Pi = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & i/2 \end{bmatrix}$$

Si consideramos la métrica ρ_2 dada por

$$m_1 = m_4 = 2, m_2 = m_3 = 1, m_5 = 1/2, m_6 = 2/3$$

entonces obtenemos la misma matriz de periodos.

Este ejemplo muestra que la matriz de periodos (Jacobiana) no determina la estructura discreta, es decir, no hay validez de un Teorema de Torelli en esta situación.

Debemos proceder de otra manera para tratar de buscar un Teorema de Torelli en este caso. Primero definimos una afinación de una descomposición celular como sigue.

Consideremos un mapa Γ en la superficie Σ . Un nuevo mapa $\widehat{\Gamma}$ (el cual llamaremos una *afinación* de Γ) puede ser construido como sigue. Los vértices de $\widehat{\Gamma}$ son dados por la unión de los siguientes :

1. Γ_0 ;
2. por cada eje $e \in \Gamma_1$ es cogemos un punto en el interior de e ;
3. por cada cara $F \in \Gamma_2$ escogemos un punto en el interior de F .

Los ejes de $\widehat{\Gamma}$ son dados por la union de los siguientes :

1. los dos semi-ejes que determina cada punto del interior de cada eje en Γ_1 ;
2. por cada vértice que está en el interior de una cara $F \in \Gamma_2$, consideramos ejes que conectan tal punto a cada uno de los vértices de es punto interior a uno de los ejes del borde de F .

Observación 16.9.1. — En general, lo que uno puede hacer es considerar un mapa dual Γ^* y luego considerar la unión de ellos y los puntos de intersección de los ejes de Γ con los ejes de Γ^* ser nuevos vértices.

Ahora, si tenemos una métrica ρ para Γ , entonces definimos la siguiente métrica $\widehat{\rho}$ para $\widehat{\Gamma}$.

1. Si $\widehat{e} \in \widehat{\Gamma}_1$ es parte de un eje $e \in \Gamma_1$, entonces definimos $\widehat{\rho}(\widehat{e}) = \rho(e)/2$.
2. Si $\widehat{e} \in \widehat{\Gamma}_1$ es un eje que conecta a un vértice que está en el interior de una cara de Γ con el punto interior a un eje $e \in \Gamma_1$, entonces definimos $\widehat{\rho}(\widehat{e}) = 1/(2\rho(e))$.

Este proceso permite considerar sucesiones de estructuras de Riemann discretas a partir de una dada. Esto nos dá una sucesión de Jacobianas. El problema de Torelli puede ser considerado como la decidibilidad de la estructura de partida si conocemos todas las Jacobianas de esta sucesión.

CAPÍTULO 17

ESTRUCTURAS CLÁSICAS VERSUS ESTRUCTURAS DISCRETAS

En los capítulos anteriores nos hemos interesado en estructuras de superficies de Riemann discretas, pero no la hemos explícitamente relacionada con las estructuras clásicas de superficies de Riemann. En este capítulo intentaremos dar cierta relación, para ciertos casos particulares. La situación aquí descrita es de real aplicación a reconocimiento de imágenes.

17.1. Superficies simpliciales en \mathbb{R}^3

En lo que sigue, usaremos la métrica usual Euclidiana en \mathbb{R}^3 . Consideremos un objeto 3-dimensional $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$, por ejemplo, una escultura, un corazón, etc. Denotemos por S el borde de \mathcal{O} ; es decir, S es una superficie orientada compacta. En procesos de scanner de imágenes, generalmente se hace una aproximación de S por medio de superficies simpliciales, es decir, superficies orientadas y compactas que son unión de triángulos Euclidianos planos. Luego, se buscan representaciones (locales) planares que permitan reobtener la superficie simplicial original. Tales representaciones deben ser eficientes en lo que se refiere a su almacenamiento, transmisión y edición, entre otros.

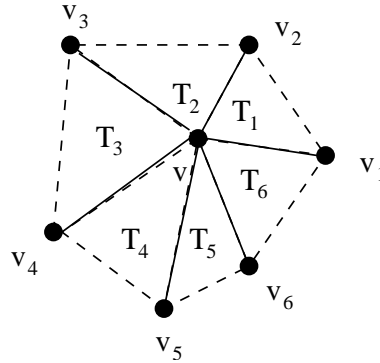
Supongamos que tenemos una superficie orientada, simplicial, compacta $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$. La estructura simplicial determina de manera natural una mapa Γ .

