



**UTFSM**  
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

---

***TRANSFORMACIONES  
DE  
MÖBIUS  
Una Introducción***

Rubén A. Hidalgo

---

**Departamento de Matemática  
Universidad Técnica Federico Santa María**

---



**Rubén A. Hidalgo**

---

**TRANSFORMACIONES DE  
MÖBIUS:  
UNA INTRODUCCIÓN**

**PRIMERA EDICIÓN 2012**

---

*Rubén A. Hidalgo*

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María,  
Valparaíso, Chile.

*E-mail* : `ruben.hidalgo@usm.cl`

*Url* : `http://docencia.mat.utfsm.cl/~rhidalgo`

---

***Clasificación matemática por tema (2000).*** — 30F40.

***Palabras claves.*** — Transformaciones de Möbius, Grupos Kleinianos, Superficies de Riemann, Variedades hiperbólicas, Espacio hiperbólico.

---

Primera Edición 2012

ISBN XXXXXXXX

Este libro fué patrocinado por los proyectos Fondecyt 1030252, Fondecyt 1070271, UTFSM 12.05.21, UTFSM 12.08.01 y un sabático otorgado por la Universidad Técnica Federico Santa María durante el periodo 2006.

**TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS:  
UNA INTRODUCCIÓN**

PRIMERA EDICIÓN 2012

**Rubén A. Hidalgo**



A Betty, Cata y Puckn





## INTRODUCCIÓN

Cuando se me solicitó dictar en uno de los *Encuentros de Matemática de la zona sur*, pensé así en escribir unas notas sobre las transformaciones de Möbius en la esfera de Riemann, dando vida así a una primera aproximación del primer capítulo. Una vez terminada una primera versión de esta parte, me pareció natural empezar a escribir la versión multidimensional, dando así vida a los demás capítulos. Por supuesto, quedan muchos tópicos que no hemos incluido, pero esperamos que estas permitan una primera incursión en el tema de transformaciones de Möbius, grupos Kleinianos y variedades hiperbólicas. Existen en la actualidad una enorme cantidad de literatura en el tópico, la mayoría de ellas en inglés. El propósito de estas notas es poder entregar al mundo de habla hispana algunas nociones sobre transformaciones de Möbius y sus uniformizaciones en nuestro idioma, el Castellano.

En su programa de Erlangen (1872), Felix Klein observó que la geometría es el estudio de las propiedades de un espacio que quedan invariables bajo un grupo de transformaciones de tal espacio. Del teorema de geometrización de Poincaré y Koebe, las geometrías más importantes son la esférica, la Euclidiana y la hiperbólica. Todas ellas son casos particulares de geometría conformal, es decir, donde el espacio es la esfera unitaria  $n$ -dimensional  $S^n$  y el grupo de transformaciones es dado por el grupo de Möbius  $\mathbb{M}^n$ . Es importante observar que no es posible dotar a  $S^n$  de una métrica Riemanniana de manera que  $\mathbb{M}^n$  actúe como grupo de isometrías. Uno puede ver geometría conformal como un borde al infinito de la geometría hiperbólica.

La idea principal de este libro es mostrar algunas de las propiedades básicas que tienen las transformaciones (extendidas) de Möbius, tanto en el caso planar como en el espacial. Por ejemplo, una transformación (extendida) de Möbius  $n$ -dimensional resulta ser un automorfismo conformal (anticonformal) de la esfera  $S^n$  y viceversa. A continuación estudiamos algunos modelos del espacio hiperbólico, con énfasis en el caso planar y de dimensión tres, y sus grupos de isometrías, las cuales resultan ser exactamente aquellas transformaciones de Möbius que dejan invariante el modelo escogido. En particular, estudiamos los grupos Fuchsianos, que son los grupos discretos de transformaciones de Möbius que actúan como grupos de isometrías del plano hiperbólico (en algún modelo escogido).

El espacio hiperbólico  $n$ -dimensional tiene como borde conformal la esfera  $(n - 1)$ -dimensional. Así, por la extensión de Poincaré y el teorema de Liouville, podemos ver que las isometrías del espacio hiperbólico  $n$ -dimensional resultan ser extensiones naturales de los homeomorfismos conformales y anticonformales de la esfera  $(n - 1)$ -dimensional. De esta manera, en el caso particular  $n = 3$  vemos una hermandad entre la geometría hiperbólica 3-dimensional y el análisis complejo en una variable. Estudiamos en poco detalle variedades y orbifolds hiperbólicos 3-dimensionales, dando algunas construcciones concretas que permitan ver de manera más clara estas.

Otro tópico al cual dedicamos algunos capítulos es respecto a las uniformizaciones por grupos de Schottky, que resultan ser los cubrimientos planares más cercanos a las superficies de Riemann cerradas. Nos concentramos en las relaciones entre estas uniformizaciones, grupos de automorfismos de las superficies uniformizadas y sus matrices de periodos de Riemann. Se analizan uniformizaciones por grupos de Schottky de superficies de Riemann reales, es decir, superficies de Riemann admitiendo un automorfismo anticonformal de orden dos con puntos fijos (usualmente llamada una reflexión o una simetría).

Esta monografía sólo es una pequeña introducción al tema y hay variados temas que no son tratados, pero que el lector interesado podrá encontrar en la bibliografía dada y en la bibliografía de aquellos.

Quiero, en primer lugar, dar mis primeros agradecimientos a Betty, Cata y Pucky, a quienes quite tiempo de dedicación para escribir esta monografía, por su comprensión durante ese tiempo. Mis agradecimientos a Maximiliano Leyton, Mauricio Godoy, Alexander Vasiliev, Mariela Carvacho, Pedro Montero, Maria Elisa Valdés y Pilar Johnson, quienes leyeron parte de estas notas y me indicaron varios errores que fueron corregidos. Los que restan (que aún son muchos) son de mi responsabilidad y espero que los lectores me hagan llegar sus comentarios, por lo cual les estaré profundamente agradecido y así producir una segunda versión con menor cantidad errores que esta. No puedo dejar de agradecer al *Grupo de Geometría Compleja de Chile* por sus contantes y enriquecedoras discusiones, en particular mis agradecimientos a Víctor González y Rubí Rodríguez quienes guiaron mis primeros pasos en el área de las superficies de Riemann. Por último, mis agradecimientos a mi tutor de doctorado y querido amigo Bernard Maskit de quien aprendí sobre los grupos Kleinianos y quien ha sido durante los últimos años co-autor en varios trabajos relacionados a extensiones de grupos de Schottky por transformaciones extendidas de Möbius.

## TABLA DE MATERIAS

<b>Introducción</b> .....	ix
<b>1. Transformaciones de Möbius Planares</b> .....	1
1.1. Superficies de Riemann.....	1
1.2. Superficies de Klein.....	3
1.3. Funciones holomorfas, anti-holomorfas y di-analíticas : Automorfismos	5
1.4. Teorema de uniformización de Koebe.....	6
1.5. Transformaciones (extendidas) de Möbius.....	7
1.6. El lema de Schwarz.....	10
1.7. Orbifolds de Riemann.....	12
1.8. Razón cruzada.....	13
1.9. Círculos generalizados.....	15
1.10. Puntos fijos.....	15
1.11. Clasificación de transformaciones de Möbius.....	16
1.12. Clasificación de transformaciones extendidas de Möbius.....	18
1.13. Reflexiones.....	19
1.14. Distorsión de áreas.....	20
1.15. Círculos isométricos.....	21
1.16. Proyección estereográfica.....	23
<b>2. El Plano Hiperbólico</b> .....	25
2.1. Algunos modelos del plano hiperbólico.....	25
2.2. Forma infinitesimal de la métrica hiperbólica.....	30
2.3. Area de polígonos hiperbólicos.....	32
2.4. Círculos hiperbólicos.....	34
2.5. Trigonometría hiperbólica.....	36
<b>3. Transformaciones de Möbius n-Dimensionales</b> .....	39
3.1. La proyección estereográfica.....	39
3.2. Transformaciones (extendidas) de Möbius $n$ -dimensionales.....	40
3.3. Clasificación de las transformaciones de Möbius.....	42
3.4. Extensión de Poincaré.....	43
3.5. Esferas isométricas.....	45
3.6. Distorsión del volumen.....	46

3.7. Razón cruzada en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ .....	46
<b>4. El Espacio Hiperbólico</b> .....	49
4.1. Métricas hiperbólicas .....	49
4.2. Forma infinitesimal .....	52
4.3. El espacio hiperbólico 3-dimensional $\mathbb{H}^3$ .....	53
4.4. Norma de elementos de $Aut(\mathbb{H}^3)$ .....	54
4.5. Volumen hiperbólico 3-dimensional .....	54
4.6. La función de Lobachevskii .....	55
<b>5. Grupos Discontinuos, Variedades y Orbifolds</b> .....	57
5.1. Grupos discretos .....	57
5.2. Grupos discontinuos y propiamente discontinuos .....	58
5.3. Cocientes por grupos discontinuos .....	65
5.4. Variedades $n$ -dimensionales .....	67
5.5. Orbifolds .....	69
<b>6. Grupos Kleinianos y Discretos en <math>\widehat{\mathbb{M}}^n</math></b> .....	71
6.1. Grupos Kleinianos .....	71
6.2. Algunos ejemplos de grupos Kleinianos .....	72
6.3. Grupos Kleinianos y sus estabilizadores .....	75
6.4. Cocientes de grupos Kleinianos son Hausdorff .....	77
6.5. Dominios fundamentales .....	79
6.6. Grupos discretos en $\widehat{\mathbb{M}}^n$ .....	80
6.7. Grupos discretos versus grupos Kleinianos .....	82
<b>7. Propiedades de Grupos Discretos</b> .....	85
7.1. Loxodrómicos en grupos discretos .....	85
7.2. Radios de esferas isométricas .....	86
7.3. Grupos discretos en $\widehat{\mathbb{M}}^n$ son convergentes .....	87
7.4. Grupos finitos .....	88
7.5. Grupos elementales y no-elementales .....	88
7.6. Puntos límites son puntos límites de órbitas .....	91
7.7. Existencia de loxodrómicos .....	92
7.8. Subgrupos de índice finito .....	96
7.9. Subconjuntos cerrados invariantes .....	96
7.10. Subgrupos normales .....	97
7.11. Aplicación : $Aut(M)$ es finito para $M$ variedad hiperbólica de volumen finito .....	100
7.12. Teorema de rigidez de Mostow .....	100
7.13. Lema de Selberg .....	101
7.14. Lema de Margulis .....	105
<b>8. Propiedades de Grupos Discretos Planares</b> .....	107
8.1. Lema de Shimizu-Leutbecher .....	107
8.2. Una serie de Poincaré .....	109
8.3. Componentes de $\Omega(G)$ .....	110
8.4. Una desigualdad importante .....	111
8.5. Desigualdad de Jørgensen .....	112

8.6. Lema de Margulis : Caso $n=3$ . . . . .	115
8.7. Convergencia algebraica . . . . .	116
8.8. Teoremas de combinación . . . . .	117
8.9. Teorema de la finitud de Ahlfors . . . . .	120
<b>9. Grupos Fuchsianos : Superficies de Riemann</b> . . . . .	123
9.1. Grupos Fuchsianos . . . . .	123
9.2. Polígonos fundamentales : dominios de Dirichlet . . . . .	124
9.3. Teoremas de isomorfía . . . . .	127
9.4. Teorema del polígono de Poincaré . . . . .	129
9.5. Cubrimientos finitos ramificados . . . . .	133
9.6. Lema del collar . . . . .	136
9.7. Producto Fibrado . . . . .	137
9.8. Superficies de Riemann Hiperelípticas . . . . .	141
<b>10. Grupos Hiperbólicos 3-dimensionales</b> . . . . .	145
10.1. Grupos Hiperbólicos . . . . .	145
10.2. Grupos hiperbólicos sin torsión . . . . .	145
10.3. Grupos hiperbólicos con torsión . . . . .	150
10.4. Teorema del polihedro de Poincaré . . . . .	151
10.5. Teorema de Poincaré : un par de ejemplos . . . . .	154
10.6. Complemento de nudos . . . . .	156
10.7. Fibrados sobre $S^1$ . . . . .	157
10.8. Género uno y un borde . . . . .	162
10.9. Caso de superficies cerradas . . . . .	163
10.10. Picarones pegados := Handlebodies . . . . .	166
<b>11. Cubrimientos Homológicos</b> . . . . .	167
11.1. Jacobianas y matrices de Riemann . . . . .	167
11.2. Variedades de Prym . . . . .	169
11.3. Automorfismos de superficies de Riemann y Jacobianas . . . . .	174
11.4. Superficies de Klein y Jacobianas . . . . .	176
11.5. Cubrimiento homológico de superficies de Klein . . . . .	179
<b>12. Grupos de Schottky Planares</b> . . . . .	185
12.1. Cubrimientos regulares planares . . . . .	185
12.2. Grupos de Schottky (planares) . . . . .	186
12.3. Grupos Schottky-Admisibles . . . . .	190
12.4. Grupos de Schottky y Automorfismos . . . . .	192
12.5. Grupos de Schottky reales . . . . .	195
12.6. Representaciones simplécticas de grupos de tipo Schottky . . . . .	196
12.7. Grupos de Schottky reales y representaciones simplécticas . . . . .	200
<b>13. Superficies de Riemann Maximal Simétricas</b> . . . . .	203
13.1. Superficies maximales simétricas . . . . .	203
13.2. Uniformizaciones de $S/K(S, \tau)$ . . . . .	204
13.3. Superficies maximales simétricas de género 2 . . . . .	206
13.4. Superficies maximales simétricas de género 3 . . . . .	213
13.5. Superficies de Riemann maximal simétricas de género 5 . . . . .	219

<b>Referencias</b> .....	229
<b>Indice</b> .....	235

# CAPÍTULO 1

## TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS PLANARES

En un primer curso de variable compleja estudiamos las funciones holomorfas (analíticas) definidas en algún conjunto abierto del plano complejo  $\mathbb{C}$ . Cuando empezamos a estudiar funciones meromorfas, vemos que no hay gran diferencia entre estas y las funciones holomorfas. Esto queda muy claro cuando compactificamos el plano complejo adicionando un punto al infinito  $\infty$  para obtener la esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Así vemos que una función meromorfa  $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , donde  $\Omega$  es algún abierto del plano complejo, es lo mismo que una función holomorfa  $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ . Para clarificar aún más esto, procedemos a definir lo que son las **superficies de Riemann**. Recomendamos el libro de Farkas y Kra [21] como una muy buena referencia en el tema de superficies de Riemann.

### 1.1. Superficies de Riemann

**Definición 1.1.1.** — Una **superficie de Riemann**  $S$  es un espacio topológico Hausdorff y segundo numerable junto con una colección maximal

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, z_\alpha) : \alpha \in I\}$$

satisfaciendo las siguientes propiedades :

1. each  $U_\alpha$  es un abierto de  $S$ ;
2.  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = S$ ;
3. each  $z_\alpha$  es un homeomorfismo entre  $U_\alpha$  y un abierto del plano complejo  $\mathbb{C}$ ;
4. si  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , entonces

$$z_\beta \circ z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es un biholomorfismo.

En este caso,  $\mathcal{A}$  es llamado la **estructura de superficie de Riemann** y cada  $z_\alpha$  es llamada una **carta local** de tal estructura.

**Observación 1.1.2.** — 1. En la definición anterior no pedimos que la superficie sea conexa, aunque en algunos textos se pide la conectividad. En caso de ser necesario hablaremos de una superficie de Riemann conexa.

2. En la definición anterior, podemos eliminar la condición de maximalidad de  $\mathcal{A}$ ; en cuyo caso es llamado una atlas de la estructura de superficie de Riemann. El Lema de Zorn nos asegura que todo atlas determina una estructura de superficie de Riemann.

**Ejemplo 1.1.3.** — Ejemplos simples de superficies de Riemann son los abiertos del plano complejo, en particular, el mismo plano complejo es una superficie de Riemann.

**Ejemplo 1.1.4.** — Otro ejemplo es la esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$  considerando las dos siguientes coordenadas locales

$$\left\{ z_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z, \quad z_2 : \widehat{\mathbb{C}} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{z} \right\}$$

**Ejemplo 1.1.5.** — Otros ejemplos, los **toros**, pueden ser obtenidos de la siguiente manera. Por cada  $\tau \in \mathbb{C}$ , con parte imaginaria positiva  $\text{Im}(\tau) > 0$ , podemos definir la siguiente relación de equivalencia en  $\mathbb{C}$ :

$$z, w \in \mathbb{C} \text{ son equivalentes si existen enteros } n, m \text{ de manera que} \\ w = z + n + m\tau$$

El conjunto de las clases de equivalencia  $T_\tau$  resulta ser una superficie de Riemann que es topológicamente equivalente al toro  $S^1 \times S^1$ .

**Definición 1.1.6.** — Una superficie de Riemann que es homeomorfa a la suma conexa de  $g$  copias de toros es llamada una **superficie de Riemann de género  $g$** . Una **superficie de Riemann de género 0** es una que sea homeomorfa a la esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

**Ejemplo 1.1.7.** — Consideremos una función holomorfa

$$F : V \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} : (z, w) \mapsto F(z, w) = u,$$

donde  $V$  es un abierto de  $\mathbb{C}^2$ . Si tenemos que  $u_0 \in F(V)$  es un valor regular, es decir, el gradiente de  $F$  no se anula en puntos de  $S = F^{-1}(u_0)$ , entonces el teorema de la función implícita nos dice que  $S$  es una superficie de Riemann. De manera similar, si tenemos una función holomorfa no-constante (luego algebraica)

$$F : \mathbb{C}P_2 \rightarrow \mathbb{C}P_1,$$



y  $p$  un valor regular de  $F$ , entonces  $S = F^{-1}(p)$  es una superficie de Riemann compacta.

**Ejercicio 1.** — Verificar los detalles de los ejemplos anteriores.

**Definición 1.1.8.** — Sea  $S$  una superficie de Riemann de género  $g$  con  $k$  puntos removidos. Decimos que  $S$  es una superficie de Riemann **analíticamente finita** de **signatura**  $(g, k)$ . Denotemos por  $\bar{S}$  la superficie de Riemann compacta obtenida de  $S$  a colocar de vuelta los puntos removidos.

PROBLEMAS. —

- 1.- Verifique que efectivamente los toros definidos en el ejemplo 1.1.5 son superficies de Riemann. Determine cuando dos de esos toros son holomórficamente equivalentes.
- 2.- Verificar que toda superficie de Riemann es orientada.
- 3.- Verifique que si  $S$  es una superficie de Riemann de género  $g$ , entonces no es posible incrustarla holomórficamente dentro de algún  $\mathbb{C}^n$ .
- 4.- Considere en el espacio proyectivo  $\mathbb{C}P_n$ ,  $n \geq 2$ , el conjunto  $S_{n,k}$  de los ceros comunes del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^k + x_2^k + x_3^k = 0 \\ a_1 x_1^k + x_2^k + x_4^k = 0 \\ a_2 x_1^k + x_2^k + x_5^k = 0 \\ \vdots \\ a_{n-2} x_1^k + x_2^k + x_{n+1}^k = 0 \end{array} \right.$$

donde  $k \in \{2, 3, 4, \dots\}$ ,  $a_1, \dots, a_{n-2} \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$  son dos a dos diferentes. Verifique que  $S_{n,k}$  es una superficie de Riemann cerrada. Calcule su género.

## 1.2. Superficies de Klein

**Definición 1.2.1.** — Una **superficie de Klein**  $S$  es un espacio topológico Hausdorff y segundo numerable junto con una colección maximal

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, z_\alpha) : \alpha \in I\}$$

satisfaciendo las siguientes propiedades :

1. each  $U_\alpha$  es un abierto de  $S$  ;
2.  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = S$  ;
3. each  $z_\alpha$  es un homeomorfismo entre  $U_\alpha$  y un abierto del plano complejo  $\mathbb{C}$  ;

4. si  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , entonces

$$z_\beta \circ z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es un biholomorfismo o un anti-biholomorfismo.

En este caso,  $\mathcal{A}$  es llamado la **estructura de superficie de Klein** y cada  $z_\alpha$  es llamada una **carta local** de tal estructura.

**Observación 1.2.2.** — 1. Como en el caso de superficies de Riemann, en la definición anterior no pedimos que la superficie sea conexa, aunque en algunos textos se pide la conectividad. En caso de ser necesario hablaremos de una superficie de Klein conexa.

2. Podemos eliminar la condición de maximalidad de  $\mathcal{A}$ ; en cuyo caso es llamado una atlas de la estructura de superficie de Kleini. El Lema de Zorn nos asegura que todo atlas determina una estructura de superficie de Klein.

**Ejemplo 1.2.3.** — De la definición podemos ver que toda superficie de Riemann es un caso particular de una superficie de Klein. Un par de ejemplos simples de una superficie de Klein son dadas por el plano proyectivo  $\mathbb{P}\mathbb{R}_2 = \widehat{\mathbb{C}}/H$  y la botella de Klein  $\mathbb{K} = \mathbb{C}/G$ , donde  $H$  es el grupo generado por la involución  $\tau(z) = -1/\bar{z}$  y  $G$  es el grupo generado por la traslación  $A(z) = z + i$  y la pseudo-traslación  $B(z) = \bar{z} + 1$ . Más ejemplos serán vistos más adelante cuando definamos grupos (extendidos) Kleinianos.

**Definición 1.2.4.** — Una superficie de Klein que es homeomorfa a la suma conexa de  $g$  copias de planos proyectivos es llamada una **superficie de Klein no orientable de género  $g$** .

**Observación 1.2.5.** — Note que toda superficie de Riemann es una superficie diferenciable real orientada. Una superficie de Klein que no es una superficie de Riemann es una superficie diferenciable real no-orientada. Por supuesto, toda superficie de Klein (que no sea de Riemann) puede ser ó no orientable. Los dos ejemplos dados en ejemplo 1.2.3 son no-orientables, pero la superficie de Klein dada por la esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$  con las siguientes dos coordenadas locales

$$\begin{cases} z_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \bar{z} \\ z_2 : \widehat{\mathbb{C}} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{z} \end{cases}$$

resulta ser orientable, pero no orientada.

**Definición 1.2.6.** — Sea  $S$  una superficie de Klein de género  $g$  con  $k$  puntos removidos. Decimos que  $S$  es una superficie de Klein **analíticamente finita** de **signatura**  $(g, \pm, k)$ , donde el signo es  $+$  si  $S$  es una superficie de Riemann ó  $-$  si no lo es. Denotemos por  $\bar{S}$  la superficie de Klein compacta obtenida de  $S$  a colocar de vuelta los puntos removidos.

PROBLEMAS. —

- 1.- Verificar que toda superficie de Riemann es una superficie de Klein.
- 2.- Dar ejemplos de superficies de Klein orientables y no orientables.
- 3.- Verificar que toda superficie de Klein orientable tiene una estructura de superficie de Riemann.

### 1.3. Funciones holomorfas, anti-holomorfas y di-analíticas : Automorfismos

Ahora que tenemos las superficies de Riemann y de Klein, necesitamos funciones entre ellas que sean compatibles con sus estructuras de superficies de Riemann ó Klein. Estas son las **funciones holomorfas**, las **funciones antiholomorfas** y las **funciones di-analíticas**.

**Definición 1.3.1.** — Sea  $f : S \rightarrow R$  una función entre dos superficies de Riemann. Diremos que esta es holomorfa (respectivamente, anti-holomorfa) si para cada punto  $p \in S$  es posible encontrar coordenadas locales  $z : U \rightarrow V$  para  $S$  y  $w : W \rightarrow Z$  para  $R$  tales que  $p \in U$ ,  $f(U) \subset W$  y  $w \circ f \circ z^{-1} : V \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sea holomorfa (respectivamente, anti-holomorfa) en el sentido usual. En el caso que  $f : S \rightarrow R$  es biyección holomorfa (respectivamente, anti-holomorfa), entonces decimos que esta es un **biholomorfismo** (respectivamente, **anti-biholomorfismo**) y que las superficies de Riemann  $S$  y  $R$  son **biholomorfas** ó bien que son **holomórficamente equivalentes** (respectivamente, **anti-biholomorfas**). Cuando  $S = R$  y  $f : S \rightarrow S$  es un biholomorfismo (respectivamente, anti-biholomorfismo), diremos que  $f$  es un automorfismo holomorfo (respectivamente, anti-holomorfo) de  $S$ . Denotamos por  $Aut_+(S)$  (respectivamente,  $Aut(S)$ ) al grupo (con la regla de composición) de todos los automorfismos holomorfos (respectivamente, holomorfos y anti-holomorfos) de  $S$ .

**Observación 1.3.2.** — Cuando  $S$  y  $R$  son abiertos del plano complejo, esta definición coincide con la usual. Además, cuando  $S$  es un abierto del plano complejo,  $R = \widehat{\mathbb{C}}$  y  $f : S \rightarrow R$  es holomorfa en la definición anterior, obtenemos la definición usual de una función meromorfa.

**Definición 1.3.3.** — Sea  $f : S \rightarrow R$  una función entre dos superficies de Klein. Diremos que esta es di-analítica si para cada punto  $p \in S$  es posible encontrar

coordenadas locales  $z : U \rightarrow V$  para  $S$  y  $w : W \rightarrow Z$  para  $R$  tales que  $p \in U$ ,  $f(U) \subset W$  y  $w \circ f \circ z^{-1} : V \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sea holomorfa ó anti-holomorfa en el sentido usual. En el caso que  $f : S \rightarrow R$  es biyección di-analítica, entonces decimos que que las superficies de Klein  $S$  y  $R$  son **superficies de Klein di-analíticamente equivalentes**. Cuando  $S = R$  y  $f : S \rightarrow S$  es un biyección di-analítica, diremos que  $f$  es un automorfismo di-analítico de  $S$ . Denotamos por  $Aut(S)$  al grupo (con la regla de composición) de todos los automorfismos di-analíticos de  $S$ .

PROBLEMAS. —

- 1.- Sea  $R$  una superficie de Klein no-orientable. Verificar que existe una superficie de Riemann  $S$  admitiendo un automorfismo anti-holomorfo  $\tau : S \rightarrow S$  actuando sin puntos fijos, de manera que  $R = S/\langle\tau\rangle$ .
- 2.- Sean  $R$ ,  $S$  y  $\tau$  como en Problema 1.-. Verificar que el grupo de automorfismos di-analíticos de  $R$  es naturalmente isomorfo al grupo de automorfismos holomorfos y antiholomorfos de  $S$  que conmutan con  $\tau$ . En particular, verificar que es isomorfo al grupo de automorfismos holomorfos de  $S$  que conmuta con  $\tau$ .
- 3.- Sea  $R$  una superficie de Klein orientable. ¿Puede usted construir una superficie de Riemann  $S$  con un automorfismo anti-holomorfo  $\tau$  tal que  $R = S/\langle\tau\rangle$ ?
- 4.- Verificar que si  $S$  es una superficie de Riemann (respectivamente, una superficie de Klein), entonces  $Aut(S)$  es en efecto un grupo con la regla de composición de funciones.
- 5.- Verificar que la relación de ser “biholomórficamente equivalentes” es una relación de equivalencia. Lo mismo para la relación de ser “di-analíticamente equivalentes”.
- 6.- Verificar la observación 1.3.2

#### 1.4. Teorema de uniformización de Koebe

Dada una superficie de Klein  $X$ , no-orientable, entonces podemos considerar su doble cobertor orientable  $P : S \rightarrow X$ . En este caso,  $S$  es una superficie de Riemann admitiendo una automorfismo antiholomorfo de orden dos  $\tau : S \rightarrow S$ , actuando sin puntos fijos, tal que  $\langle\tau\rangle$  es el grupo cobertor de  $P$ . Luego, el estudio de superficies de Klein no-orientables puede ser interpretado como el estudio de superficies de Riemann admitiendo automorfismos de orden dos antiholomorfos.

Sea  $S$  una superficie de Riemann. Uno puede considerar su cobertor universal  $\widehat{S}$  y un cubrimiento universal  $Q : \widehat{S} \rightarrow S$ . Podemos levantar la estructura de superficie de Riemann de  $S$  por  $Q$  para dotar a  $\widehat{S}$  de una estructura de superficie de

Riemann simplemente conexa. El cubrimiento  $Q : \widehat{S} \rightarrow S$  queda un cubrimiento universal holomorfo y el grupo cobertor  $G \cong \pi_1(S, p)$  un grupo de automorfismos holomorfos de  $\widehat{S}$  actuando de manera discontinua y sin puntos fijos.

**Teorema 1.4.1 ( Teorema de uniformización de Koebe [21])**

*Toda superficie de Riemann simplemente conexa es holomórficamente equivalente a una y sólo una de las siguientes tres :*

- (i)  $\mathbb{C}$ ;
- (ii)  $\widehat{\mathbb{C}}$ ;
- (iii)  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ .

Podemos, por el teorema de uniformización, suponer que  $\widehat{S}$  es una de esas tres posibilidades.

**Caso 1 :** Si  $\widehat{S} = \widehat{\mathbb{C}}$ , entonces la única manera que  $G$  actúe sin puntos fijos es que  $G = \{I\}$ . En este caso,  $S$  es la esfera de Riemann.

**Caso 2 :** Si  $\widehat{S} = \mathbb{C}$ , entonces la única manera que  $G$  actúe sin puntos fijos y de manera discontinua es que sea uno de los siguientes dos formas, módulo conjugación :

- (a)  $G = \langle A(z) = z + 1 \rangle$ ; ó
- (b)  $G = \langle A(z) = z + 1, B(z) = z + \tau \rangle$ , donde  $\tau \in \mathbb{H}$ .

En el primer caso,  $S$  es holomórficamente equivalente a  $\mathbb{C} - \{0\}$  y en el segundo caso,  $S$  es un toro (homeomorfo a  $S^1 \times S^1$ , donde  $S^1$  es el círculo unitario).

**Caso 3 :** Todas las otras superficies de Riemann tienen al plano  $\mathbb{H}$  como cobertor universal. Estas superficies son llamadas **superficies de Riemann hiperbólicas**.

PROBLEMAS. —

- 1.- Usando el teorema de uniformización, verifique que toda superficie de Klein simplemente conexa posee una estructura de superficie de Riemann simplemente conexa.
- 2.- Sea  $S$  una superficie de Riemann hiperbólica y  $\Gamma < \text{Aut}(\mathbb{H}^2)$  tal que  $\mathbb{H}^2/\Gamma = S$ . Verifique que existe un isomorfismo entre  $\text{Aut}(S)$  y  $N_\Gamma/\Gamma$  y entre  $\text{Aut}_+(S)$  y  $N_\Gamma^+/\Gamma$ , donde  $N_\Gamma$  es el normalizador de  $\Gamma$  dentro de  $\text{Aut}(\mathbb{H}^2)$  y  $N_\Gamma^+$  es su subgrupo que preserva orientación.

### 1.5. Transformaciones (extendidas) de Möbius

Una muy buena referencia en el tópico de las transformaciones (extendidas) de Möbius es el libro de B. Maskit [56]. Otro muy buen libro para consultar sobre todo lo que escribiremos de ahora en adelante es [61].

**Definición 1.5.1.** — Consideremos una matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}),$$

entonces :

- (a) Una **transformación de Möbius** es una función de la esfera de Riemann de la forma

$$t(z) = \frac{az + b}{cz + d};$$

- (b) Una **transformación extendida de Möbius** es una función de la esfera de Riemann de la forma

$$t(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}.$$

**Definición 1.5.2.** — Denotaremos por  $\mathbb{M}^2$  al grupo de las transformaciones de Möbius y por  $\widehat{\mathbb{M}}^2$  al grupo generado por  $\mathbb{M}^2$  y las transformaciones extendidas de Möbius.

### 1.5.1. Automorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$ . —

**Teorema 1.5.3.** — *Los automorfismos holomorfos (respectivamente, anti-holomorfos) de la esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$  son las transformaciones de Möbius (respectivamente, las transformaciones extendidas de Möbius).*

*Demonstración.* — Observemos que cada transformación de Möbius es de hecho un automorfismo holomorfo de la esfera de Riemann. Luego, si  $t$  es un automorfismo holomorfo de  $\widehat{\mathbb{C}}$ , entonces podemos componer a la izquierda por una transformación de Möbius para suponer que  $t$  fija 0 y  $\infty$ . Ahora miramos la serie de Taylor de la función entera  $t(z) = a_0 + a_1z + \dots$ . Ya que  $t(0) = 0$ , tenemos que  $a_0 = 0$ . Además, como  $t(\infty) = \infty$ , tenemos que  $w \circ t \circ w^{-1}$  es una función entera que fija 0, donde  $w(z) = 1/z$ . Luego  $a_2 = a_3 = \dots = 0$ . Así,  $t(z) = a_1z$ , con  $a_1 \neq 0$ . Pero en este caso,  $T$  es en sí una transformación de Möbius, probando la primera parte de la proposición. Para ver la segunda parte, basta ver que la **conjugación**  $J(z) = \bar{z}$  es automorfismo anti-holomorfo de  $\widehat{\mathbb{C}}$  y que la composición de  $J$  con cualquier automorfismo anti-holomorfo será un automorfismo holomorfo, obteniendo así la segunda parte del teorema. □

### 1.5.2. Generadores de $\widehat{\mathbb{M}}^2$ . —

**Teorema 1.5.4.** — *Toda transformación de Möbius, diferente de la identidad, es composición de las siguientes :*

- (i)  $z \mapsto z + a$ ,  $a \in \mathbb{C} - \{0\}$  (**Traslación**);
- (ii)  $z \mapsto az$ ,  $a > 1$  (**Dilatación**);
- (iii)  $z \mapsto e^{i\theta}z$  (**Rotación**);
- (iv)  $z \mapsto 1/z$  (**Inversión**).

Toda transformación extendida de Möbius es composición de las anteriores y la conjugación

$$J(z) = \bar{z}.$$

*Demonstración.* — Sea

$$t(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Si tenemos  $c = 0$ , entonces tenemos que  $t(z) = t_1 \circ t_2 \circ t_3(z)$ , donde

$$\begin{cases} t_3(z) &= \frac{ad^{-1}}{|ad^{-1}|}z \\ t_2(z) &= |ad^{-1}|z \\ t_1(z) &= z + bd^{-1} \end{cases}$$

Supongamos ahora que  $c \neq 0$ . En este caso tenemos

$$t(z) = \frac{-1}{|c|^2} \left( \frac{|c|}{c} \right)^2 \frac{1}{z + d/c} + \frac{a}{c}.$$

La aseveración sobre los automorfismos anti-holomorfos es clara ya que estos son composición de una transformación de Möbius con  $J(z) = \bar{z}$ .

□

### 1.5.3. Conformalidad y preservación de ángulos Euclidianos. —

**Teorema 1.5.5.** — *Toda transformación de Möbius es conformal, es decir, preserva ángulos y orientación. Toda transformación anti-holomorfa es anti-conformal, es decir, preserva ángulos pero invierte la orientación.*

*Demonstración.* — Las traslaciones, dilataciones, rotaciones preservan tanto la orientación como los ángulos. La inversión  $z \mapsto 1/z$  corresponde a una rotación en la esfera (con eje uniendo los puntos  $i$  y  $-i$ ), luego preserva la orientación y los ángulos. La conjugación  $J(z) = \bar{z}$  preserva los ángulos, pero invierte la orientación. Así, la demostración se obtiene como consecuencia del teorema 1.5.4

□

PROBLEMAS. —

- 1.- Ver que cada transformación de Möbius tiene al menos un punto fijo y a lo más dos en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .
- 2.- Ver que existen transformaciones extendidas de Möbius que no tienen puntos fijos.
- 3.- Sean  $f, g \in \mathbb{M}^2$  dos transformaciones de Möbius, ambas diferentes de la identidad. Verificar que  $f \circ g = g \circ f$  sí y sólo si vale alguna de las dos siguientes :
  - (i)  $f$  y  $g$  tienen los mismos puntos fijos ; ó bien
  - (ii)  $f^2 = g^2 = I$  y cada una intercambia los puntos fijos de la otra.

4.- Consideremos una transformación de Möbius

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  son tales que  $ad - bc = 1$ . Entonces existe  $t \in \widehat{\mathbb{M}}^2 - \mathbb{M}^2$  tal que  $t^2 = f$  sí y sólo si  $(a + d) \in \mathbb{R}$ . En este caso verifique que existen infinitas  $t$  para tal  $f$ .

5.- Sea  $f$  una transformación de Möbius. Supongamos que  $z, w, f(z), f(w) \notin \{\infty\}$ . verifique la igualdad

$$(f(z) - f(w))^2 = f'(z)f'(w)(z - w)^2$$

6.- Verificar que el grupo de automorfismos holomorfos y antiholomorfos de la esfera de Riemann es dado por el grupo extendido de Möbius  $\widehat{\mathbb{M}}^2$ .

7.- Verificar que todo automorfismo holomorfo (respectivamente, antiholomorfo) del plano complejo  $\mathbb{C}$  se extiende continuamente a un homeomorfismo de la esfera de Riemann de manera que fija el punto  $\infty$ . Concluir que los automorfismos holomorfos (respectivamente, anti-holomorfos) del plano son exáctamente aquellos automorfismos holomorfos (respectivamente, anti-holomorfos) de la esfera de Riemann que fijan  $\infty$ , es decir, de la forma  $t(z) = az + b$  (respectivamente,  $t(z) = a\bar{z} + b$ ), donde  $a, b \in \mathbb{C}$  y  $a \neq 0$ .

8.- Diremos que una métrica  $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$  en un conjunto  $X \neq \emptyset$  es trivial si existe  $a \geq 0$  tal que

$$d(x, y) = \begin{cases} a & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

Verificar que toda métrica en la esfera de Riemann que tenga  $\mathbb{M}^2$  como isometrías debe ser trivial.

## 1.6. El lema de Schwarz

Recordemos el lema de Schwarz, el cual nos permitirá calcular el grupo de automorfismos (holomorfos y anti-holomorfos) del disco unitario

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

**Lema 1.6.1 (Lema de Schwarz).** — Sea  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  una función holomorfa tal que  $f(0) = 0$ , Entonces

$$|f(z)| \leq |z|, \quad \text{para todo } z \in \Delta.$$



Si  $|f(z)| = |z|$  para algún  $z \in \Delta - \{0\}$  ó bien  $|f'(0)| = 1$ , entonces

$$f(z) = e^{i\theta}z, \quad \text{para cierto } \theta \in \mathbb{R}.$$

*Demonstración.* — Ya que  $f(0) = 0$  y  $f$  es holomorfa, entonces la función  $g : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$$

es una función holomorfa.

Si  $r \in (0, 1)$ , entonces tenemos que para todo  $|z| = r$  vale la desigualdad

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} < \frac{1}{r}$$

ya que  $|f(z)| < 1$ . Ahora, por el principio del módulo máximo, tenemos que para  $|z| \leq r$  también vale la desigualdad anterior. Si hacemos tender  $r \mapsto 1$ , entonces tendremos que  $|g(z)| \leq 1$ , para todo  $z \in \Delta$ , obteniendo la primera parte. Por el mismo principio del módulo máximo, tenemos que si  $g$  tiene un punto  $z$  en el interior tal que  $|g(z)| = 1$ , entonces esta debe ser constante igual a un valor de módulo 1.