Para efectos prácticos, supondremos que cada triángulo en la superficie simplicial tiene cada uno de sus ángulos en $(0, \pi/2)$.

17.2. Estructuras de superficies de Riemann en superficies simpliciales

L. Bers [4] introdujo de manera natural una estructura de superficie de Riemann en Σ asociada de manera natural a su estructura simplicial. Procederemos a indicar las cartas locales de tal estructura.

17.2.1. Vértices interiores. — Sea $v \in \Sigma$ un vértice interior de la estructura simplicial. Consideramos la vecindad abierta $\Omega_v \subset \Sigma$ dada por el interior de la unión de todos los triángulos, digamos T_1, \dots, T_n (ordenados cíclicamente de manera opuesta a las manecillas

FIGURA 17.1. La vecindad Ω_v para $n = 6$

del reloj)), que tienen a v en su borde (ver Figura 17.1). Supongamos que los vértices de T_j son, ordenados de manera cíclica y opuesta a las manecillas del reloj, v , v_j y v_{j+1} (ver Figura 17.1).

Denotemos por $\theta_j \in (0, \pi/2)$ el ángulo interior de T_j en el vértice v . Definamos

$$\alpha_j = \begin{cases} 0, & j = 1 \\ \sum_{k=1}^{j-1} \theta_k, & j \in \{2, \dots, n\} \end{cases},$$

$$\alpha = \sum_{k=1}^n \theta_k.$$

Sean

$$U : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto e^{2\pi/\alpha} z$$

y

$$R_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z^{2\pi i/\alpha_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

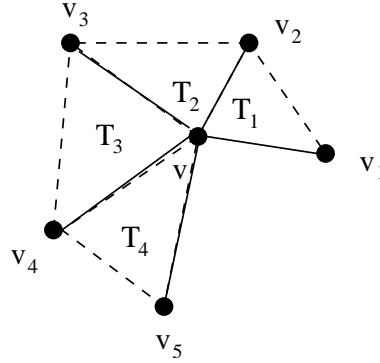
Sea $\widehat{T}_j \subset \mathbb{C}$, para cada $j = 1, \dots, n$, el triángulo Euclidiano planar cuyos vértices son, ordenados de manera opuesta a las manecillas del reloj, dados por 0 , $\|v - v_j\|$ y $\|v - v_{j+1}\|e^{i\theta_j}$, y sea $L_j : T_j \rightarrow \widehat{T}_j$ la isometría Euclidiana definida por $L_j(v) = 0$, $L_j(v_j) = \|v - v_j\|$ y $L_j(v_{j+1}) = \|v - v_{j+1}\|e^{i\theta_j}$.

Se define la carta local

$$\phi_v : \Omega_v \rightarrow \mathbb{C}$$

por la regla

$$\phi_v(p) = R_j \circ U \circ L_j(p), \quad p \in T_j.$$

FIGURA 17.2. La vecindad Ω_v para $n = 4$

17.2.2. Vértices frontera. — Sea $v \in \Sigma$ un vértice frontera de la estructura simplicial. Consideramos la vecindad abierta $\Omega_v \subset \Sigma$ dada por el interior de la unión de todos los triángulos, digamos T_1, \dots, T_n (ordenados cíclicamente de manera opuesta a las manecillas del reloj), que tienen a v en su borde (ver Figura 17.2). Supongamos que los vértices de T_j son, ordenados de manera cíclica y opuesta a las manecillas del reloj, v, v_j y v_{j+1} (ver Figura 17.2).

Denotemos por θ_j el ángulo interior de T_j en el vértice v . Definamos, al igual que en el caso anterior,

$$\alpha_j = \begin{cases} 0, & j = 1 \\ \sum_{k=1}^{j-1} \theta_k, & j \in \{2, \dots, n\} \end{cases},$$

$$\alpha = \sum_{k=1}^n \theta_k.$$

Sean

$$U : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto e^{\pi/\alpha} z$$

y

$$R_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z^{\pi i/\alpha_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Sea $\widehat{T}_j \subset \mathbb{C}$, para cada $j = 1, \dots, n$, el triángulo Euclidiano planar cuyos vértices son, ordenados de manera opuesta a las manecillas del reloj, dados por $0, \|v - v_j\|$ y $\|v - v_{j+1}\|e^{i\theta_j}$, y sea $L_j : T_j \rightarrow \widehat{T}_j$ la isometría Euclidiana definida por $L_j(v) = 0, L_j(v_j) = \|v - v_j\|$ y $L_j(v_{j+1}) = \|v - v_{j+1}\|e^{i\theta_j}$.

Notemos en este caso que $U(\widehat{T}_j) \subset \mathbb{H}^2 \cup \mathbb{R}$, donde \mathbb{H}^2 denota el semiplano superior en \mathbb{C} .

Se define la carta local

$$\phi_v : \Omega_v \rightarrow \mathbb{H}^2 \cup \mathbb{R}$$

por la regla

$$\phi_v(p) = R_j \circ U \circ L_j(p), \quad p \in T_j.$$

Ejercicio 73. — *Verificar que las cartas anteriores definen una estructura de superficie de Riemann compacta (con posible borde) sobre Σ . Más aún, la restricción de cada L_j al interior de T_j es también una carta local para tal estructura.*

17.3. Funciones armónicas

Ahora que tenemos dotada a Σ de una estructura de superficie de Riemann (con posible borde), tenemos asociada una estructura Riemanniana ds de curvatura constante (dependiendo sólo de la característica de Euler de Σ).

Denotemos por \mathcal{F} el espacio de Hilbert de las funciones $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ continuas y suaves por pedazos, con el producto interior Euclidiano

$$(f, g) = \iint_{\Sigma} fg \, dA,$$

donde dA denota la forma de área asociada a ds .

La funcional de energía asociado a la métrica Riemanniana ds es dada por

$$E : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$E(f) = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} |df|_{ds}^2 \, dA, \quad f \in \mathcal{F}$$

donde dA denota el elemento de área asociado a ds .

Como cada eje del símplice Σ es de medida de Lebesgue 0 y tenemos, por la compacidad, sólo una cantidad finita de triángulos en el símplice, digamos

$$T_1, \dots, T_n$$

obtenemos que

$$E(f) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \iint_{T_j} |df|_{ds}^2 \, dA$$

Por otro lado, ya que sobre el interior de T_j vale que

$$(R_j \circ U) \circ L_j = \phi_{v_{j1}}$$

donde v_{j1} es uno de los vértices de T_j , y $(R_j \circ U)$ es complejo analítico en el interior de \hat{T}_j , vemos que (T_j, L_j) es carta local para la estructura de superficie de Riemann dada. De esta manera,

$$E(f) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \iint_{\hat{T}_j} |df_j|_{ds_j}^2 \, dA_j$$

donde ds_j (respectivamente, dA_j) es la métrica Riemanniana inducida por ds (respectivamente, el elemento de área inducida) por L_j y $f_j = f \circ L_j^{-1}$.

Como L_j es una isometría Euclidiana, ds_j no es nada más que la métrica Euclidiana; en particular, $dA_j = dxdy$. Luego;

$$E(f) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \iint_{\hat{T}_j} \left(\left(\frac{\partial f_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_j}{\partial y} \right)^2 \right) dxdy$$

Una función $f \in \mathcal{F}$ es llamada *función armónica* si es un mínimo local de $E : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$.

17.3.1. Extensiones armónicas. —

Teorema 17.3.1 (Choquet). — *Sea R una superficie de Riemann compacta homeomorfa a un disco cerrado y $g = (g_1, g_2) : \partial R \rightarrow \mathbb{R}^2$ una incrustación continua sobre el borde de una región convexa $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sea $f_j : S \rightarrow \mathbb{R}$ la (única) extensión armónica tal que $f_j = g_j$ sobre ∂R . Entonces $f = (f_1, f_2) : R - \partial R \rightarrow \Omega$ resulta ser un difeomorfismo.*

17.4. Funciones PL-harmónicas

La estructura simplicial de Σ permite considerar funciones $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ que son localmente lineales, es decir, funciones continuas que son lineales afines sobre cada triángulo del símlice. Estas funciones son llamadas *PL-funciones*.

Denotemos por \mathcal{F}_{PL} al subconjunto de \mathcal{F} conteniendo a las PL-funciones.

Ejercicio 74. — *Verificar que \mathcal{F}_{PL} es un subespacio de Hilbert de \mathcal{F} .*

Supongamos que los triángulos del símlice Σ son T_1, \dots, T_n , y que los vértices de T_j son v_{j1}, v_{j2} y v_{j3} , enumerados de manera opuesta a las manecillas del reloj, y suponiendo que el ángulo interior de T_j respecto al vértice v_{jk} es $\alpha_{jk} \in (0, \pi/2)$.