□

**Corolario 1.6.2.** — *Todo automorfismo holomorfo del disco unitario que fija el origen es de la forma  $f(z) = e^{i\theta}z$ .*

*Demonstración.* — Por el lema de Schwarz tenemos que  $|f(z)| \leq |z|$  para todo  $z \in \Delta$ . Pero también esto es válido para su inversa  $f^{-1}$ , es decir,  $|f^{-1}(z)| \leq |z|$  para todo  $z \in \Delta$ . De aquí vemos que  $|f(z)| = |z|$  para todo  $z \in \Delta$ , luego por el mismo lema de Schwarz tenemos que  $f(z) = e^{-i\theta}z$ .

□

Ahora estamos en condiciones de calcular el grupo de automorfismos del disco unitario  $\Delta$ .

**Teorema 1.6.3.** — *Todo automorfismo holomorfo del disco unitario  $\Delta$  es una transformación de Möbius de la forma siguiente*

$$t(z) = e^{i\theta} \frac{z + a}{1 + \bar{a}z}$$

*Todo automorfismo anti-holomorfo de  $\Delta$  es una transformación extendida de Möbius de la forma*

$$t(z) = e^{i\theta} \frac{\bar{z} + a}{1 + \bar{a}z}$$

*Demonstración.* — Es claro ver que los automorfismos de la proposición son efectivamente automorfismos holomorfos y anti-holomorfos del disco unitario  $\Delta$ . Más aún, con estos automorfismos holomorfos podemos enviar 0 a cualquier punto del disco unitario. Otra observación es que bajo composición estos automorfismos holomorfos mantienen la forma propuesta. Supongamos que  $t$  es un automorfismo holomorfo de  $\Delta$ . Entonces podemos componer a la izquierda por una transformación de Möbius propuesta para suponer que  $t(0) = 0$ . Ahora, del Corolario 1.6 tenemos que  $t(z) = e^{-i\theta}z$ , que es una de las propuestas, probando la primera parte de nuestra proposición. La segunda parte sale del hecho que  $J(z) = \bar{z}$  es automorfismo anti-holomorfo de  $\Delta$ .

□

PROBLEMAS. —

- 1.- Verificar que los automorfismos holomorfos/anti-holomorfos de  $\Delta$  son exáctamente los automorfismos holomorfos/anti-holomorfos de la esfera de Riemann que dejan invariante  $\Delta$ .
- 2.- Calcular el grupo de automorfismos holomorfos y antiholomorfos del semiplano superior

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$$

### 1.7. Orbifolds de Riemann

Anteriormente hemos definido lo que es una superficie de Riemann. Más adelante, cuando miremos grupos Kleinianos, veremos otra estructura aparecer, los **orbifolds de Riemann**, la cual procedemos a definir a continuación de las siguientes observaciones.

Supongamos que tenemos el disco unitario  $\Delta$  y  $G$  es el grupo cíclico finito generado por un automorfismo conformal  $t : \Delta \rightarrow \Delta$ . Tal automorfismo  $t$  debe tener un punto fijo en  $\Delta$ . Módulo conjugación por otro automorfismo conformal de  $\Delta$ , podemos asumir que  $t(0) = 0$ , es decir, podemos asumir que  $t(z) = e^{2\pi i/k}z$ , para cierto  $k \in \{1, 2, \dots\}$ . Tenemos la relación de equivalencia definida por  $t$  en  $\Delta$  de la siguiente manera :

$$p \equiv q \Leftrightarrow \exists 0 \leq n \leq k - 1 : t^n(p) = q$$

Denotemos por  $\Delta/G$  al conjunto de las clases de equivalencia y por  $\pi : \Delta \rightarrow \Delta/G$  a la proyección natural. Dotamos a  $\Delta/G$  de la topología cociente. Entonces tenemos que  $\pi$  resulta ser continua y abierta (ya que  $t$  es función abierta). No es difícil ver que  $\Delta/G$  es topológicamente  $\Delta$ , pero con un punto distinguido : la clase del punto fijo de  $t$ . Uno puede pensar que es un cono con vértice en tal clase. Si  $k = 1$ , entonces  $\pi$  es de hecho un homeomorfismo.

Supongamos ahora que tenemos dos grupos finitos  $G_1$  y  $G_2$  como arriba y consideremos las proyecciones naturales

$$\pi_1 : \Delta \rightarrow \Delta/G_1, \quad \text{y} \quad \pi_2 : \Delta \rightarrow \Delta/G_2.$$

Sea  $V \subset \Delta/G_1$  un abierto y  $f : V \rightarrow \Delta/G_2$  una función. Si es posible encontrar una función  $h : \pi_1^{-1}(V) \rightarrow \Delta$  tal que

$$\pi_2 \circ h = f \circ \pi_1,$$

entonces diremos que  $h$  es un levantamiento de  $f$  y que  $f$  se puede levantar.

**Definición 1.7.1.** — Una orbifold de Riemann  $\mathcal{O}$  es un espacio topológico Hausdorff y segundo numerable tal que para cada punto  $p \in S$  existen :

- (i) un abierto  $U \subset \mathcal{O}$ ,  $p \in U$ ;
- (ii) un grupo cíclico finito  $G_p$ , generado por un automorfismo conformal del disco unitario  $\Delta$ ;
- (iii) un homeomorfismo  $z : U \rightarrow \Delta/G$ ;

de manera que si tenemos dos de estos homeomorfismos, digamos

$$z_1 : U_1 \rightarrow \Delta/G_1 \quad \text{y} \quad z_2 : U_2 \rightarrow \Delta/G_2$$

tales que  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ , entonces

$$z_2 \circ z_1^{-1} : z_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow z_2(U_1 \cap U_2),$$

se puede levantar a una función holomorfa (luego biholomorfa).

**Ejemplo 1.7.2.** — Toda superficie de Riemann es una orbifold de Riemann tomando en la definición  $k = 1$  en cada punto.

PROBLEMAS. —

- 1.- Sea  $G < \mathbb{M}^2$  un grupo finito. Verificar que  $\widehat{\mathbb{C}}/G$  es un orbifold de Riemann.
- 2.- Sea  $G < \mathbb{H}^2$ . ¿Qué condiciones debemos imponer a  $G$  para que exista un subconjunto abierto  $\Omega \subset \widehat{\mathbb{C}}$  que es invariante por la acción de  $G$  y tal que  $\Omega/G$  sea un orbifold de Riemann?

## 1.8. Razón cruzada

**Definición 1.8.1.** — La **razón cruzada** de cuatro puntos  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ , tales que  $z_1 \neq z_2$  y  $z_3 \neq z_4$  es definida como

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] := \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4}.$$

Observemos que la transformación de Möbius

$$t(z) = [z, z_2; z_3, z_4],$$

es la única que satisface :  $t(z_3) = 0$ ,  $t(z_2) = \infty$  y  $t(z_4) = 1$ . Una consecuencia del Lema 1.5.4 es el siguiente.

**Proposición 1.8.2.** — *Las transformaciones de Möbius preservan las razones cruzadas, mientras que las transformaciones extendidas de Möbius conjugan las razones cruzadas, es decir :*

$$[t(z_1), t(z_2); t(z_3), t(z_4)] := \begin{cases} [z_1, z_2; z_3, z_4] & \text{si } t \in \mathbb{M}^2 \\ \overline{[z_1, z_2; z_3, z_4]} & \text{si } t \in \widehat{\mathbb{M}}^2 - \mathbb{M}^2 \end{cases}$$

La razón cruzada permite dar otra manera equivalente de definir transformaciones (extendidas) de Möbius.

**Proposición 1.8.3.** — *Sea  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  una función tal que  $f(\infty)$ ,  $f(0)$  y  $f(1)$  son tres puntos diferentes. Entonces :*

- (i)  *$f$  es una transformación de Möbius sí y sólo si preserva las razones cruzadas.*
- (ii)  *$f$  es una transformación extendida de Möbius sí y sólo si envía cada razón cruzada en su conjugada.*

*Demonstración.* — La proposición anterior nos da una dirección de este. Veamos las direcciones opuestas. Componiendo  $f$  con la reflexión  $J(z) = \bar{z}$  permite obtener (ii) como consecuencia de (i). De esta manera, sólo necesitamos verificar (i).

Consideremos una función  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  que preserve las razones cruzadas y de manera que los valores  $f(\infty)$ ,  $f(0)$  y  $f(1)$  son diferentes. Sea  $T$  la transformación de Möbius tal que  $T(f(\infty)) = \infty$ ,  $T(f(0)) = 0$  y  $T(f(1)) = 1$ . De esta manera  $g = T \circ f$  satisface que  $g(\infty) = \infty$ ,  $g(0) = 0$  y  $g(1) = 1$ . Por otra lado, como  $T$  preserva las razones cruzadas, tenemos que  $g$  también lo hace. Ahora, para  $z \neq \infty$ , tenemos

$$z = [z, \infty; 0, 1] = [g(z), g(\infty); g(0), g(1)] = [z, \infty; 0, 1] = z,$$

es decir  $g(z) = z$  para todo  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ , con lo cual probamos lo deseado. □

PROBLEMAS. —

- 1.- Verificar de manera directa que la razón cruzada es preservada por la acción de una transformación de Möbius. (Ind. Use el Lema 1.5.4).

- 2.- Sean  $z_1, z_2, z_3, z_4$  cuatro puntos diferentes de la esfera de Riemann. Considere todos los valores que se obtienen usando todas las razones cruzadas que se pueden obtener entre ellos. Obtener que estos son 6 valores que son permutados por un grupo de Möbius isomorfo al grupo de permutaciones en tres elementos. Determinar, como consecuencia, un homomorfismo sobreyectivo del grupo simétrico en cuatro letras en el grupo simétrico en tres letras.

### 1.9. Círculos generalizados

**Definición 1.9.1.** — Un **círculo generalizado** en la esfera de Riemann es ó bien un círculo en el plano complejo ó bien la unión de una recta del plano complejo con el punto  $\infty$ .

**Proposición 1.9.2.** — Tanto transformaciones de Möbius como transformaciones extendidas de Möbius envían círculos generalizados en círculos generalizados.

*Demonstración.* — Esto es claro para las traslaciones, dilataciones, rotaciones y la conjugación. Viendo la inversión  $z \mapsto 1/z$  como una rotación de la esfera, vemos que esto es también válido para esta. Ahora el resultado sigue del Lema 1.5.4.

□

PROBLEMAS. —

- 1.- Verificar que cuatro puntos diferentes  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$  están contenidos en un mismo círculo generalizado sí y sólo si  $[z_1, z_2; z_3, z_4] \in \mathbb{R}$ . Indicación : estos puntos viven en un círculo generalizado sí y sólo si existe una transformación de Möbius que envía estos puntos en  $0, 1, \infty, x$ , donde  $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ .
- 2.- Sea  $C$  un círculo generalizado. Verificar que existe una transformación extendida de Möbius de orden dos sin puntos fijos (una reflexión imaginaria) que permuta ambos discos acotados por  $C$ . Determine todas tales reflexiones imaginarias en términos de  $C$ .
- 3.- Verificar que la ecuación de un círculo generalizado es de la forma

$$a|z|^2 + bz + \overline{bz} + c = 0$$

donde  $a, c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}$  y  $|b|^2 - ac > 0$ .

### 1.10. Puntos fijos

**Definición 1.10.1.** — Sea  $f : X \rightarrow X$  una función. Un punto  $x \in X$  tal que  $f(x) = x$  es llamado un **punto fijo** de  $f$ .

**Proposición 1.10.2.** — Una transformación de Möbius diferente de la identidad tiene al menos un punto fijo y a lo más dos. El conjunto de puntos fijos de una transformación extendida de Möbius puede ser (i)  $\emptyset$ , (ii) un punto, (iii) dos puntos, (iv) un círculo generalizado.

*Demonstración.* — Supongamos primero que tenemos una transformación de Möbius

$$t(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  son tales que  $ad - bc = 1$ . Observemos que  $t(\infty) = \infty$  sí y sólo si  $c = 0$ . Si miramos la ecuación de puntos fijos de  $t$  en  $\mathbb{C}$  obtenemos

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Ya que toda ecuación polinomial compleja tiene ceros y a lo más tiene tantos ceros como su grado, obtenemos nuestro resultado para las transformaciones de Möbius.

Supongamos ahora que  $t$  es una transformación extendida de Möbius con al menos tres puntos fijos, digamos  $p_1, p_2, p_3$ . Sea  $s$  una transformación de Möbius que satisface  $s(p_1) = 0$ ,  $s(p_2) = 1$  y  $s(p_3) = \infty$ . La transformación de Möbius  $s$  es de hecho dada por

$$s(z) = \frac{(z - p_1)(p_2 - p_3)}{(z - p_3)(p_2 - p_1)} = [z, p_3; p_1, p_2].$$

Entonces  $u = s \circ t \circ s^{-1}$  resulta ser una transformación extendida de Möbius cuyo conjunto de puntos fijos es la imagen por  $s$  de los puntos fijos de  $t$ . Ahora, como  $u(0) = 0$  y  $u(\infty) = \infty$ , entonces  $u(z) = \lambda z$ . También tenemos que  $u(1) = 1$  de donde  $\lambda = 1$ . Así,  $u(z) = z$  y su conjunto de puntos fijos es dado por el círculo generalizado  $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Ya que transformaciones de Möbius envían círculos generalizados en círculos generalizados obtenemos nuestro resultado para las transformaciones extendidas de Möbius. □

PROBLEMAS. —

- 1.- Dar un ejemplo de cada situación descrita en la Proposición 1.10.2.

### 1.11. Clasificación de transformaciones de Möbius

Hemos visto que toda transformación de Möbius, diferente de la identidad, tiene al menos un punto fijo y a los más dos.

**Definición 1.11.1.** — Sea

$$t(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

una transformación de Möbius, diferente de la identidad, tal que  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  y  $ad - bc = 1$ .

- (1) Si  $t$  tiene exactamente un punto fijo, entonces diremos que  $t$  es una **transformación parabólica**. Podemos conjugarla por una transformación de Möbius para asumir que tal punto fijo es  $\infty$ . En tal caso tenemos que  $t(z) = az + b$ , donde  $a \neq 0$ . Pero si  $a \neq 1$ , entonces tendremos que  $-b/a$  es otro punto fijo, lo cual produce una contradicción a nuestro supuesto. Ahora, conjugando esta por la transformación de Möbius  $q(z) = z/b$ , obtenemos que toda transformación parabólica es conjugada por una transformación de Möbius a  $p(z) = z + 1$ .
- (2) Supongamos ahora que esta transformación  $t$  tiene dos puntos fijos. Conjugando por una transformación de Möbius adecuada, podemos asumir que estos puntos fijos son  $0$  y  $\infty$ , es decir,  $t(z) = \lambda e^{i\theta} z$ , cierto  $\lambda e^{i\theta} \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ . Si tenemos que  $\lambda = 1$ , entonces diremos que  $T$  es una **transformación elíptica**. En caso contrario diremos que es una **transformación loxodrómica**. Una transformación loxodrómica para la cual  $\theta = 0$  es también llamada una **transformación hiperbólica**.

## PROBLEMAS. —

- 1.- Sean  $f, g \in \mathbb{M}^2$  transformaciones de Möbius, ambas diferentes de la identidad. Supongamos que  $f$  no es parabólica y  $g$  tiene exactamente un punto fijo en común con  $f$ . Entonces la transformación de Möbius  $[f, g] = f \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1}$  es parabólica cuyo punto fijo es el punto fijo común.
- 2.- Sea  $f$  una transformación de Möbius, diferente de la identidad, digamos

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  son tales que  $ad - bc = 1$ . Verifique que :

- (i)  $f$  es elíptica sí y sólo si  $(a + d) \in (-2, 2)$  ;
  - (ii)  $f$  es parabólica sí y sólo si  $(a + d) \in \{\pm 2\}$  ;
  - (iii)  $f$  es loxodrómica sí y sólo si  $a + d \notin [-2, 2]$  ;
  - (iv)  $f$  es hiperbólica sí y sólo si  $a + d \in \mathbb{R}$  y  $|a + d| > 2$ .
- 3.- Dado un punto cualquiera  $p \in \widehat{\mathbb{C}}$ , verifique que existe una transformación parabólica que tiene a  $p$  como punto fijo. Determine todas tales transformaciones.
- 4.- Dado dos puntos diferentes  $p, q \in \widehat{\mathbb{C}}$ , verifique que existe una transformación loxodrómica que tiene a  $p$  y  $q$  como puntos fijos. Determine todas tales transformaciones.
- 5.- Dado dos puntos diferentes  $p, q \in \widehat{\mathbb{C}}$ , verifique que existe una transformación elíptica que tiene a  $p$  y  $q$  como puntos fijos. Determine todas tales transformaciones.

### 1.12. Clasificación de transformaciones extendidas de Möbius

En el caso de transformaciones extendidas de Möbius, hemos visto que tenemos tres posibilidades.

**Definición 1.12.1.** — Sea una transformación extendida de Möbius

$$t(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d},$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  tales que  $ad - bc = 1$ .

- (1) En el caso que esta no tenga puntos fijos, entonces diremos que esta es una transformación **pseudo-elíptica**. En este caso,  $t^2$  es una transformación de Möbius con al menos un punto fijo. Podemos conjugar  $t$  por una transformación de Möbius que envía tal punto fijo a  $\infty$ , luego,  $t^2$  fija  $\infty$ . Además, podemos conjugar por una traslación para también asumir que  $t(\infty) = 0$ . Así, debemos tener  $t(0) = \infty$ . Luego, obtenemos que  $t(z) = \lambda/\bar{z}$ , para cierto  $\lambda \in \mathbb{C} - [0, +\infty)$ . Ahora al conjugar  $t$  por una dilatación podemos también asumir que  $|\lambda| = 1$ . De esta manera, toda transformación pseudo-elíptica es conjugada por una transformación de Möbius a una de la forma  $t(z) = e^{i\theta}/\bar{z}$ , para cierto  $\theta \in (0, 2\pi)$ .
- (2) Supongamos ahora que  $t$  tiene exactamente un punto fijo. Diremos que esta es una transformación **pseudo-parabólica**. Podemos conjugar por una transformación de Möbius para asumir que el punto fijo es  $\infty$  y  $t(0) = 1$ , en cuyo caso,  $t(z) = a\bar{z} + 1$ , para cierto valor  $a \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ . La condición que  $t$  no tenga más puntos fijos obliga a tener  $a = 1$ . De esta manera, toda transformación pseudo-parabólica es conjugada por una transformación de Möbius a una de la forma  $t(z) = \bar{z} + 1$ .
- (3) Si  $t$  tiene exactamente dos puntos fijos, entonces diremos que esta es una transformación **pseudo-hiperbólica**. En este caso, podemos conjugar  $t$  por una transformación de Möbius para asumir que los puntos fijos son  $0$  y  $\infty$ . En tal caso,  $t(z) = a\bar{z}$ , cierto  $a \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ . Ya que  $t$  no tiene otros puntos fijos, debemos tener que  $|a| \neq 1$ .
- (4) Supongamos ahora que  $t$  tiene un círculo generalizado de puntos fijos. En este caso diremos que esta es una **reflexión**. Estudiaremos esta reflexiones en la próxima sección.

PROBLEMAS. —

- 1.- Sea  $t$  una transformación extendida de Möbius. Determine el tipo por medio de  $t^2$ .
- 2.- Dado un punto cualquiera  $p \in \widehat{\mathbb{C}}$ , verifique que existe una transformación pseudo-parabólica que tiene a  $p$  como punto fijo. Determine todas tales transformaciones.



- 3.- Dado dos puntos diferentes  $p, q \in \widehat{\mathbb{C}}$ , verifique que existe una transformación pseudo-hiperbólica que tiene a  $p$  y  $q$  como puntos fijos. Determine todas tales transformaciones.
- 4.- Dado un círculo generalizado  $C \subset \widehat{\mathbb{C}}$ , verifique que existe una reflexión que tiene a  $C$  como círculo de puntos fijos.

### 1.13. Reflexiones

Cada círculo generalizado  $\Sigma \subset \widehat{\mathbb{C}}$  define de manera única un automorfismo anti-holomorfo  $\sigma_\Sigma$  de orden 2 cuyo conjunto de puntos fijos es exáctamente  $\Sigma$ . De manera más concreta,

- 1.- Supongamos que  $\Sigma$  es la unión del punto  $\infty$  con una línea que pasa por un punto  $p$  y tiene dirección  $e^{i\theta}$ . En este caso,

$$\sigma_\Sigma(z) = e^{2i\theta}(\overline{z-p}) + p$$

- 2.- En el caso que  $\Sigma$  es un círculo Euclidiano de centro en  $p$  y radio  $R > 0$ , entonces tenemos

$$\sigma_\Sigma(z) = \frac{R^2}{z-p} + p$$

Es claro de las definiciones que el conjunto de puntos fijos de la reflexión  $\sigma_\Sigma$  es exáctamente el círculo generalizado  $\Sigma$ . Observemos además que la conjugación  $J(z) = \bar{z}$  es la reflexión en el círculo generalizado definido por el eje real.

**Proposición 1.13.1.** — *Las reflexiones en los círculos generalizados generan  $\widehat{\mathbb{M}}^2$ .*

*Demonstración.* — Basta con verificar que los generadores dados por el Lema 1.5.4 pueden escribirse como composición de reflexiones.

- (i) Sea  $b \in \mathbb{C} - \{0\}$ . Tomemos las líneas paralelas  $L_1$  y  $L_2$ , donde
- (a)  $L_1$  es ortogonal a la línea por 0 y  $b$ ;
  - (b)  $0 \in L_1$ ; y
  - (c)  $b/2 \in L_2$ .

Si denotamos por  $\sigma_j$  las reflexiones en  $L_j$ ,  $j = 1, 2$ , entonces  $\sigma_2 \circ \sigma_1(z) = z + b$ .

- (ii) Tomemos  $C_1$  y  $C_2$  dos círculos Euclidianos concéntricos en 0 y radios  $R_1$  y  $R_2$ , respectivamente. Si denotamos por  $\sigma_j$  la reflexión en  $C_j$ ,  $j = 1, 2$ , entonces  $\sigma_2 \circ \sigma_1(z) = (R_2/R_1)^2 z$ .
- (iii) Si tomamos dos líneas que pasan por 0 y forman un ángulo  $\theta$  y denotamos sus reflexiones por  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , respectivamente, entonces  $\sigma_2 \circ \sigma_1(z) = e^{2i\theta} z$ .
- (iv) La inversión  $z \mapsto 1/z$  se obtiene de componer la conjugación  $J$  con la reflexión en el círculo unitario.

□

Ya que cada reflexión invierte la orientación, lo anterior nos permite además el siguiente resultado.

**Corolario 1.13.2.** — *El grupo de transformaciones de Möbius es generado por las composiciones de un número par de reflexiones. Toda transformación extendida de Möbius es composición de un número impar de reflexiones.*

PROBLEMAS. —

- 1.- Sean  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  dos reflexiones. Describir, en términos de la configuración de sus círculos generalizados de puntos fijos, que tipo de transformación de Möbius es  $t = \sigma_2 \circ \sigma_1$ .
- 2.- Verificar que toda reflexión es conjugada por una transformación de Möbius a la reflexión  $J(z) = \bar{z}$ .

#### 1.14. Distorsión de áreas

Una reflexión  $\sigma$  en un círculo generalizado consistiendo del punto  $\infty$  y de una línea Euclidiana es una isometría Euclidiana. De esta manera, si  $E \subset \mathbb{C}$  es un conjunto de diámetro Euclidiano  $d_E$ , entonces  $\sigma(E)$  tendrá el mismo diámetro Euclidiano. Pero si la reflexión es sobre un círculo Euclidiano, entonces la invariancia del diámetro Euclidiano ya no es válida. En este caso tenemos la siguiente información. Denotamos por  $\text{diam}_{\text{Eucl}}(A)$  el diámetro Euclidiano de un subconjunto  $A$  de  $\mathbb{C}$ .

**Proposición 1.14.1.** — *Sea  $\sigma$  la reflexión en el círculo  $C$  de centro en  $p$  y radio  $R > 0$ . Si  $E \subset \widehat{C}$  es un conjunto cerrado tal que  $p \notin E$ , entonces*

$$\text{diam}_{\text{Eucl}}(\sigma(E)) \leq 2R^2/\rho$$

donde  $\rho$  es la distancia Euclidiana de  $p$  al conjunto  $E$ . Si además,  $\infty \in E$ , entonces también tenemos que

$$\text{diam}_{\text{Eucl}}(\sigma(E)) \geq R^2/\rho$$

*Demonstración.* — Ya que rotaciones y traslaciones son isometrías Euclidianas, podemos asumir que  $p = 0$  y luego  $\sigma(z) = R^2/\bar{z}$ . Sea  $q \in E$  un punto de  $E$  tal que  $|q| = \rho$ . Entonces el disco  $D$  de centro en 0 y radio  $\rho$  está contenido en el exterior de  $E$  (además es tangente a  $E$ ). Como  $\sigma(E) \subset \widehat{C} - \overline{\sigma(D)}$  y este último es el disco de centro en 0 y radio  $R^2/\rho$ , tenemos la primera desigualdad. Por otro lado, si tenemos que  $\infty \in E$ , entonces  $\sigma(E)$  contiene 0 y un punto en el borde del disco  $\widehat{C} - \overline{\sigma(D)}$ , obteniendo la segunda desigualdad.

□

### 1.15. Círculos isométricos

Consideremos una transformación de Möbius

$$t(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  y  $ad - bc = 1$ , tal que  $t(\infty) \neq \infty$ , es decir,  $c \neq 0$ .

En este caso tenemos los siguientes puntos en  $\mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} p &= t^{-1}(\infty) = -d/c, \\ q &= t(\infty) = a/c \end{aligned}$$

Si consideramos un círculo  $C$ , centrado en  $p$  y radio  $R$ , entonces sabemos que  $t(C)$  debe ser un círculo generalizado. Como  $p \notin C$ , tenemos que  $\infty \notin t(C)$ , luego,  $t(C)$  es un círculo Euclidiano en  $\mathbb{C}$ . Además,  $t(C)$  debe separar  $q$  de  $\infty$ .

**Lema 1.15.1.** — *En las condiciones anteriores,  $t(C)$  es un círculo centrado en  $q$  y radio  $\tilde{r}(r) = 1/(c^2r)$ .*

*Demonstración.* — Observemos que la afirmación es invariante por traslaciones y rotaciones. Luego, podemos asumir que  $p = 0$  y  $q \in (0, +\infty)$ . En este caso,  $a = q$ ,  $b = -1/c$  y  $d = 0$ .

Sea  $\sigma$  la reflexión en el círculo  $C$ , que ahora es un círculo de radio  $r > 0$  y centro en el origen. Así,

$$\sigma(z) = \frac{r^2}{\bar{z}}$$

Si  $p = q$ , definimos  $\tau$  como la función identidad. En caso que  $q \neq p$ , entonces  $\tau$  es la reflexión en la línea  $L$  que pasa por  $(p + q)/2$  y que es ortogonal a la línea determinada por  $p$  y  $q$ . En nuestra situación

$$\tau(z) = -\bar{z} + q$$

Consideremos la transformación de Möbius  $b = t^{-1} \circ \tau \circ \sigma$ . Es claro que  $b(0) = 0$  y  $b(\infty) = \infty$ , es decir,  $b(z) = \lambda z$ . De manera más concreta,

$$b(z) = \frac{1}{c^2 r^2} z$$

Ya que  $t = \tau \circ \sigma \circ b^{-1}$ , obtenemos que  $t(C)$  es un círculo centrado en  $q$  y radio  $\tilde{r}(r) = 1/(c^2 r)$ , como queríamos verificar. □

La función  $\tilde{r} : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  es una función estrictamente decreciente que tiende a  $+\infty$  (respectivamente, a 0) cuando  $r$  tiende a 0 (respectivamente, a  $+\infty$ ). En particular, debe existir un único punto  $r^* > 0$  tal que  $\tilde{r}^* = r^*$ ; de hecho,  $r^* = 1/|c|$ . En otras palabras, existe un único círculo centrado en  $t^{-1}(\infty)$  cuya imagen por  $t$  es un círculo del mismo radio (que además debe estar centrado en  $t(\infty)$ ).

**Definición 1.15.2.** — Sea

$$t(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  y  $ad - bc = 1$ , tal que  $t(\infty) \neq \infty$ , es decir,  $c \neq 0$ . El círculo

$$I_t = \{z \in \mathbb{C} : |z + d/c| = 1/|c|\}$$

es llamado el **círculo isométrico** de  $t$ , denotado por  $I_t$ .

Como consecuencia de la Proposición 1.14.1 obtenemos el siguiente hecho.

**Proposición 1.15.3.** — Sea  $t$  una transformación de Möbius tal que  $t(\infty) \neq \infty$  y sea  $R_t$  el radio del círculo isométrico  $I_t$  de  $t$ . Si  $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$  es un conjunto cerrado tal que  $t^{-1}(\infty) \notin E$ , entonces

$$\text{diam}_{\text{Eucl}}(t(E)) \leq 2R_t^2/\rho$$

donde  $\rho$  es la distancia Euclidiana de  $t^{-1}(\infty)$  al conjunto  $E$ . Si además,  $\infty \in E$ , entonces también tenemos que

$$\text{diam}_{\text{Eucl}}(t(E)) \geq R_t^2/\rho$$

Ya que una transformación extendida de Möbius  $s$  se puede escribir como  $s = J \circ t$ , donde  $J(z) = \bar{z}$  y  $t$  es una transformación de Möbius, lo anterior nos permite asegurar el mismo resultado, es decir :

**Proposición 1.15.4.** — Sea  $s$  una transformación extendida de Möbius tal que  $s(\infty) \neq \infty$  y sea  $R_s$  el radio del círculo isométrico  $I_t$  de  $t$ , donde  $t = J \circ s$ . Si  $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$  es un conjunto cerrado tal que  $t^{-1}(\infty) \notin E$ , entonces

$$\text{diam}_{\text{Eucl}}(s(E)) \leq 2R_t^2/\rho$$

donde  $\rho$  es la distancia Euclidiana de  $t^{-1}(\infty)$  al conjunto  $E$ . Si además,  $\infty \in E$ , entonces también tenemos que

$$\text{diam}_{\text{Eucl}}(s(E)) \geq R_t^2/\rho$$

PROBLEMAS. —

1.- Sea

$$t(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  y  $ad - bc = 1$ , tal que  $t(\infty) \neq \infty$ , es decir,  $c \neq 0$ .

(i) Verificar la igualdad

$$t(I_t) = I_{t^{-1}} = \{z \in \mathbb{C} : |z - a/c| = 1/|c|\}$$

(ii) Concluir de (i) que

$$t = \tau \circ \sigma \circ r$$

donde  $\tau$  es la identidad si  $p = q$  ó bien la reflexión en la línea orthogonal al trazo que une  $p$  con  $q$  en el punto medio,  $r$  es una rotación (que puede

revertir orientación) ó bien la identidad (luego  $\tau$  y  $r$  son isometrías Euclidianas) y  $\sigma$  es la reflexión en el círculo isométrico  $I_t$ .

2.- Sea  $f$  una transformación de Möbius, diferente de la identidad, digamos

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  son tales que  $ad - bc = 1$ . Como antes,  $I_f$  y  $I_{f^{-1}}$  denotan los círculos isométricos de  $f$  y  $f^{-1}$ , respectivamente. Verifique que :

- (i)  $I_f$  y  $I_{f^{-1}}$  son disjuntos sí y sólo si  $|a + d|^2 > 4$ ;
- (ii)  $I_f$  y  $I_{f^{-1}}$  son tangentes sí y sólo si  $|a + d|^2 = 4$ ;
- (iii)  $I_f$  y  $I_{f^{-1}}$  se interceptan en exactamente dos puntos sí y sólo si  $0 < |a + d|^2 < 4$ ;
- (iv)  $I_f = I_{f^{-1}}$  sí y sólo si  $d = -a$ .

### 1.16. Proyección estereográfica

La esfera unitaria 2-dimensional es

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$$

con la topología inducida por la topología usual de  $\mathbb{R}^3$ .

**Definición 1.16.1.** — La función  $\phi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$  definida por

$$\phi(x + iy) = \left( \frac{2x}{\|z\|^2 + 1}, \frac{2y}{\|z\|^2 + 1}, \frac{\|z\|^2 - 1}{\|z\|^2 + 1} \right)$$

$$\phi(\infty) = \infty$$

es llamada la **proyección estereográfica**.

Geoméricamente, la proyección estereográfica es dada como sigue. Primero identificamos el plano complejo con el plano  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$  usando la regla  $z \mapsto (Re(z), Im(z), 0)$ . Por cada punto  $(x, y, 0)$  existe una única línea que contiene al punto  $(0, 0, 1)$ . Esta línea corta  $S^2$  en dos puntos, uno de ellos es  $(0, 0, 1)$ , el otro es  $\phi(x + iy)$ .

**Ejercicio 2.** — Verificar que  $\phi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$  es un homeomorfismo.

El ejercicio anterior nos permite hablar de manera indistinta tanto de  $\widehat{\mathbb{C}}$  como de  $S^2$ .

La proyección estereográfica  $\phi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$  permite transferir la métrica Euclidian de  $S^2$  a  $\widehat{\mathbb{C}}$  como

$$d(z, w) = \|\phi(z) - \phi(w)\| = \begin{cases} \frac{2\|z-w\|}{\sqrt{(1+\|z\|^2)}\sqrt{(1+\|w\|^2)}}, & z, w \in \mathbb{C} \\ \frac{2}{\sqrt{(1+\|z\|^2)}}, & z \in \mathbb{C}, w = \infty \end{cases}$$

La métrica así obtenida en  $\widehat{\mathbb{C}}$  es llamada la **métrica cordal**. Como la topología inducida en  $S^2$  esta inducida por la norma Euclidiana en  $\mathbb{R}^3$  y  $\phi$  es homeomorfismo, tenemos que la métrica cordal define la misma topología Euclidiana en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

PROBLEMAS. —

- 1.- Sea  $C \subset \widehat{\mathbb{C}}$  un círculo generalizado. Verificar que  $\phi(C)$  es un círculo en  $S^2$ , donde definimos un círculo en  $S^2$  como la intersección de  $S^2$  con un plano (donde asumimos que la intersección no es vacía ni un punto).
- 2.- Describa la forma que tiene cada transformación (extendida) de Möbius como acción en  $S^2$  vía la proyección estereográfica.

## CAPÍTULO 2

### EL PLANO HIPERBÓLICO

Una buena referencia para este capítulo es el libro de A.F. Beardon [11].

#### 2.1. Algunos modelos del plano hiperbólico

Si consideremos un círculo generalizado  $C \in \widehat{\mathbb{C}}$ , entonces tenemos que  $\widehat{\mathbb{C}} - C$  consiste de dos discos. Sea  $H$  uno de ellos.

**Definición 2.1.1.** —

(1) Definimos las **líneas hiperbólicas** de  $H$  como las intersecciones de  $H$  con los círculos generalizados ortogonales a  $C$ . Si  $\Sigma$  es un tal círculo generalizado (es decir, ortogonal a  $C$ ), entonces los puntos de la intersección  $\Sigma \cap C$  son llamados los puntos finales de la línea hiperbólica  $L = H \cap \Sigma$ .

(2) Dado dos puntos  $z, w \in H$  definimos su **distancia hiperbólica**  $d_H(z, w)$  de la siguiente manera (ver [70]) :

(i) Si  $z = w$ , entonces  $d_H(z, w) = 0$  ;

(ii) Si  $z \neq w$ , entonces existe un único círculo generalizado  $\Sigma$  ortogonal a  $C$  tal que  $z, w \in \Sigma$ . Denotemos por  $a$  y  $b$  los puntos finales la línea hiperbólica  $L_{z,w} = \Sigma \cap H$ , de manera que en  $L$  el orden consecutivo es dado por  $a, z, w, b$ , es decir,  $z$  separa a  $w$  de  $a$ . Definimos

$$d_H(z, w) = \ln[a, z; w, b]$$

**Observación 2.1.2.** — Observemos en parte (2)-(ii) de la definición anterior, usando el hecho que la razón cruzada es invariante por transformaciones de Möbius y que podemos escoger una transformación de Möbius  $T$  tal que  $T(a) = 0$ ,  $T(z) = 1$ ,  $T(w) > 1$  y  $T(b) = \infty$ , que se tiene la siguiente igualdad

$$[a, z; w, b] = [0, 1; T(w), \infty] = T(w) > 1,$$

luego  $d_H(z, w) > 0$ . Como

$$T(w) = \frac{(w - a)(z - b)}{(w - b)(z - a)},$$

se tiene una forma explícita para  $d_H$  :

$$d_H(z, w) = \ln \left( \frac{(w-a)(z-b)}{(w-b)(z-a)} \right).$$

De esta manera tenemos que  $d_H(z, w) \geq 0$ , y que  $d_H(z, w) = 0$  sí y sólo si  $z = w$ . Por otro lado, de la definición, si  $z \neq w$ , entonces

$$d_H(w, z) = \ln[b, w; z, a] = \ln[a, z; w, b] = d_H(z, w).$$

De esta manera, lo único que nos falta verificar para ver que  $d_H$  es una métrica es la desigualdad triangular, la cual procederemos a ver luego.

**Definición 2.1.3.** — Por una isometría (hiperbólica) de  $(H, d_H)$  entenderemos un homeomorfismo  $t : H \rightarrow H$  tal que  $d_H(z, w) = d_H(t(z), t(w))$ .

La invariancia de la razón cruzada por una transformación de Möbius nos permite notar que los objetos definidos anteriormente son invariantes bajo las transformaciones de Möbius y extendidas de Möbius. Si consideramos otro círculo generalizado  $\widehat{C}$  y uno de los discos  $\widehat{H}$  de  $\widehat{\mathbb{C}} - \widehat{C}$ , entonces podemos construir una transformación de Möbius  $s$  tal que  $s(C) = \widehat{C}$  y  $s(H) = \widehat{H}$ . Tenemos que  $s$  envía líneas hiperbólicas de  $H$  en líneas hiperbólicas de  $\widehat{H}$  y tenemos que  $s$  resulta ser una isometría, es decir,  $d_H(z, w) = d_{\widehat{H}}(s(z), s(w))$ . Tomando  $\widehat{H} = H$ , esto nos dá el siguiente :

**Proposición 2.1.4.** — Sea  $C$  un círculo generalizado y  $H$  uno de los dos discos (generalizados) determinados por  $C$ . Entonces

$$\text{Aut}(H) < \text{Iso}_{d_H}(H)$$

donde  $\text{Iso}_{d_H}(H)$  denota el grupo de isometrías de  $H$  respecto  $d_H$ .

Lo anterior también nos dice que para verificar que  $d_H$  satisface la desigualdad triangular y, en particular, que es una métrica en  $H$ , basta con asumir  $H = \Delta$ , donde

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

Primero obtenemos una forma de  $d_\Delta$  que nos permitirá hacer cálculos explícitos.