Si $f \in \mathcal{F}_{PL}$ es fácil ver que

$$\frac{1}{2} \iint_{T_j} |df|_{ds}^2 dA = \frac{1}{2} \iint_{\hat{T}_j} \left(\left(\frac{\partial f_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_j}{\partial y} \right)^2 \right) dxdy$$

||

$$\frac{1}{4} (\cot(\alpha_{j3})(f(v_{j1}) - f(v_{j2}))^2 + \cot(\alpha_{j1})(f(v_{j2}) - f(v_{j3}))^2 + \cot(\alpha_{j2})(f(v_{j1}) - f(v_{j3}))^2)$$

17.5. Una estructura discreta asociada

Si un eje $\{v_1, v_2\}$ del símplice Σ es común a dos triángulos, digamos T_1 y T_2 , entonces definimos

$$\rho(\{v_1, v_2\}) = \frac{1}{2}(\cot(\theta_1) + \cot(\theta_2))$$

donde θ_1 (respectivamente, θ_2) es el ángulo interior del triángulo T_1 (respectivamente, T_2) opuesto al eje $\{v_1, v_2\}$.

Si un eje $\{v_1, v_2\}$ del símplice Σ está en el borde y está en borde del triángulo T_1 , entonces definimos

$$\rho(\{v_1, v_2\}) = \frac{1}{2} \cot(\theta_1)$$

donde θ_1 es el ángulo interior del triángulo T_1 opuesto al eje $\{v_1, v_2\}$.

La función ρ define, ya que hemos impuesto que los ángulos interiores de cada triángulo vive en $(0, \pi/2)$, una métrica sobre los ejes del mapa Γ inducido por la superficie simplicial Σ . Escojamos una mapa dual Γ^* ; por ejemplo, Γ^* que se construye por medio de arcos ortogonales a puntos medios de los ejes de Γ , es decir, su vértices son los centros de círculos circunscritos a los triángulos de Σ . Ahora tenemos una estructura de superficie de Riemann discreta (Γ, Γ^*, ρ) para Σ .

Notemos que, por lo observado en la Sección anterior, para $f \in \mathcal{F}_{PL}$ vale que

$$E(f) = \frac{1}{2} \sum_{\{v,w\} \in \Gamma_1} \rho(\{v,w\})(f(w) - f(v))^2$$

Teorema 17.5.1. — *Las PL-funciones armónicas asociadas a la estructura de superficie de Riemann coinciden con las funciones $f \in C^0(\Lambda)$ que son armónicas discretas con la estructura de superficie de Riemann discreta anterior y $f|_{\Gamma^*} = 0$.*

17.6. Caso Σ homeomorfo a un disco cerrado

Supongamos que tenemos que Σ es homeomorfo a un disco cerrado, con borde $\partial\Sigma$. Sea $g = (g_1, g_2) : \partial\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$. El problema de Dirichlet discreto nos asegura la existencia de una (única) función $f_j \in C^0(\Gamma)$ que es armónica discreta en $\Sigma - \partial\Sigma$ y cuyos valores en $\partial\Sigma$ es dada por g_j . Ahora podemos construir la PL-función $f = (f_1, f_2) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$.

También tenemos la existencia de funciones $\hat{f}_j : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ que son armónicas en $\Sigma - \partial\Sigma$ y que coinciden con g_j sobre $\partial\Sigma$.

Por otro lado, el Teorema de Choquet 17.3.1 nos asegura que si $g(\partial\Sigma)$ es el borde de un dominio convexo Ω , entonces tenemos que $\hat{f} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2)$ es un difeomorfismo entre $\Sigma - \partial\Sigma$ y Ω .

La función $f = (f_1, f_2) : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ no es necesariamente biyectiva, pero si es una aproximación de \hat{f} . Haciendo una retriangulación de Σ , cada vez más fina, uno puede aproximar el difeomorfismo \hat{f} por las correspondientes f , de donde se puede obtener un algoritmo computacional numérico para aproximaciones de la incrustación \hat{f} . Esta idea es muy importante para analizar resolución de imágenes [7].