**Lema 2.1.5.** — Si  $z, w \in \Delta$ ,  $z \neq w$ , entonces

$$d_\Delta(z, w) = \ln \frac{|1 - \bar{z}w| + |w - z|}{|1 - \bar{z}w| - |w - z|}$$

ó de manera equivalente

$$d_\Delta(z, w) = \ln \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$$



donde

$$\rho = \frac{|w - z|}{|1 - \bar{z}w|}$$

*Demonstración.* — Sea

$$t(u) = \frac{u - z}{1 - \bar{z}u} \in \text{Aut}(\Delta)$$

En este caso,  $t(z) = 0$ ,  $a = -t(w)/|t(w)|$  y  $b = t(w)/|t(w)|$ . Luego,

$$\begin{aligned} d_{\Delta}(z, w) &= d_{\Delta}(0, t(w)) = \ln[-t(w)/|t(w)|, 0; t(w), t(w)/|t(w)|] = \\ &= \ln \frac{1 + |t(w)|}{1 - |t(w)|} \end{aligned}$$

□

**Lema 2.1.6 (Desigualdad Triangular).** — Sean  $u, z, w \in \Delta$ . Entonces

$$d_{\Delta}(z, w) \leq d_{\Delta}(z, u) + d_{\Delta}(u, w)$$

La igualdad vale sí y sólo si  $u, z, w$  viven en una misma línea hiperbólica, es decir, si son colineales.

*Demonstración.* — Ya que  $\text{Aut}(\Delta) < \text{Iso}_{d_{\Delta}}(\Delta)$ , podemos asumir si pérdida de generalidad que  $u = 0$  y  $w \in (0, 1)$ . En esta situación tenemos que

$$d_{\Delta}(z, w) = \ln \frac{1 + \rho}{1 - \rho}; \text{ donde } \rho = \frac{|w - z|}{|1 - \bar{z}w|}$$

$$d_{\Delta}(u, z) = \ln \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

$$d_{\Delta}(u, w) = \ln \frac{1 + |w|}{1 - |w|}$$

Ahora observemos que

$$\frac{1 + \rho}{1 - \rho} = \frac{(1 + \rho)^2}{1 - \rho^2} = \frac{(|1 - \bar{z}w| + |w - z|)^2}{(1 - |w|^2)(1 - |z|^2)} \leq$$

$$\frac{(1 + |z||w| + |z| + |w|)^2}{(1 - |w|^2)(1 - |z|^2)} = \left( \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right) \left( \frac{1 + |w|}{1 - |w|} \right)$$

Ahora el resultado sale del hecho que logaritmo es una función creciente.

Usando el hecho que  $w > 0$ , podemos ver que la igualdad se produce sí y sólo si  $z \in (-\infty, 0)$ .

□

Resumiendo todo lo anterior es el siguiente.

**Teorema 2.1.7.** —  $d_H$  es una métrica para el disco generalizado  $H$ . Además, las líneas hiperbólicas son las líneas geodésicas.

**Definición 2.1.8.** — El par  $(H, d_H)$  es llamado un modelo del **plano hiperbólico**.

Ahora que tenemos verificado que  $d_H$  es una métrica del plano hiperbólico  $H$ , y que sabemos que  $Aut(H)$  es un grupo de isometrías, nos gustaría saber si existen otras isometrías aparte de estas. Volvamos a nuestro modelo del disco unitario  $\Delta$ . Si tomamos un punto  $z \in \Delta$ , entonces podemos usar  $t \in Aut(\Delta)$  tal que  $t(z) = 0$ . Luego, los puntos de  $\Delta$  que equidistan de  $z$  a una distancia  $r > 0$  son enviados a los puntos de  $\Delta$  que equidistan de 0 a una distancia  $r$ . Pero en este caso, si  $w \in \Delta$  es tal que  $d_\Delta(0, w) = r$ , entonces

$$r = \ln \frac{1 + |w|}{1 - |w|}$$

de donde obtenemos que

$$|w| = \frac{e^r - 1}{e^r + 1} = R > 0$$

Es decir, los puntos que equidistan de 0 a una distancia hiperbólica  $r$  forman un círculo Euclidiano centrado en 0 y radio Euclidiano  $R$ . Como las transformaciones de Möbius envían círculos generalizados en círculos generalizados, obtenemos el siguiente.

**Proposición 2.1.9.** — *Los puntos que equidistan a una distancia  $r > 0$  de un punto dado en  $H$ , respecto a la métrica hiperbólica  $d_H$ , forman un círculo Euclidiano.*

Ahora procedemos a responder nuestra pregunta sobre las isometrías del plano hiperbólico.

**Teorema 2.1.10.** — *El grupo de las isometrías hiperbólicas de  $H$  es exactamente  $Aut(H) < \widehat{\mathbb{M}}^2$ .*

*Demonstración.* — Usemos el modelo  $H = \Delta$  y sea  $t$  una isometría hiperbólica de  $(H, d_H)$ . Podemos componer con una transformación  $s_1 \in Aut(H)$  para suponer que  $t(0) = 0$  y  $t(1/2) \in (0, 1)$ . Ahora, debemos tener que  $t$  preserva los círculos Euclidianos centrados en 0. Además, al ser  $t$  una isometría, este debe preservar las líneas geodésicas. En particular,  $t$  debe actuar como la identidad en la línea hiperbólica  $(-1, 1)$ . Componiendo  $t$  a la izquierda con  $J(z) = \bar{z} \in Aut(\Delta)$ , si es necesario, podemos asumir que  $t$  envía el semi-disco superior en el semi-disco superior. Si  $C$  es cualquier círculo Euclidiano centrado en 0 y contenido en  $\Delta$ , entonces  $t$  debe actuar como la identidad en  $C$ . En efecto, sean  $a > 0$  y  $-a$  los puntos de intersección de  $C$  con  $(-1, 1)$ . Entonces  $t(a) = a$  y  $t(-a) = -a$ . Si  $q \in C - \{a, -a\}$ , entonces  $t(q) \in C - \{a, -a\}$  debe satisfacer

$$d_\Delta(q, a) = d_\Delta(t(q), a) = r$$

Ahora, el círculo hiperbólico centrado en  $a$  y radio hiperbólico  $r$  es un círculo Euclidiano y debe cortar al círculo  $C$  en exactamente dos puntos, uno en cada semi-disco. Así, las únicas posibilidades que podemos tener son  $t(q) = q$  ó bien  $t(q) = \bar{q}$ . Esto último no puede ocurrir ya que  $t$  preserva el semi-disco superior. Ahora es claro que  $t = I$ .

□

**Ejemplo 2.1.11.** — Si tomamos  $H = \Delta$ , entonces ya vimos que

$$d_{\Delta}(z, w) = \ln \frac{1 + \rho}{1 - \rho}; \text{ donde } \rho = \frac{|w - z|}{|1 - \bar{z}w|}$$

y que su grupo de isometrías hiperbólicas es

$$\text{Aut}(\Delta) = \left\{ z \mapsto e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} : |a| < 1 \right\}$$

Este es llamado el modelo de **Poincaré del plano hiperbólico**.

**Ejemplo 2.1.12.** — Tomemos el **semiplano superior**

$$H = \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}.$$

La transformación de Möbius

$$t(u) = \frac{u - i}{u + i}$$

satisface que  $t(\mathbb{H}) = \Delta$ . Entonces

$$d_{\mathbb{H}}(z, w) = d_{\Delta}(t(z), t(w))$$

y su grupo de isometrías hiperbólicas es

$$\text{Aut}(\mathbb{H}) = PSL(2, \mathbb{R})$$

Este es llamado el modelo del **semiplano superior del plano hiperbólico**.

PROBLEMAS. —

1.- Verificar que

$$d_{\mathbb{H}}(z, w) = \ln \frac{|\bar{z} - w| + |w - z|}{|\bar{z} - w| - |w - z|}$$

2.- Sean  $L_1$  y  $L_2$  dos líneas hiperbólicas en el plano hiperbólico  $(H, d_H)$ . Supongamos que  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$  y que los puntos finales de  $L_1$  son diferentes de los puntos finales de  $L_2$ . Verifique que existe una y sólo una línea hiperbólica ortogonal a ambas. Indicación : Use por ejemplo el modelo del semiplano superior  $\mathbb{H}$  y suponga que una de las líneas es el semieje imaginario.

- 3.- Verificar que las líneas hiperbólicas de  $\mathbb{H}^2$  son las geodésicas para la métrica Riemanniana anterior y que la métrica que esta define en  $\mathbb{H}$  coincide con  $d_{\mathbb{H}}$ .
- 4.- Verificar que la métrica Riemanniana respectiva para el modelo de Poincaré  $(\Delta, d_{\Delta})$  es dada por

$$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}$$

En este caso el elemento de área es dado por

$$dA = \frac{4dxdy}{(1 - |z|^2)^2}$$

## 2.2. Forma infinitesimal de la métrica hiperbólica

Si tomamos un modelo  $(H, d_H)$  del plano hiperbólico, como lo hemos hecho en la sección anterior, entonces tenemos que  $H$  es un abierto de la esfera de Riemann, luego una superficie de Riemann. En particular,  $H$  es una variedad real de dimension dos diferenciable. En cada punto  $z \in H$  tenemos un plano tangente a  $H$ , es decir,  $T_z H$ .

Nos podemos preguntar si es posible dotar a  $H$  es una **métrica Riemanniana** que sea compatible con la distancia hiperbólica, es decir, dotar a cada plano tangente  $T_z H$  de un producto interior positivo (que depende diferenciablemente en  $z$ ) de manera que la métrica que esta defina sobre  $H$  coincida con la métrica hiperbólica.

Basta analizar esto en un modelo en particular, digamos el modelo del semiplano superior  $H = \mathbb{H}$ . Si tomamos en cada plano tangente  $T_z \mathbb{H}$  el producto interior positivo definido  $ds = \lambda(z)|dz|$ , es decir, si  $u, v \in T_z \mathbb{H}$ , entonces

$$\langle u, v \rangle = \lambda(z)^2 u \cdot v,$$

donde  $\lambda : H \rightarrow (0, +\infty)$  es una función diferenciable y  $u \cdot v$  denota el producto punto. Observemos que en este caso el ángulo que define  $\langle, \rangle$  es el mismo que define el producto punto, es decir, el ángulo Euclidiano.

Queremos que cada automorfismo holomorfo  $t \in \text{Aut}(\mathbb{H}) = PSL(2, \mathbb{R})$  sea una isometría, es decir,

$$\lambda(t(z))|t'(z)| = \lambda(z)$$

valga para todo  $z \in \mathbb{H}$ . Ahora,  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  está generado por las transformaciones de la forma

$$t_1(z) = z + a; \quad a \in \mathbb{R}$$

$$t_2(z) = bz; \quad b > 0$$

$$t_3(z) = \frac{-1}{z}$$

De esta manera, queremos tener

$$\lambda(z + a) = \lambda(z); \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R}$$

$$\lambda(bz) = \frac{\lambda(z)}{b}; \text{ para todo } b > 0$$

$$\lambda\left(\frac{-1}{z}\right) = |z|^2 \lambda(z)$$

La primera ecuación nos dice que  $\lambda(z) = \lambda(Im(z))$ . Luego debemos buscar una función

$$\lambda : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$$

que satisfaga las condiciones :

$$\lambda(br) = \frac{\lambda(r)}{b}; \text{ para todo } b, r > 0$$

$$\lambda\left(\frac{1}{r}\right) = r^2 \lambda(r); \text{ para todo } r > 0$$

De esta manera,

$$\lambda(r) = \frac{\lambda_0}{r}$$

donde  $\lambda_0 > 0$ . Es claro que para cada elección de  $\lambda_0$  obtendremos una métrica Riemanniana en  $\mathbb{H}$

$$ds = \frac{\lambda_0 |dz|}{Im(z)}$$

para la cual  $PSL(2, \mathbb{R})$  actúa como grupo de isometrías. No es difícil ver que  $t(z) = -\bar{z}$  también actúa como isometría en tal métrica Riemanniana, es decir,  $Aut(\mathbb{H})$  está contenido en el grupo de isometrías de la variedad Riemanniana  $(\mathbb{H}, ds = \frac{\lambda_0 |dz|}{Im(z)})$ . La longitud (en tal métrica Riemanniana) de un camino diferenciable  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  es dado por

$$l(\gamma) = \lambda_0 \int_a^b \frac{|\gamma'(\theta)| d\theta}{Im(\gamma(\theta))}$$

Si calculamos la longitud del camino  $\gamma(\theta) = i\theta$ ,  $\theta \in [1, 2]$ , obtenemos que

$$l(\gamma) = \lambda_0 \int_1^2 \frac{d\theta}{\theta} = \lambda_0 \ln 2$$

Ahora, como sabemos que el camino parametrizado por  $\gamma$  es geodésica hiperbólica, debemos tener  $\ln 2 = d_{\mathbb{H}}(i, 2i) = l(\gamma)$ , es decir,  $\lambda_0 = 1$ . De esta manera, la métrica Riemanniana buscada en  $\mathbb{H}$  es dada por

$$ds = \frac{|dz|}{Im(z)}$$

Además, cuando tenemos una métrica  $ds = \lambda(z)|dz|$ ,  $z = x + iy$ , tenemos que el elemento de área es dado por  $dA = \lambda(z)^2 dx dy$ . Luego, en este caso el elemento de área es dada por

$$dA = \frac{dx dy}{y^2}$$

Usando el hecho que cualquier otro modelo del plano hiperbólico  $(H, d_H)$  es isométrico con el modelo  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$  por medio de alguna transformación de Möbius, y el hecho que toda transformación de Möbius preserva los ángulos Euclidianos, tenemos el siguiente.

**Proposición 2.2.1.** — *La noción de ángulo hiperbólico es el mismo que el de ángulo Euclidiano.*

PROBLEMAS. —

- 1.- Verificar que para el modelo del plano hiperbólico  $\Delta$  se tiene que la forma infinitesimal de la métrica hiperbólica es dada por

$$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}$$

### 2.3. Area de polígonos hiperbólicos

Consideremos cualquier modelo  $(H, d_H)$  del plano hiperbólico.

**Definición 2.3.1.** — Una línea hiperbólica  $L \subset H$  divide  $H$  en dos partes. Cada una de esas partes es llamado un **semiespacio hiperbólico** de  $H$ .

**Definición 2.3.2.** — Un **polígono hiperbólico**  $P \subset H \subset \widehat{\mathbb{C}}$  es la intersección de un número finito de semiespacios hiperbólicos. Un lado de  $P$  es dado por un arco maximal de línea hiperbólica contenida en el borde de  $P$ . Un vértice de  $P$  es un punto del borde de  $P$  (incluido aquellos puntos del borde de  $H$ ) común a dos lados diferentes. Si un vértice de  $P$  está contenido en el borde de  $H$ , entonces diremos que este está en el infinito; en este caso los dos lados adyacentes a tal vértice son líneas hiperbólicas que hacen un ángulo igual a 0. Por otro lado, si tenemos un vértice al interior de  $H$ , entonces el ángulo (interno al polígono) vive en  $(0, \pi)$ . Un polígono puede tener en su borde arcos del borde de  $H$ , diremos que ellos son lados al infinito. Un polígono hiperbólico que no tiene lados al infinito y que tiene  $n \geq 3$  lados será llamado un **polígono hiperbólico finito de  $n$  lados**.

**Observación 2.3.3.** — Hay una definición más general de polígonos hiperbólicos que la que hemos dado aquí y que se puede ver en [11].

**Definición 2.3.4.** — Un subconjunto  $X \subset H$  es llamado **convexo** si para todo par de puntos diferentes en  $X$  ocurre que el trazo de línea hiperbólica que ellos definen está completamente contenida en  $X$ .

**Teorema 2.3.5 (Fórmula de Gauss-Bonnet).** — *Sea  $P$  un triángulo hiperbólico, es decir  $P$  un polígono hiperbólico finito de 3 lados, con ángulos interiores  $\theta_1, \theta_2$  y  $\theta_3$ . Entonces el área hiperbólica de  $P$  es finita y tiene el valor*

$$\text{Area}(P) = \pi - \sum_{j=1}^3 \theta_j$$

*Demonstración.* — Usemos el modelo del semiplano superior  $\mathbb{H}$  para hacer los cálculos. Supongamos primero que nuestro triángulo tiene al menos dos vértices al infinito. Luego, por una isometría hiperbólica, podemos suponer que los vértices son  $\infty$ ,  $1$  ( $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ) y el tercero vive en el semi-círculo de radio 1 y con centro en 0. Así, el tercer vértice tiene la forma  $e^{i\beta}$  (ó igual a  $-1$  si este está al infinito). En este caso podemos observar que  $\theta_3 = \pi - \beta$ . Ahora, si calculamos el área de  $P$  obtenemos

$$\int \int_P \frac{dx dy}{y^2} = \int_{\cos(\beta)}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} dx = \int_{\cos(\beta)}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \beta = \pi - \theta_3$$

Ahora, supongamos que el triángulo hiperbólico sólo tiene un vértice al infinito. Entonces podemos llevarlo por una isometría hiperbólica a un triángulo con el vértice al infinito siendo  $\infty$  y los dos otros vértices contenidos en el semi-círculo de radio 1 y centro en 0. Es fácil ver que este triángulo se puede ver como la diferencia de dos triángulos como los vistos anteriormente, obteniendo nuestro resultado en tal caso.

Si el triángulo no tiene vértices al infinito, entonces podemos poner dos de sus vértices en el semi-círculo de radio 1 y centro en 0, y el tercero sobre el eje imaginario. Este tipo de triángulos se puede escribir como unión e intersección de los anteriores.

□

**Ejercicio 3.** — Completar los detalles de la demostración anterior.

**Teorema 2.3.6.** — Sea  $P$  un polígono hiperbólico finito de  $n$  lados y sean  $\theta_1, \dots, \theta_n$  sus ángulos interiores. Entonces el área hiperbólica de  $P$  es finita y tiene el valor

$$\text{Area}(P) = (n - 2)\pi - \sum_{j=1}^n \theta_j$$

*Demonstración.* — Primero observamos que podemos descomponer  $P$  en  $n$  triángulos hiperbólicos, todos con un vértice en común en el interior de  $P$ . El área de  $P$  es la suma de las áreas de tales triángulos y, en consecuencia, el resultado sale del teorema anterior.

□

**Corolario 2.3.7.** — No existen rectángulos hiperbólicos.

PROBLEMAS. —

- 1.- Determine cuales son los triángulos hiperbólicos de mayor área.
- 2.- Considere un polígono hiperbólico finito de  $4g$  lados, donde  $g \geq 2$ , y tal que todos sus vértices viven en el plano hiperbólico. Si la suma de todos sus ángulos interiores es  $2\pi$ , entonces el área de este es  $4\pi(g - 1)$ .

- 3.- Sea  $n \geq 3$  un entero y sea  $\theta \in [0, +\infty)$  tal que

$$(n - 2)\pi > n\theta$$

Verifique que es posible construir un polígono hiperbólico finito de  $n$  lados y todos su ángulos interiores iguales a  $\theta$ .

- 4.- Sea  $n \geq 3$  un entero y sean  $\theta_1, \dots, \theta_n$  reales no-negativos tales que

$$(n - 2)\pi > \sum_{j=1}^n \theta_j$$

Verifique que existe un polígono hiperbólico finito de  $n$  lados cuyos ángulos interiores son  $\theta_1, \dots, \theta_n$ .

- 5.- Verificar que los siguientes subconjuntos son convexos :

- (i) Semiespacios hiperbólicos ;
- (ii) Polígonos hiperbólicos ;
- (iii) Arcos de líneas hiperbólicas ;
- (iv) Puntos.