REFERENCIAS

- [1] Ambrosetti, A. and Rabinowitz, P. Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications. *J. Functional Analysis* **14** (1973), 349-381.
- [2] Baker, Matthew and Rumely, Robert. Harmonic analysis on metrized graphs. *Canad. J. Math.* **59** (2007), no. 2, 225-275.
- [3] Baker, Matthew and Faber, Xander. Metrized graphs, Laplacian operators, and electrical networks. Quantum graphs and their applications, 15–33, *Contemp. Math.* **415**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [4] Bers, L. *Riemann Surfaces*. Courant Institute of Mathematical Sciences. New York University, New York, 1958.
- [5] Brezis, H. and Nirenberg, L. Remarks on Finding Critical Points. *Comm. Pure Appl. Math.* **44** (1991), 939-963.
- [6] Colin de Verdière. Y. Multiplicités de valeurs propres : laplaciens discrets et continus. *Rendiconti di Matematica* **VII, 13** (1993), 433-460.
- [7] Derose, A., Duchamp, T., Certain, A. and Stuetzle, W. Hierarchical computation of pl harmonic embeddings. Preprint 1997.
- [8] Duffin, R.J. Basic properties of discrete analytic functions. *Duke Math. J.* **23** (1956), 335-363.
- [9] Evans, G., Blackledge, J. and Yardley, P. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 2000.
- [10] Favre, Charles and Jonsson, Mattias. *The valuative tree*. Lecture Notes in Mathematics, 1853. Springer-Verlag, Berlin, 2004. xiv+234 pp. ISBN : 3-540-22984-1
- [11] Gilbart, D. and Trudinger, N. *Elliptic Partial Equations of Second Order*. Springer, 2nd Edition, 2001.
- [12] Girault, V. and Raviart, P.A. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms*. Springer-Verlag, 1986.

- [13] Gockenbach, M.S. *Partial Differential Equations. Analytical and Numerical Methods*. SIAM, 2002.
- [14] Gu, Xianfeng, Wang, Yalin and Yau, Shin-Tung. Computing conformal invariants : Period matrices. *Communications in Information and Systems*. **3** No. 3 (2004), 153-170.
- [15] Hackbusch, W. *Elliptic Differential Equations*. Springer-Verlag, 1992.
- [16] Hidalgo, R.A. Zeros of semilinear systems with applications to nonlinear partial difference equations on graphs. Preprint UTFSM (2007). To appear in *Journal of Difference Equations and Applications*.
- [17] Howe, M. S. *Acoustics of fluid-structure interactions*. Cambridge, New York. Cambridge University Press (1998).
- [18] Hutchinson, Joan P. Automorphism properties of embedded graphs. *Journal of Graph Theory* **8** No.1(1984), 35 - 49.
- [19] Lelong-Ferrand, J. *Représentation conforme et transformations à intégrale de Dirichlet bornée*. Paris : Cauthier-Villars, 1955.
- [20] Mercat, C. Holomorphie discrète et modèle d'Ising. Ph.D. Thesis, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France, 1998.
- [21] Mercat, C. Discrete Riemann surfaces and the Ising Model. *Commun. Math. Phys.* **218** (2001), 177-216.
- [22] Mercat, C. Discrete period matrices and related topics.
- [23] Michell, A.R. and Griffiths, D.F. *The Finite Difference Method in Partial Differential Equations*. John Wiley & Sons, 1980.
- [24] Neuberger, John M. Nonlinear Elliptic Partial Difference Equations on Graphs. *Experimental Mathematics* **15** (2006), 91-107.
- [25] Smith, G.D. *Numerical Solution of Partial Differential Equations : Finite Difference Methods* (3rd ed.). Oxford University Press. 1985.
- [26] Veblen, O. *Analysis Situs*. Amer. Math. Soc. X, 1931.