- 6.- Si  $X \subset H$  es conjunto finito convexo, entonces  $X$  debe tener cardinalidad 1.

- 7.- Sea  $P$  un polígono hiperbólico. Verificar que si  $P$  tiene área hiperbólica finita, entonces  $P$  debe ser un polígono hiperbólico finito.

#### 2.4. Círculos hiperbólicos

**Definición 2.4.1.** — Sea  $(H, d_H)$  un modelo del plano hiperbólico. Un **disco hiperbólico** de radio  $\rho$  y centro  $p \in H$  en  $H$  es el conjunto de puntos de  $H$  que están a distancia menor que  $\rho$  del punto  $p$ . De manera similar, un **círculo hiperbólico** de radio  $\rho$  y centro  $p \in H$  en  $H$  es el conjunto de puntos de  $H$  que están a distancia  $\rho$  del punto  $p$ .

Consideremos el modelo del disco unitario de Poincaré  $\Delta$  como modelo del plano hiperbólico. Entonces tenemos que la distancia hiperbólica es dada por

$$d_{\Delta}(z, w) = \ln \frac{1 + \rho}{1 - \rho}, \quad \text{donde } \rho = \frac{|w - z|}{|1 - \bar{z}w|},$$



la forma infinitesimal de la métrica Riemanniana es dada por

$$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}$$

y la forma de área es dada por

$$dA = \frac{4dxdy}{(1 - |z|^2)^2}$$

Ya que el grupo ortogonal del plano  $O_2 < Aut(\Delta)$ , tenemos que los círculos hiperbólicos centrados en el origen son círculos Euclidianos centrados en el origen. Este argumento nos permitió asegurar que en el plano hiperbólico los círculos hiperbólicos son círculos Euclidianos.

Ahora, un círculo hiperbólico de radio hiperbólico  $\rho$  y centro en 0, es un círculo Euclidiano de radio Euclidiano  $r$  y centro 0. Luego debemos tener que  $d_\Delta(0, r) = \rho$ , de donde obtenemos la relación

$$r = \tanh(\rho/2)$$

Su perímetro hiperbólico es

$$\int_0^{2\pi} \frac{2rd\theta}{1 - r^2} = \frac{4\pi r}{1 - r^2} = 2\pi \sinh(\rho)$$

Si denotamos por  $D_r$  el disco centrado en 0 y radio Euclidiano  $r$ , entonces su área hiperbólica es dada por

$$\int \int_{D_r} \frac{4dxdy}{(1 - |z|^2)^2} = \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{4rd\theta dr}{(1 - r^2)^2} = 2\pi(\cosh(\rho) - 1) = 4\pi \sinh^2(\rho/2).$$

En resumen tenemos el siguiente hecho.

**Teorema 2.4.2.** — *Sea  $C$  un círculo hiperbólico de radio hiperbólico  $\rho$  y sea  $D$  el disco acotado por  $C$ . Entonces :*

(i) *El perímetro hiperbólico de  $C$  es*

$$2\pi \sinh(\rho).$$

(ii) *El área hiperbólica de  $D$  es*

$$2\pi(\cosh(\rho) - 1) = 4\pi \sinh^2(\rho/2).$$

**Ejemplo 2.4.3.** — Si  $g \geq 2$ , entonces el área hiperbólica de un polígono hiperbólico finito de  $4g$  lados y con la suma de todos sus ángulos interiores igual a  $2\pi$  es  $4\pi(g - 1)$ . El resultado anterior entonces asegura que no es posible colocar en el interior de tal polígono un disco hiperbólico de radio  $\rho$  si  $\cosh(\rho) > 2g - 1$ . Por ejemplo, si tomamos  $g = 2$ , entonces no es posible incrustar isométricamente un disco hiperbólico de radio hiperbólico  $\rho > 1.76275\dots$  dentro de un polígono hiperbólico de 8 lados.

PROBLEMAS. —

- 1.- Considere un triángulo hiperbólico  $T$  cuyos ángulos interiores son de la forma  $\pi/a$ ,  $\pi/b$  y  $\pi/c$ , donde  $a, b, c \geq 2$  son enteros. Determinar el radio del disco hiperbólico de mayor área que se puede colocar dentro de tal triángulo (incluido sus bordes). Generalize esto a otros polígonos hiperbólicos.
- 2.- Sean  $p_1, p_2, p_3$  tres puntos diferentes y no-colineales dentro del plano hiperbólico. Dar condiciones en esos puntos de manera que sea posible construir un triángulo hiperbólico  $T$  conteniendo uno de los puntos en cada uno de sus tres lados y cuyos ángulos interiores son una fracción entera de  $\pi$ .
- 3.- Sea  $D$  un disco hiperbólico de radio  $\rho$  y  $\partial D$  su círculo borde. Sea  $A(\rho)$  el área hiperbólica de  $D$  y sea  $L(\rho)$  su perímetro hiperbólico. Calcule el cociente

$$f(\rho) = \frac{A(\rho)}{L(\rho)}$$

y analice el comportamiento de  $f(\rho)$  cuando  $\rho$  se aproxima tanto a 0 como a  $\infty$ . Compare sus resultados con el equivalente para el caso Euclideo.

## 2.5. Trigonometría hiperbólica

Usemos como modelo de plano hiperbólico al disco unitario  $\Delta$

Consideremos un triángulo hiperbólico compacto  $T$ , cuyos vértices son denotados por  $a, b$  y  $c$ , y cuyos ángulos (Euclideos) interiores son  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$ , correspondientemente. Denotemos por  $l_t$  (donde  $t \in \{a, b, c\}$ ) la longitud hiperbólica del lado de  $T$  opuesto al vértice  $t$ .

Ya que ángulos, longitudes (hiperbólicas) son invariantes por isometrías hiperbólicas, podemos suponer que

$$a = 0, \quad 0 < b < 1, \quad c = |c|e^{i\alpha}.$$

En este caso, tenemos que

$$b = \tanh\left(\frac{l_c}{2}\right), \quad |c| = \tanh\left(\frac{l_b}{2}\right).$$

Por otro lado,

$$\sinh^2\left(\frac{l_a}{2}\right) = \sinh^2\left(\frac{d_\Delta(b, c)}{2}\right) = \frac{|b - c|^2}{(1 - b^2)(1 - |c|^2)},$$

de donde se obtiene que

$$|b - c|^2 = (1 - b^2)(1 - |c|^2) \sinh^2\left(\frac{l_a}{2}\right).$$

Ahora, como

$$|b - c|^2 = b^2 + |c|^2 - 2b|c| \cos(\alpha) =$$

$$= \tanh^2\left(\frac{l_c}{2}\right) + \tanh^2\left(\frac{l_b}{2}\right) - 2 \tanh\left(\frac{l_c}{2}\right) \tanh\left(\frac{l_b}{2}\right) \cos(\alpha),$$

de lo anterior se concluye la igualdad siguiente

$$\begin{aligned} \sinh^2\left(\frac{l_a}{2}\right) \sinh^2\left(\frac{l_b}{2}\right) \sinh^2\left(\frac{l_c}{2}\right) &= \\ &= \tanh^2\left(\frac{l_b}{2}\right) \tanh^2\left(\frac{l_c}{2}\right) - 2 \tanh\left(\frac{l_b}{2}\right) \tanh\left(\frac{l_c}{2}\right) \cos(\alpha). \end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados por

$$\cosh^2\left(\frac{l_b}{2}\right) \cosh^2\left(\frac{l_c}{2}\right)$$

y luego simplificando, se obtiene la igualdad

$$\begin{aligned} \sinh^2\left(\frac{l_a}{2}\right) &= \sinh^2\left(\frac{l_b}{2}\right) \sinh^2\left(\frac{l_c}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{l_b}{2}\right) \cosh^2\left(\frac{l_c}{2}\right) \\ &\quad - 2 \sinh\left(\frac{l_b}{2}\right) \sinh\left(\frac{l_c}{2}\right) \cosh\left(\frac{l_b}{2}\right) \cosh\left(\frac{l_c}{2}\right) \cos(\alpha), \end{aligned}$$

que es equivalente a la identidad siguiente

**Teorema 2.5.1 (Ley de Cosenos I).** —

$$\cosh(l_a) = \cosh(l_b) \cosh(l_c) - \sinh(l_b) \sinh(l_c) \cos(\alpha).$$

De manera similar se pueden obtener las siguientes leyes trigonométricas.

**Teorema 2.5.2 (Ley de Cosenos II).** —

$$\cos(\gamma) = -\cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) \cosh(l_c).$$

**Teorema 2.5.3 (Ley de Senos).** —

$$\frac{\sinh(l_a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(l_b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(l_c)}{\sin(\gamma)}.$$

Notemos que la Ley de Cosenos II nos dice que las longitudes de los lados de un triángulo hiperbólico compacto están únicamente determinadas por los ángulos interiores. Esto no es verdad en el caso Euclideo !!

## PROBLEMAS. —

- 1.- Obtener, como consecuencias de la Ley de Cosenos I, la Ley de Cosenos II y la Ley de Senos.
- 2.- Si  $T$  es un triángulo rectángulo compacto, establecer el equivalente al teorema de Pitágoras.
- 3.- Si  $T$  es un triángulo compacto. Ver que si sus tres ángulos interiores son iguales, entonces sus tres lados tienen la misma longitud. Recíprocamente, si los tres lados tienen la misma longitud, entonces sus tres ángulos interiores son iguales.
- 4.- Determine un espacio que parametrice todos los triángulos hiperbólicos compactos módulo isometrías hiperbólicas.

## CAPÍTULO 3

### TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS N-DIMENSIONALES

En este capítulo extenderemos los resultados y observaciones hechas para transformaciones (extendidas) de Möbius planares para el caso de cualquier dimensión. Para esto primero definiremos las reflexiones en esferas generalizadas en forma similar a como definimos reflexiones en círculos generalizados. Luego obtendremos las transformaciones (extendidas) de Möbius por medio de composición de reflexiones. Como consecuencia del teorema de Liouville veremos que de esta manera obtenemos todos los automorfismos conformales y anticonformales de la esfera. A continuación daremos una clasificación de ellas y definiremos sus esferas isométricas. Podemos ver la esfera unitaria  $n$ -dimensional (por medio de una proyección estereográfica) como una esfera generalizada en la esfera  $(n + 1)$ -dimensional. Veremos que podemos extender la acción de las transformaciones (extendidas) de Möbius en dimensión  $n$  a transformaciones (extendidas) de Möbius de dimensión  $(n + 1)$ : la extensión de Poincaré.

#### 3.1. La proyección estereográfica

Consideremos la función  $\phi : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow S^n$ , definida por

$$\phi(x) = \left( \frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right)$$

$$\phi(\infty) = (0, \dots, 0, 1),$$

donde  $S^n$  es la esfera unitaria centrada en el origen de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Definición 3.1.1.** — El homeomorfismo  $\phi : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow S^n$  es llamado la **proyección estereográfica**  $n$ -dimensional.

PROBLEMAS. —

- 1.- Verificar que  $\phi$  es un homeomorfismo. Verifique además que si  $S \subset \widehat{\mathbb{R}}^n$  es una esfera generalizada, entonces  $\phi(S)$  es la intersección ortogonal de  $S^n$  con (i) una esfera  $n$ -dimensional de  $\mathbb{R}^{n+1}$  ó bien (ii) un subespacio lineal de dimensión  $n$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Este tipo de homeomorfismo es llamado una

proyección estereográfica (compare con el caso bi-dimensional discutido anteriormente).

### 3.2. Transformaciones (extendidas) de Möbius $n$ -dimensionales

De manera similar que en el caso de dimensión dos, podemos hablar de esferas generalizadas en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  y de sus reflexiones. De manera más concreta ; primero consideramos la compactificación de Alexandroff  $\widehat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ .

**Definición 3.2.1.** — Una **esfera generalizada** de dimensión  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  en el espacio  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  es una esfera Euclidiana  $k$ -dimensional de  $\mathbb{R}^n$  ó bién la unión del punto  $\infty$  con un plano  $k$ -dimensional en  $\mathbb{R}^n$ . Cuando  $k = n - 1$  hablaremos de una esfera generalizada sin referirnos a su dimensión.

Cada esfera generalizada  $\Sigma$  en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  define un difeomorfismo

$$\sigma_\Sigma : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$$

de orden dos que preserva ángulos pero que invierte la orientación ; concretamente :

(i) Si  $\Sigma$  es una esfera en  $\mathbb{R}^n$  de radio  $r > 0$  y centro en  $p \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$\sigma_\Sigma(x) = \frac{r^2(x - p)}{\|x - p\|^2} + p$$

(ii) Si  $\Sigma$  es un hiperplano que pasa por el punto  $p \in \mathbb{R}^n$  y que tiene como vector ortogonal  $v \in S^{n-1}$ , entonces

$$\sigma_\Sigma(x) = x - 2\{(x - p) \cdot v\}v$$

**Definición 3.2.2.** — Denotamos por  $\widehat{\mathbb{M}}^n$  al grupo de difeomorfismos de  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  generado por las reflexiones en las esferas generalizadas. El subgrupo de índice dos de difeomorfismos que preservan la orientación es denotado por  $\mathbb{M}^n$ . Los elementos de  $\mathbb{M}^n$  son llamados **transformaciones de Möbius** y los que viven en  $\widehat{\mathbb{M}}^n - \mathbb{M}^n$  son llamados **transformaciones extendidas de Möbius**.

**Proposición 3.2.3.** — El grupo  $\widehat{\mathbb{M}}^n$  está generada por las siguientes transformaciones :

- (i) **Traslaciones** :  $t(x) = x + a$ , donde  $a \in \mathbb{R}^n$  ;
- (ii) **Dilataciones** :  $t(x) = \lambda x$ , donde  $\lambda \in (0, +\infty)$  ;
- (iii) **Rotaciones** :  $t(x) = Rx$ , donde  $R \in SO_n$  ;
- (iv) **Inversión** :  $t(x) = x/\|x\|^2$ .

*Demonstración.* — Ver Problema 1.-.

□

**Teorema 3.2.4.** — *Toda transformación (extendida) de Möbius envía esferas generalizadas de dimensión  $k$  en esferas generalizadas de dimensión  $k$ . Además, cada una de esas transformaciones preserva ángulos Euclidianos, en particular, las transformaciones (extendidas) de Möbius son automorfismos conformales (anti-conformales) de  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ .*

*Demonstración.* — Ver Problema 2.-. □

**Observación 3.2.5 (Esferas generalizadas y esferas topológicas)**

El resultado anterior nos permite dar una definición equivalente de esferas generalizadas como sigue. Una **esfera generalizada** de dimensión  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  es la imagen por una transformación (extendida) de Möbius de la  $k$ -esfera Euclidiana

$$S_k = \{(x_1, \dots, x_n) : x_{k+2} = \dots = x_n = 0, x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2 = 1\}.$$

De manera similar uno tiene las  $k$ -**esferas topológicas** de  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  (cuando  $k = n-1$  hablaremos de una esfera topológica) que son la imagen homeomorfa de  $S_k$ , es decir, incrustaciones topológicas de  $S_k$  en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ .

Es importante hacer notar aquí que aunque cada esfera generalizada divide  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  en dos bolas Euclidianas, para el caso de esferas topológicas la situación es más patológica. Por ejemplo, en  $n \geq 3$  se pueden construir esferas topológicas que dividen  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  en abiertos que no son contractibles.

Ya habíamos visto que para  $n = 2$  las transformaciones de Möbius y extendidas de Möbius dan todos los automorfismos conformales y anticonformales de la esfera de dimensión 2. El siguiente resultado muestra que en efecto esto también es verdad para  $n \geq 3$ .

**Teorema 3.2.6 (Teorema de Louville [8]).** — *Sean  $n \geq 3$ ,  $U, V \subset \widehat{\mathbb{R}}^n$ ,  $U, V \neq \emptyset$  subconjuntos abiertos y conexos. Entonces toda función inyectiva conformal (respectivamente, anticonformal)*

$$f : U \rightarrow V$$

*es la restricción de una transformación de Möbius (respectivamente, extendida de Möbius).*

**Corolario 3.2.7.** — *Si  $n \geq 3$  y  $U \neq \emptyset$  es un subconjunto abierto y conexo de  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ , entonces su grupo  $Aut(U)$  de automorfismos conformales y anticonformales satisface que*

$$Aut(U) = \{t \in \widehat{\mathbb{M}}^n : t(U) = U\}$$

*y en particular*

$$Aut(\widehat{\mathbb{R}}^n) = \widehat{\mathbb{M}}^n$$

PROBLEMAS. —

- 1.- Verificar que traslaciones, dilataciones, rotaciones e inversión están en  $\widehat{\mathbb{M}}^n$  y demostrar la Proposición 3.2.3.
- 2.- Probar el Teorema 3.2.4.
- 3- Verificar que toda transformación de Möbius es composición de un número par de reflexiones y que cada transformación extendida de Möbius es una composición de un número impar de reflexiones.
- 4.- Verificar que cada transformación (extendida) de Möbius preserva ángulos. ¿Qué pasa con la orientación?

### 3.3. Clasificación de las transformaciones de Möbius

Supongamos que tenemos una transformación (extendida) de Möbius  $t$ , diferente de la identidad, que tiene al menos un punto fijo. Podemos conjugarla por una transformación de Möbius para asumir que tal punto fijo es  $\infty$ . Podemos componer a la izquierda por una traslación  $p$  de manera que  $p \circ t(0) = 0$ . Ya que  $p \circ t$  preserva ángulos, tenemos que existe una transformación ortogonal  $r$  tal que  $r \circ p \circ t$  satisface que  $r \circ p \circ t(e_j) = \lambda_j e_j$ , para  $j = 1, \dots, n$ , donde  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ . Si miramos la diferencial de  $r \circ p \circ t$  y usamos el hecho que debe preservar ángulos, entonces tendremos que  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda$ . En resumen, tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 3.3.1.** — *Sea  $t$  una transformación (extendida) de Möbius, diferente de la identidad, con al menos un punto fijo. Entonces existe una transformación de Möbius  $s$  de manera que existen  $\lambda > 0$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$  y una matriz ortogonal  $r$  tales que*

$$s \circ t \circ s^{-1}(x) = \lambda r(x) + a$$

*Además, tal transformación  $s \circ t \circ s^{-1}$  no tiene otro punto fijo sí y sólo si  $\lambda = 1$  y  $a$  no pertenece a la imagen de la transformación lineal  $I - r$ .*

**Definición 3.3.2.** — Una transformación de Möbius con sólo un punto fijo es llamada una **transformación parabólica**. De manera similar, si  $t$  es una transformación extendida de Möbius con un único punto fijo es llamada **transformación pseudo-parabólica**. En este caso, módulo conjugación por una transformación de Möbius, tenemos por la proposición anterior que estas transformaciones son de la forma

$$t(x) = \lambda r(x) + a$$

donde  $\lambda > 0$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $r$  es una matriz ortogonal y  $a$  no pertenece a la imagen de la transformación lineal  $I - \lambda r$ . De esta manera,  $\lambda > 0$  es valor propio de la matriz ortogonal  $r$ , es decir,  $\lambda = 1$ .



Supongamos ahora que la transformación de Möbius  $t$  tiene al menos dos puntos fijos. Módulo conjugación por una transformación de Möbius, podemos suponer que

$$t(x) = \lambda r(x)$$

donde  $\lambda > 0$  y  $r$  es una matriz ortogonal. Si  $\lambda^2 \neq 1$ , entonces diremos que ella es una **transformación loxodrómica** en el caso de una transformación de Möbius y en el caso que sea una transformación extendida de Möbius diremos que es una **transformación pseudo-hiperbólica**.