INDICE

- 1-Cícl0s, 93
- 1-Cícl0s fronteras, 93
- 1-Cocícl0s, 95
- 1-Cocícl0s fronteras, 95
- 1-Formas cerradas, 95
- 1-Formas exactas, 95
- k -forma en grafos, 88
- k -formas, 93
- p -Laplaciano discreto, 31
- Derivación nula, 46
- Arbol, 5
- Autómatas finitos, 13
- Automorfismo de grafos, 7
- Automorfismo de grafos métricos, 28
- Automorfismos anticonformes discretos, 110
- Automorfismos conformes discretos, 109
- Automorfismos de mapas, 10
- Base canónica de homología para $H_1(\Lambda, \mathbb{Z})$, 165
- Base dual de diferenciales analíticas, 169
- Base dual de diferenciales reales armónicas, 166
- Bucles, 3
- Cícl0 Hamiltoniano, 5
- Cícl0s, 5
- Cadenas singulares en grafos, 87
- Cadenas singulares en mapas, 91
- Camino Euleriano, 5
- Camino Hamiltoniano, 5
- Caminos cerrados, 5
- Caminos en grafos, 4
- Caminos simples, 5
- Campos de vectores en grafos, 25
- Celular diamante, 101
- Circuito, 5
- Circuito Euleriano, 5
- Co-cadenas singulares en grafos, 88
- Co-cadenas singulares en mapas, 93
- Cohomología de grafo, 89
- Coloración de grafos, 21
- Continuidad discreta, 118
- Derivación en grafos, 25
- Derivación simétrica positiva semi-definida de tipo positiva, 53
- Derivaciones inducidas por campos de vectores, 32
- Derivada direccional, 29
- Derivadas direccionales en grafos, 28
- Descomposición celular, 99
- Diferencial analítica discreta, 134
- Diferencial anti-analítica discreta, 134
- Diferencial meromorfa discreta, 135
- Distancia en grafos, 27
- Doble celular, 101
- Ecuación de Cauchy-Riemann discreta, 114
- Ecuación de Helmholtz, 64
- Ecuación de Navier-Stokes, 67
- Ecuación de ondas, 62
- Ecuación del calor, 62
- Ecuación discreta tipo Matukuma, 61
- Ejes de un grafo, 3
- El operador \star de Hodge, 132
- Espacio de móduli, 109
- Espacio de Teichmüller, 107
- Espacio de variedades Abelianas, 183
- Estructuras de superficies de Riemann discreta, 103
- Estructuras de superficies de Riemann real discreta, 103
- Fórmula de Stokes discreta, 94
- Fórmula integral de Cauchy discreta, 116
- Forma c -cerrada, 144
- Forma armónica, 137
- Función analítica discreta, 115
- Función de incidencia de un grafo, 3
- Función de periodos, 182

- Función localmente no-constante, 33
 Funciones analítica discreta entres superficies de Riemann discretas, 118
 Funciones anti-analítica discreta, 115
 Funciones armónicas, 189
 Funciones armónicas discretas, 30
 gradiente, 68
 Grado de un vértice, 6
 Grafo, 3
 Grafo d -regular, 6
 Grafo conexo, 5
 Grafo de grado finito, 6
 Grafo métrico, 27
 Grafo regular, 6
 Grafo simple, 3
 Grafos bipartitos, 23
 Grafos dirigidos, 12
 Grafos Eulerianos, 15
 Grafos finitos, 3
 Grafos Hamiltonianos, 19
 Grafos isomorfos, 7
 Grafos métricos isomorfos, 28
 Grupo de Torelli, 181
 Grupo modular, 108
 Homología de grafo, 88
 Integración en grafos, 89
 Isomorfismo de grafos, 7
 Isomorfismo de grafos métricos, 28
 Jacobiana de superficies de Riemann discretas, 171
 Longitud de caminos en grafos, 27
 Métricas discretas, 27
 Mapas, 10
 Matrix de adyacencia, 8
 Matrix de adyacencia de grafo dirigido, 13
 Matrix de valencia, 8
 Matrix de adyacencia métrica de grado k , 28
 Matrix de Periodos, 169
 Matrix de valencia métrica de grado k , 28
 Multigrafo, 3
 Multigrafo de Bruijn, 14
 Número de intersección discreto, 164
 Operador de Laplace discreto, 29
 Operador derivación, 89
 Operador discreto de Laplace, 33, 136
 Operadores cofrontera, 94
 Operadores frontera, 92
 PL-funciones, 189
 Polinomios discretos, 126
 Polos de diferenciales meromorfas discretas, 135
 Primer grupo de cohomología, 95
 Primer grupo de homología, 93
 Problema de Schottky, 183
 Problema de Torelli, 183
 Problema discreto de Dirichlet, 37
 Problema discreto de Neumann, 39
 Problemas NP, 24
 Representación de grafos, 9
 Residuos, 136
 Subdivisión de un grafo, 11
 Subgrafos, 4
 Superficies de Riemann discretas conformemente equivalentes, 109
 Superficies de Riemann discretas conformemente equivalentes marcadas, 105
 Superficies de Riemann discretas equivalentes, 109
 Teorema de Cauchy discreto, 116
 Transformación modular, 108
 Vértice de un grafo, 3
 Vértices vecinos, 3
 Variedad de Nehari, 50



Rubén A. Hidalgo es actualmente profesor del Departamento de Matemática y Estadística de la Universidad de La Frontera. Es miembro del *Grupo de Geometría Compleja de Chile*, y su principal interés es el estudio de superficies de Riemann y grupos Kleinianos. Obtuvo su Ph.D. en Matemáticas el año 1991 en la State University of New York (SUNY) at Stony Brook, NY, USA, y su Habilitación en el año 1994 en la Universität Bielefeld, Bielefeld, Alemania.



ISBN XXXXXXXXXXXX