En caso que  $\lambda^2 = 1$  ó en el caso que  $t$  no tenga puntos fijos en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  diremos que es una **transformación elíptica** si es transformación de Möbius ó una **transformación pseudo-elíptica** si esta es extendida de Möbius.

PROBLEMAS. —

- 1.- Sea  $C$  una esfera generalizada de dimension  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  en  $S^n$ . Verificar que existe una transformación elíptica cuyo conjunto de puntos fijos es  $C$ .
- 2.- Sea  $C \subset S^n$  una esfera generalizada de dimensión  $n-1$  y  $\tau$  la reflexión en  $C$ . Verificar que  $\tau$  conmuta con toda transformación (extendida) de Möbius que preserva  $C$ .
- 3.- Toda transformación de Möbius de orden finito es una transformación elíptica. Dar un ejemplo de una transformación elíptica de orden infinito.
- 4.- Calcular la dimensión de  $\mathbb{M}^n$ .
- 5.- Sea  $C \subset S^n$  una esfera generalizada de dimensión  $n-1$ . Verifique que toda transformación (extendida) de Möbius que deja invariante  $C$  corresponde a una transformación (extendida) de Möbius de  $S^{n-1}$ . Dar un ejemplo de una transformación de Möbius  $t \in \mathbb{M}^n$  que deja invariante  $C$  que induce una transformación extendida de Möbius en  $S^{n-1}$ .

### 3.4. Extensión de Poincaré

En la primera sección de este capítulo definimos la proyección estereográfica

$$\phi : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Si  $t \in \mathbb{M}^{n+1}$ , entonces  $t(S^n) = \Sigma$  resulta ser una esfera generalizada en  $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ . Si componemos  $\phi$  por la izquierda con la transformación de Möbius  $t$ , entonces obtenemos una incrustación  $\psi = t \circ \phi : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \Sigma$ , las cual será también llamada una proyección estereográfica. Denotemos por  $\sigma$  la reflexión en  $\Sigma$ . Ya que  $\phi$  envía esferas generalizadas de  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  en una intersección ortogonal de  $S^n$  con una esfera generalizada de  $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ , que  $t$  preserva ángulos y también envía esferas generalizadas en esferas generalizadas, obtenemos que  $\psi$  envía cada esfera generalizada  $C \subset \widehat{\mathbb{R}}^n$  en la intersección ortogonal de  $\Sigma$  con una esfera generalizada  $\Upsilon$  de  $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ .

No es difícil ver que la reflexión  $\sigma_C$  es enviada por  $\psi$  en la restricción de la reflexión en  $\Upsilon$ . De esta manera, podemos ver la reflexión en  $\Upsilon$  como una extensión de la reflexión en  $C$  (una vez fijada la proyección estereográfica  $\psi$ ).

**Definición 3.4.1.** — Cada extensión obtenida con el proceso anterior es llamada la **extensión de Poincaré** de la reflexión correspondiente. Lo anterior permite también definir la extensión de Poincaré de cada transformación (extendida) de Möbius como la composición de las extensiones de Poincaré de las reflexiones.

En el Problema 1.- se incrusta la esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$  de manera adecuada dentro de  $\mathbb{R}^3$  de tal manera que los automorfismos holomorfos y anti-holomorfos se pueden ver como la restricción de los automorfismos conformales y anti-conformales de  $\widehat{\mathbb{R}}^3$  que dejan invariante la bola unitaria centrada en el origen. De esta manera tenemos dos mundos diferentes interrelacionados.

**Observación 3.4.2.** — Cada transformación de Möbius  $T \in \widehat{\mathbb{M}}^n$  tiene una extensión de Poincaré  $\widetilde{T} \in \widehat{\mathbb{M}}^{n+1}$ , que deja invariante la bola unitaria. Supongamos que  $T$  no tiene puntos fijos en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  (una transformación elíptica). El teorema del punto fijo de Brouwer nos asegura que  $\widetilde{T}$  debe tener un punto fijo en la clausura del semiespacio superior. Esto obliga a que  $\widetilde{T}$  debe tener puntos fijos en el interior de tal bola unitaria.

PROBLEMAS. —

1.- Considere la proyección estereográfica

$$\psi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \{x = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3\} \cup \{\infty\}$$

definida por

$$\psi(z) = (Re(z), Im(z), 0)$$

$$\psi(\infty) = \infty$$

Identifiquemos el plano  $\{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3\}$  con  $\mathbb{C} \times (0, +\infty)$  usando la regla

$$x_1 = Re(z), x_2 = Im(z), x_3 = t.$$

Verifique que la extensión de Poincaré de la transformación de Möbius

$$t(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

es dada por

$$\widehat{t}(z, r) = \left( \frac{(az + b)(\overline{cz + d}) + a\bar{c}r^2}{|cz + d|^2 + |c|^2r^2}, \frac{r}{|cz + d|^2 + |c|^2r^2} \right)$$

2.- Determinar la dimensión del espacio de transformaciones de Möbius que deja invariante la bola unitaria de  $\mathbb{R}^n$ .

### 3.5. Esferas isométricas

Ya sabemos como lucen aquellas transformaciones (extendidas) de Möbius con un punto fijo en  $\infty$ . Supongamos que  $t \in \widehat{\mathbb{M}}^n$  es tal que  $t(\infty) \neq \infty$ . Podemos proceder como en el caso planar. Sea  $p = t^{-1}(\infty)$  y  $q = t(\infty)$ . Si  $p = q$  denotamos  $\tau = I$  y si  $p \neq q$ , entonces  $\tau$  es la reflexión en el hiperplano ortogonal a la línea que conecta  $p$  con  $q$  y que además pasa por el punto  $(p + q)/2$ . Si tomamos una esfera  $S_R$  centrada en  $p$  y radio  $R$ , entonces consideramos  $b = t^{-1} \circ \tau \circ \sigma_R$ , donde  $\sigma_R$  es la reflexión en la esfera  $S_R$ . Pero en este caso vemos que  $b(\infty) = \infty$ , luego  $b(x) = \lambda_R O_R x + a_R$ , donde  $\lambda_R > 0$ ,  $O_R$  es transformación ortogonal y  $a_R \in \mathbb{R}^n$ . También tenemos que  $b(p) = p$ , de donde  $a_R = p - \lambda_R O_R p$  y luego  $B(x) = \lambda_R O_R(x - p) + p$ . Usando esto, podemos ver que  $\tau \circ \sigma_R(x) = t(\lambda_R O_R(x - p) + p)$ , de donde se ve que la esfera  $S_R$  es enviada por  $t$  a una esfera centrada en  $q$  y de radio  $R\lambda_R$  (la esfera  $S_*$  centrada en  $p$  y radio  $R/\lambda_R$  es enviada por  $\lambda_R r_R(x - p) + p$  en la esfera  $S_R$  y esta enviada por  $\tau \circ \sigma_R$  en la esfera de radio  $R\lambda_R$  centrada en  $q = \tau(p)$ ). De esta manera obtenemos que las esferas centradas en  $t^{-1}(\infty)$  son enviadas por  $t$  en esferas centradas en  $t(\infty)$ .

Tomando  $R = 1$ , lo anterior permite obtener que

$$t(\lambda_1 O_1(x - p) + p) = \tau \circ \sigma_1(x)$$

De esto vemos que la esfera centrada en  $p$  y radio  $r$  es enviada por  $t$  en la esfera centrada en  $q$  y radio  $\tilde{r} = \lambda_1/r$ . Ahora, la función  $R : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty) : r \mapsto \lambda_1/r$  es una función estrictamente decreciente que tiende a  $+\infty$  (respectivamente, a 0) cuando  $r$  tiende a 0 (respectivamente, a  $+\infty$ ). En particular, debe existir un único punto  $r^* > 0$  tal que  $R(r^*) = r^*$ ; de hecho,  $r^* = +\sqrt{\lambda_1}$ . En otras palabras, existe una única esfera centrada en  $t^{-1}(\infty)$  cuya imagen por  $t$  es una esfera del mismo radio (que además debe estar centrado en  $t(\infty)$ ).

**Definición 3.5.1.** — La (única) esfera centrada en  $t^{-1}(\infty)$  cuya imagen por  $t$  es una esfera del mismo radio es llamada la **esfera isométrica** de  $t$ , denotada por  $I_t$ . Esta esfera  $I_t$  tiene la forma :

$$I_t = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - t^{-1}(\infty)\| = +\sqrt{\lambda_1}\}$$

**Proposición 3.5.2.** — Sea  $t \in \widehat{\mathbb{M}}^n$  diferente de la identidad y tal que  $t(\infty) \neq \infty$ . Entonces

$$t = \tau \circ \sigma \circ O$$

donde  $\tau$  es la identidad si  $t^2 = I$  ó bien la reflexión en el hiperplano ortogonal al trazo de línea que conecta los puntos  $t^{-1}(\infty)$  y  $t(\infty)$  en el punto medio,  $O$  es una rotación con  $t^{-1}(\infty)$  como punto fijo (luego ambas isometrías Euclidianas) y  $\sigma$  es la reflexión en la esfera isométrico  $I_t$ .

*Demonstración.* — Ver Problema 2.-. □

PROBLEMAS. —

1.- Verificar la igualdad

$$t(I_t) = I_{t^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - t(\infty)\| = +\sqrt{\lambda_1}\}$$

2.- Pruebe la Proposición 3.5.2.

3.- Determine el tipo de una transformación de Möbius (que no fija  $\infty$ ) en términos de la configuración geométrica de su esfera isométrica y la de su inversa.

### 3.6. Distorsión del volumen

De manera similar como en el caso planar, lo anterior nos permite la siguiente generalización de la Proposición 1.15.4.

**Proposición 3.6.1.** — Sea  $t$  una transformación (extendida) de Möbius tal que  $t(\infty) \neq \infty$  y sea  $R_t$  el radio de la esfera isométrica  $I_t$  de  $t$ . Si  $E \subset \widehat{\mathbb{R}}^n$  es un conjunto cerrado tal que  $t^{-1}(\infty) \notin E$ , entonces

$$\text{diam}_{\text{Eucl}}(t(E)) \leq 2R_t^2/\rho$$

donde  $\rho$  es la distancia Euclidiana de  $t^{-1}(\infty)$  al conjunto  $E$ . Si además,  $\infty \in E$ , entonces también tenemos que

$$\text{diam}_{\text{Eucl}}(t(E)) \geq R_t^2/\rho$$

### 3.7. Razón cruzada en $\widehat{\mathbb{R}}^n$

Anteriormente habíamos definido la razón cruzada de cuatro números complejos en la esfera de Riemann. Ahora procederemos a definir un equivalente en mayores dimensiones. Recordemos que tenemos la proyección estereográfica  $\phi : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow S^n$ , definida por

$$\phi(x) = \left( \frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right)$$

$$\phi(\infty) = (0, \dots, 0, 1),$$

donde  $S^n$  es la esfera unitaria centrada en el origen de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Esto nos permite trasladar la métrica esférica de  $S^n$  por  $\phi$  para obtener la métrica

$$d(x, y) = \|\pi(x) - \pi(y)\| = \begin{cases} \frac{2\|x - y\|}{(1 + \|x\|^2)^{1/2}(1 + \|y\|^2)^{1/2}}, & x, y \in \mathbb{R}^n \\ \frac{2}{(1 + \|x\|^2)^{1/2}}, & y = \infty \end{cases}$$

**Definición 3.7.1.** — La **razón cruzada** de cuatro puntos  $x, y, u, v \in \widehat{\mathbb{R}}^n$  tales que  $x \neq y, u \neq v$ , es definida por

$$[x, y; u, v] = \frac{d(x, u)d(y, v)}{d(x, y)d(u, v)}$$

**Observación 3.7.2.** — En el caso  $n = 2$ , la razón cruzada aquí definida corresponde al valor absoluto de la razón cruzada definida anteriormente.

La razón cruzada nos permite dar una definición equivalente de transformaciones (extendidas) de Möbius.

**Proposición 3.7.3.** — Sea  $T : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$  una función biyectiva. Entonces  $T \in \widehat{\mathbb{M}}^n$  si y sólo si  $T$  preserva las razones cruzadas.

*Demonstración.* — Observemos que, al ser isometrías Euclidianas, las traslaciones y rotaciones dejan invariante la razón cruzada. Una dilatación  $D(x) = \lambda x$ ,  $\lambda > 0$ , también deja invariante la razón cruzada por inspección directa. La reflexión  $J(x) = x/\|x\|^2$  satisface la igualdad

$$\|J(x) - J(y)\|\|x\|\|y\| = \|x - y\|$$

de donde se ve que también preserva las razones cruzadas. Ya que estas transformaciones forman un conjunto de generadores para  $\widehat{\mathbb{M}}^n$ , tenemos una dirección lista.

Supongamos ahora que tenemos  $T : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$  una función biyectiva. Al componer por una transformación de Möbius adecuada, podemos asumir que  $T(\infty) = \infty$ . Procedemos a ver que para cada par  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq y$ , vale que la fracción

$$\frac{\|T(x) - T(y)\|}{\|x - y\|}$$

es constante, digamos  $k > 0$ . En efecto, sean  $u, v \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \neq v$ . Entonces, gracias a que  $T$  preserva la razón cruzada, valen las igualdades :

$$[T(x), \infty; T(u), T(v)] = [x, \infty; u, v]$$

$$[T(x), T(y); T(u), \infty] = [x, y; u, \infty]$$

de las cuales se obtiene directamente la igualdad

$$\frac{\|T(x) - T(y)\|}{\|x - y\|} = \frac{\|T(u) - T(v)\|}{\|u - v\|}$$

Ahora, la función  $S(x) = \frac{1}{k}T(x)$  satisface

$$\|S(x) - S(y)\| = \|x - y\|$$

para todo par  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq y$ . Luego,  $S$  es una isometría Euclidiana, es decir,  $S(x) = R(x) + a$ , donde  $R \in O_n$  y  $a \in \mathbb{R}^n$ . Luego,  $T(x) = kR(x) + ka$  es una transformación (extendida) de Möbius.

□

PROBLEMAS. —

1.- Verificar que si  $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n$  tales que  $x \neq y$ ,  $u \neq v$ , entonces :

$$[x, y; u, v] = \frac{\|x - u\| \|y - v\|}{\|x - y\| \|u - v\|}$$

$$[\infty, y; u, v] = \frac{\|y - v\|}{\|u - v\|}$$

$$[x, \infty; u, v] = \frac{\|x - u\|}{\|u - v\|}$$

$$[x, y; \infty, v] = \frac{\|y - v\|}{\|x - y\|}$$

$$[x, y; u, \infty] = \frac{\|x - u\|}{\|x - y\|}$$

## CAPÍTULO 4

### EL ESPACIO HIPERBÓLICO

En este capítulo definiremos el espacio hiperbólico  $n$ -dimensional de manera equivalente a como lo hicimos en el caso planar. Daremos diferentes modelos de este espacio hiperbólico dentro del espacio  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ . Existen otros modelos del espacio hiperbólico que no trataremos en este texto.

#### 4.1. Métricas hiperbólicas

**Definición 4.1.1.** — Sea  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ . Una  $k$ -esfera generalizada en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  es por definición una de los siguientes objetos :

- (i) la unión del punto al infinito con un plano  $k$ -dimensional en  $\mathbb{R}^n$ , ó bien
- (ii) una esfera Euclidiana  $k$ -dimensional en  $\mathbb{R}^n$ .

Cuando  $k = 1$ , entonces hablamos de un **círculo generalizado** y cuando  $k = n - 1$ , hablamos de una **esfera generalizada**.

Si consideremos una esfera generalizada  $S \subset \widehat{\mathbb{R}}^n$ , entonces tenemos que  $\widehat{\mathbb{R}}^n - S$  consiste de dos bolas abiertas Euclidianas ; cada una de esas bolas es llamada una **bola generalizada**.

**Definición 4.1.2.** — Sea  $H \subset \widehat{\mathbb{R}}^n$  una bola generalizada con borde dada por la esfera generalizada  $S$ .

1. Un **plano hiperbólico  $k$ -dimensional** de  $H$  es la intersección de  $H$  con una  $k$ -esfera generalizada que es ortogonal a  $S$ . Un plano hiperbólico 1-dimensional es también llamado una **línea hiperbólica**.
2. Sea  $L = H \cap \Sigma$  una línea hiperbólica, donde  $\Sigma$  es un círculo generalizado ortogonal a  $S$ . Los puntos de la intersección  $\Sigma \cap S$  son llamados los **puntos finales** de la línea hiperbólica  $L = H \cap \Sigma$ .
3. Dado dos puntos  $x, y \in H$  definimos su **distancia hiperbólica**  $d_H(x, y)$  de la siguiente manera (comparar con la definición hecha para el plano hiperbólico) :
  - (i) Si  $x = y$ , entonces  $d_H(x, y) = 0$  ;

- (ii) Si  $x \neq y$ , entonces existe un único círculo generalizado  $\Sigma$  ortogonal a  $S$  tal que  $x, y \in \Sigma$ . Denotemos por  $a$  y  $b$  los puntos finales la línea hiperbólica  $L_{x,y} = \Sigma \cap H$ , de manera que en  $L_{x,y}$  el orden consecutivo es dado como  $a, x, y, b$ . Definimos

$$d_H(x, y) = \ln[a, x; y, b] = \ln \left( \frac{d(x, b)d(a, y)}{d(x, a)d(b, y)} \right)$$

**Proposición 4.1.3.** — Si  $H$  es una bola generalizada en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ , entonces  $d_H$  resulta ser una métrica en  $H$  y además tenemos que

$$\text{Aut}(H) < \text{Iso}_{d_H}(H)$$

donde  $\text{Iso}_{d_H}(H)$  denota el grupo de isometrías de  $H$  respecto  $d_H$ .

*Demonstración.* — Observemos que en (ii) el valor  $d_H(x, y) > 0$  ya que podemos encontrar una transformación de Möbius  $T$  de manera que  $T(a) = 0, T(x) = e_1, T(y) = \lambda e_1, T(b) = \infty$ , para algún  $\lambda > 1$ . Proposición 3.7.3 permite observar que :

$$[a, x; y, b] = [0, e_1; \lambda e_1, \infty] = \lambda > 1.$$

Es claro de la definición que (i)  $d_H(x, y) \geq 0$ , (ii)  $d_H(x, y) = 0$  sí y sólo si  $x = y$ , y (iii)  $d_H(x, y) = d_H(y, x)$ .

La desigualdad triangular es consecuencia de los siguientes dos hechos : (a) dados tres puntos  $x, y, w \in H$  siempre es posible encontrar un plano hiperbólico 2-dimensional  $H_2 \subset H$  conteniendoles y (b) la razón cruzada es invariante por transformaciones (extendidas) de Möbius  $n$ -dimensionales.

La invariancia de la razón cruzada por transformaciones de Möbius y la definición de la métrica hiperbólica permite asegurar la última parte de la proposición.  $\square$

**Definición 4.1.4.** — Si  $H$  es una bola generalizada en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ , entonces el par  $(H, d_H)$  es llamado **un modelo del espacio hiperbólico  $n$ -dimensional**.

**Ejemplo 4.1.5.** — Consideremos  $S = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$  y

$$H = B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$$

Tenemos que si  $y \in B^n, y \neq 0$ , entonces

$$d_{B^n}(0, y) = \ln\left[0, \frac{-y}{\|y\|}; \frac{y}{\|y\|}, y\right] = \ln \left( \frac{1 + \|y\|}{1 - \|y\|} \right)$$



Dados dos puntos  $x, y \in B^n - \{0\}$ ,  $x \neq y$ , entonces consideramos la reflexión  $\sigma \in \text{Aut}(B^n)$  definida por

$$\sigma(p) = \frac{(1 - \|x\|^2)(\|x\|^2 p - x)}{\|\|x\|^2 p - x\|^2} + \frac{x}{\|x\|^2},$$

la cual satisface que  $\sigma(x) = 0$ . De esta manera, obtenemos que

$$d_{B^n}(x, y) = d_{B^n}(0, \sigma(y)) = \ln \left( \frac{1 + \|\sigma(y)\|}{1 - \|\sigma(y)\|} \right)$$

Usando el modelo  $(B^n, d_{B^n})$  para el espacio hiperbólico y el hecho que el grupo ortogonal  $O_n$  es subgrupo de  $\text{Aut}(B^n)$ , obtenemos el siguiente.

**Proposición 4.1.6.** — *Los puntos que equidistan a una distancia  $\rho > 0$  de un punto dado en  $H$ , respecto a la métrica hiperbólica  $d_H$ , forman una esfera Euclidiana.*

**Teorema 4.1.7.** — *El grupo de las isometrías hiperbólicas de  $H$  es exactamente  $\text{Aut}(H) < \widehat{\mathbb{M}}^n$ .*

*Demonstración.* — La idea de la demostración sigue la misma línea que la demostración para el caso del plano hiperbólico. En este caso usamos el modelo de la bola unitaria  $B^n(0)$ . Sea  $t$  una isometría. Primero podemos componer  $t$  a la izquierda por un automorfismo conformal de  $B^n(0)$  para suponer que  $t(0) = 0$ . Ahora, bajo estas condiciones  $t(x) = \lambda O(x)$ , donde  $O$  es una transformación ortogonal y  $\lambda > 0$ . Como  $t$  debe preservar la esfera unitaria, obtenemos que  $\lambda = 1$ ; luego  $t = O$ . □

**Ejemplo 4.1.8.** — Otro modelo muy usado del espacio hiperbólico es el **semi-espacio superior**

$$H = \mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}.$$

Observemos que

$$f = b \circ a : \mathbb{H}^n \rightarrow B^n,$$

definido por la composición de las reflexiones

$$a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$$

y

$$b(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0, 1) + \frac{2(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n - 1)}{(x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + (x_n - 1)^2)},$$

es una transformación de Möbius que produce un homeomorfismo entre  $\mathbb{H}^n$  y  $B^n$ .

Observe que  $b$  es la reflexión en la esfera  $(n - 1)$ -dimensional centrada en el punto  $(0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$  de radio  $\sqrt{2}$ . Luego,  $f : \mathbb{H}^n \rightarrow B^n$  resulta ser una isometría en las métricas hiperbólicas.

PROBLEMAS. —

- 1.- Verificar los detalles de la demostración de la Proposición 4.1.3.
- 2.- Probar Proposición 4.1.6.
- 3.- Verificar que

$$\cosh(d_{\mathbb{H}}(x, y)) = 1 + \frac{\|x - y\|^2}{2x_n y_n}$$

- 4.- Sean  $L_1$  y  $L_2$  dos líneas hiperbólicas en el espacio hiperbólico  $(H, d_H)$ . Supongamos que  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$  y que los puntos finales de  $L_1$  son diferentes de los puntos finales de  $L_2$ . Verifique que existe una y sólo una línea hiperbólica ortogonal a ambas. Indicación : Verifique que puede encontrar una esfera dos dimensional (dentro de la esfera  $(n - 1)$ -dimensional que es el borde de  $H$ ) que contiene los cuatro puntos finales. Ahora vea que basta con ver la situación 3-dimensional. Use el modelo del semi-espacio superior  $\mathbb{H}^3$  y suponga que una de las líneas es el semieje  $x_1 = x_2 = 0, x_3 > 0$ .
- 5.- Verificar que  $d = d_{\mathbb{H}^n}$ .

## 4.2. Forma infinitesimal

Usemos como modelo del espacio hiperbólico  $n$ -dimensional el semi-espacio

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}.$$

Si buscamos una métrica Riemanniana de la forma  $ds = \lambda(x)\|dx\|$ , donde  $\lambda : \mathbb{H}^n \rightarrow (0, +\infty)$ , para la cual queremos que los automorfismos de  $\mathbb{H}^n$  sean isometrías (procediendo de manera similar a como lo hemos hecho para el caso de  $\mathbb{H}^2$ ) obtendremos que  $\lambda(x) = r/x_n$ , para  $r > 0$ . Si queremos que la métrica que induce sobre  $\mathbb{H}^n$  coincida con  $d_{\mathbb{H}^n}^n$ , entonces debemos tomar  $r = 1$ , es decir, debemos considerar la métrica Riemanniana dada por la siguiente forma infinitesimal (comparar con el caso del semi-plano hiperbólico)

$$ds = \frac{\|dx\|}{x_n}.$$

La longitud hiperbólica de un camino diferenciable

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^n : \tau \mapsto \gamma(\tau) = x(\tau)$$

es dada por

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \int_a^b \frac{\|x'(\tau)\| d\tau}{x_n(\tau)}$$

Como  $\gamma([a, b])$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{H}^n$ , debemos tener valores  $0 < T < S < \infty$  tales que  $x_n(\tau) \in [T, S]$ . En particular, se puede ver que

$$(*) \quad \frac{1}{S} \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}(\gamma) \leq \mathcal{L}(\gamma) \leq \frac{1}{T} \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}(\gamma)$$

donde  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}(\gamma)$  denota la longitud Euclideana de  $\gamma$ .

La distancia hiperbólica  $d(p, q)$  entre dos puntos  $p, q \in \mathbb{H}^n$  es dada por el ínfimo de las longitudes de todas los caminos continuos que hay entre  $p$  y  $q$ .

Para el modelo dado por la bola unitaria  $n$ -dimensional

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\},$$

tenemos la métrica Riemanniana

$$ds = \frac{2\|dx\|}{1 - \|x\|^2}$$

El homeomorfismo que preserva orientación

$$f = b \circ a : \mathbb{H}^n \rightarrow B^n$$

definido por la composición de las reflexiones

$$a(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$$

y

$$b(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0, 1) + \frac{2(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n - 1)}{(x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + (x_n - 1)^2)}$$

resulta ser una isometría. En particular, una vez resuelto el ejercicio anterior, tendremos que esta métrica Riemanniana define la métrica hiperbólica  $d_{B^n}$ .

### 4.3. El espacio hiperbólico 3-dimensional $\mathbb{H}^3$

Consideremos el modelo del espacio hiperbólico 3-dimensional dado por

$$H = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : t > 0\}$$

y

$$ds = \frac{\sqrt{|dz|^2 + dt^2}}{t}.$$

En este caso tenemos que  $\text{Aut}(H) = \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ , dado por la extensión de Poincaré de las transformaciones de Möbius planares. Esta extensión es dada de la siguiente manera explícita : la transformación de Möbius

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (ad - bc) = 1,$$

tiene extensión de Poincaré dada por :

$$\hat{T}(z, t) = \left( \frac{(az + b)(\overline{cz + d}) + a\bar{c}t^2}{|cz + d|^2 + |c|^2t^2}, \frac{t}{|cz + d|^2 + |c|^2t^2} \right)$$

#### 4.4. Norma de elementos de $Aut(\mathbb{H}^3)$

Definimos la **norma de una transformación de Möbius**

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (ad - bc) = 1,$$

como

$$\|T\|^2 = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2.$$

Para puntos  $p = (0, t), q = (0, s) \in \mathbb{H}^3$  tenemos que

$$\cosh d(p, q) = \cosh \left( \log \frac{s}{t} \right) = \frac{|p - q|^2}{2st} + 1.$$

Ambos lados de la igualdad anterior son invariante por isometrías de  $(\mathbb{H}^3, ds)$ . Luego, esta fórmula es válida para todo par de puntos  $p, q \in \mathbb{H}^3$ .

Consideremos ahora cualquier par de puntos  $p = (u, t), q = (v, s) \in \mathbb{H}^3$  y la extensión de Poincaré de la reflexión  $J(z) = 1/\bar{z}$ , es decir,

$$\hat{J}(z, t) = \left( \frac{z}{|z|^2 + t^2}, \frac{t}{|z|^2 + t^2} \right).$$

Tenemos la igualdad

$$\frac{|\hat{J}(p) - \hat{J}(q)|^2}{2 \frac{t}{|p|^2} \frac{s}{|q|^2}} = \frac{|p - q|^2}{2ts}.$$

El lado derecho de la igualdad anterior es invariante por isometrías de  $(\mathbb{H}^3, ds)$ , luego lo es el lado izquierdo. Si ahora tomemos  $p = (0, 1)$  and  $q = \hat{T}(0, 1)$ , entonces todo lo anterior nos permite ver la igualdad siguiente :

$$\|T\|^2 = 2 \cosh d((0, 1), \hat{T}(0, 1))$$

#### 4.5. Volumen hiperbólico 3-dimensional

Desgraciadamente, el cálculo de volúmenes hiperbólicos no es tan fácil como es el cálculo de áreas hiperbólicas. En todo caso, hay fórmulas para el cálculo de volúmenes de tetrahedros hiperbólicos que tienen todos sus vértices al infinito (**tetrahedros ideales**).

**Proposición 4.5.1.** — *La suma de los tres ángulos dihedrales adyacentes a un vértice de un tetrahedro ideal  $T$  es  $\pi$ .*

*Demonstración.* — Tomemos el semi-espacio superior  $\mathbb{H}^3$  como modelo. Módulo isometrías podemos asumir que el vértice bajo consideración es  $\infty$ . De esta manera los tres lados adyacentes a tal vértice son cortados ortogonalmente por cualquier plano paralelo al plano border  $\{x_3 = 0\}$  suficientemente alto. Tal corte nos da un triángulo Euclidiano cuyos ángulos interiores son exáctamente los ángulos dihedrales en consideración. □

**Corolario 4.5.2.** — Sean  $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma$  y  $\gamma'$  los ángulos diedrales de un tetrahedro ideal de manera que para  $\delta \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$  se tiene que  $\delta$  y  $\delta'$  corresponden a ejes sin vértice en común. Entonces  $\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$ .

PROBLEMAS. —

- 1.- Probar el Corolario 4.5.2.

#### 4.6. La función de Lobachevskii

La **función de Lobachevskii** es definida por

$$\Pi(\theta) = - \int_0^\theta \ln |2 \sin(t)| dt$$

Observemos que la integral anterior es impropia en  $\theta \in \mathbb{Z}\pi$ . Se puede ver que la función de Lobachevskii está bien definida para todo valor de  $\theta \in \mathbb{R}$  y que es además continua. Además satisface las siguientes relaciones :

- (1)  $\Pi(0) = 0$  ;
- (2)  $\Pi(\theta + \pi) = \Pi(\theta)$  ;
- (3)  $\Pi(-\theta) = -\Pi(\theta)$  ;
- (4) Para cada entero  $n > 0$  vale la igualdad

$$\Pi(n\theta) = n \sum_{j=0}^{n-1} \Pi(\theta + j\pi/n)$$

**Teorema 4.6.1.** — Sea  $T$  un tetrahedro ideal con ángulos diedrales  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$ . Entonces su volumen hiperbólico es

$$\text{Vol}(T) = \Pi(\alpha) + \Pi(\beta) + \Pi(\gamma)$$

**Ejemplo 4.6.2.** —

$$8\Pi(\pi/4) = 3.6638623\dots$$

PROBLEMAS. —

- 1.- Verificar las siguientes igualdades :

- (1)  $\Pi(0) = 0$  ;
- (2)  $\Pi(\theta + \pi) = \Pi(\theta)$  ;
- (3)  $\Pi(-\theta) = -\Pi(\theta)$  ;
- (4) Para cada entero  $n > 0$  vale la igualdad

$$\Pi(n\theta) = n \sum_{j=0}^{n-1} \Pi(\theta + j\pi/n)$$

- 2.- Probar el teorema 4.6.1.



## CAPÍTULO 5

### GRUPOS DISCONTINUOS, VARIEDADES Y ORBIFOLDS

Es quizás conveniente hacer un paréntesis al tema desarrollado hasta ahora para introducir ciertos conceptos que utilizaremos a lo largo de los siguientes capítulos. Estas nociones incluyen la noción de **variedad topológica** y la de **orbifolds** que son una generalización del concepto de variedades y que aparecen de manera natural cuando cocientamos ciertas variedades por ciertos grupos de homeomorfismos. Nosotros estaremos preocupados del caso en que los cocientes son dados por subgrupos de  $\widehat{\mathbb{M}}^n$  que actúan en ciertos subconjuntos abiertos de  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ .

#### 5.1. Grupos discretos

**Definición 5.1.1.** — Un **grupo topológico** es un grupo que es a la vez un espacio topológico y donde las operaciones de multiplicación e inversión son funciones continuas.

Los grupos  $GL(n, \mathbb{K})$ , donde  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}\}$  son ejemplos de grupos topológicos. Otros ejemplos son (i)  $\mathbb{R}^n$  con la operación de suma usual; (ii)  $\mathbb{C}^n$  con la operación de suma usual; (iii)  $\mathbb{R} - \{0\}$  con el producto usual de números reales; (iv)  $\mathbb{C} - \{0\}$  con el producto usual de números complejos; (v) el grupo unitario  $U_n$ ; (vi) el grupo ortogonal  $O_n$ .

**Definición 5.1.2.** — Un subgrupo  $G$  de un grupo topológico  $K$  es llamado un **grupo discreto** si  $G$  es un subespacio discreto, es decir, no es posible encontrar una sucesión de elementos diferentes en  $G$  convergiendo a algún elemento de  $K$ .

PROBLEMAS. —

- 1.- Verificar que un subgrupo  $G$  de un grupo topológico  $K$  es un grupo discreto sí y sólo si no es posible encontrar una sucesión de elementos diferentes en  $G$  que converja al neutro  $1_K$ .
- 2.- Si  $K$  es un grupo topológico compacto (por ejemplo,  $O_n$  y  $U_n$ ), entonces los subgrupos discretos de  $K$  son exactamente los subgrupos finitos.

- 3.- Consideremos el grupo topológico  $K$  formado de todas las traslaciones en  $\mathbb{R}^n$ , que resulta ser homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Si tomamos vectores linealmente independientes  $\{v_1, \dots, v_r\}$  en  $\mathbb{R}^n$ , entonces el grupo  $G$  generado por las traslaciones  $T_j(x) = x + v_j$ ,  $j = 1, \dots, r$ , define un subgrupo discreto de  $K$  el cual es isomorfo a  $\mathbb{Z}^n$ .
- 4.- Considere en  $S^n$  una colección finita de esferas generalizadas  $(n - 1)$ -dimensionales, dos a dos disjuntas y tal que todas ellas acotan un dominio común. Si  $G$  es el grupo generado por las reflexiones en todas esas esferas, verificar que  $G$  es un subgrupo discreto de  $\widehat{\mathbb{M}}^n$ .
- 5.- Considere en  $S^n$  una colección de  $2k$  esferas generalizadas  $(n - 1)$ -dimensionales, digamos  $C_1, C'_1, \dots, C_k$  y  $C'_k$ , dos a dos disjuntas y tal que todas ellas acotan un dominio común  $\mathcal{D}$ . Sea  $t_j$  una transformación de Möbius tal que
- (i)  $t_j(C_j) = C'_j$ , para cada  $j = 1, \dots, k$ ;
  - (ii)  $t_j(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D} = \emptyset$ , para cada  $j = 1, \dots, k$ .
- Si  $G$  es el grupo generado por las transformaciones  $t_1, \dots, t_k$ , verificar que  $G$  es un subgrupo discreto de  $\mathbb{M}^n$ .

## 5.2. Grupos discontinuos y propiamente discontinuos

Consideremos un espacio topológico Hausdorff  $X$  y  $G$  un grupo de homeomorfismos de  $X$ . Si  $x \in X$ , denotaremos por

$$G_x = \{g \in G : g(x) = x\}$$

al **estabilizador de  $x$  por  $G$**  y denotaremos por

$$G(x) = \{g(x) : g \in G\}$$

la **órbita del punto  $x$  por el grupo  $G$** .

**Definición 5.2.1.** — Diremos que  $G$  **actúa propiamente discontinuamente en  $X$**  ó que es un **grupo propiamente discontinuo** si para cada subconjunto compacto  $K \subset X$  se tiene que la cantidad de elementos  $g \in G$  tales que  $g(K) \cap K \neq \emptyset$  es finita.

**Observación 5.2.2.** — Sea  $G$  un grupo de homeomorfismos del espacio topológico Hausdorff  $X$  que actúa propiamente discontinuamente en  $X$ .

1. Como cada punto es un compacto, se tiene que el estabilizador  $G_x$  es finito para cada  $x \in X$ .
2. En el caso que el espacio topológico  $X$  sea compacto, entonces  $G$  es finito.



**Definición 5.2.3.** — Diremos que  $G$  **actúa discontinuamente en**  $X$  ó que es un **grupo discontinuo** si cada punto  $x \in X$  tiene una vecindad  $U$ ,  $x \in U$ , tal que  $g(U) \cap U \neq \emptyset$  sólo para un número finito de elementos  $g \in G$ . La **región de discontinuidad** de  $G$  es el conjunto  $\Omega \subset X$  formado de los puntos donde  $G$  actúa de manera discontinua.

**Lema 5.2.4.** — Sea  $G$  un grupo de homeomorfismos de un espacio topológico  $X$  y sea  $\Omega \subset X$  su región de discontinuidad. Entonces  $\Omega$  es un abierto invariante por  $G$ .

*Demonstración.* — Si  $\Omega = \emptyset$ , entonces no hay nada que verificar. Supongamos que  $\Omega \neq \emptyset$ . Sea  $x \in \Omega$ . Entonces existe una vecindad abierta  $U$  de  $x$  con la propiedad de que  $g(U) \cap U \neq \emptyset$  sólo para un número finito de elementos  $g \in G$ . Así, cada punto  $y \in U$  pertenece a  $\Omega$ , con lo que obtenemos que  $\Omega$  es un abierto. Por otro lado, si  $g_0 \in G$ , entonces  $g(g_0(U)) \cap g_0(U) = g_0(g_0^{-1}gg_0)(U) \cap g_0(U) = g_0((g_0^{-1}gg_0)(U) \cap U)$ . Como sólo hay un número finito de elementos  $g_0^{-1}gg_0$  tales que  $g_0^{-1}gg_0(U) \cap U \neq \emptyset$ , lo mismo vale para  $g \in G$  con  $g(g_0(U)) \cap g_0(U) \neq \emptyset$ , es decir,  $g_0(U) \subset \Omega$ ; con lo cual podemos ver que  $g_0(\Omega) \subset \Omega$ . Haciendo lo mismo con  $g_0^{-1}$  se obtiene la igualdad.  $\square$

**Observación 5.2.5.** — Las dos definiciones anteriores no son en general equivalentes. Por ejemplo, sea  $X = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  y  $G = \langle A(x, y) = (2x, y/2) \rangle \cong \mathbb{Z}$ . No es difícil darse cuenta que  $G$  actúa de manera discontinuamente sobre  $X$ , pero no actúa de manera propiamente discontinua. Para ver esto último, basta considerar un compacto  $K \subset X$  que sea conexo y contenga los puntos  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$ .

Como ha sido observado arriba, hay ejemplos de grupos que actúan discontinuamente pero que no actúan propiamente discontinuamente. Para espacios topológicos Hausdorff y localmente compactos (como es el caso de  $\widehat{\mathbb{R}^n}$ ) se tiene que toda acción propiamente discontinua es también discontinua.

**Proposición 5.2.6.** — Si  $X$  es localmente compacto, entonces toda acción propiamente discontinua es discontinua.

*Demonstración.* — Sea  $x \in X$ . Como  $X$  es localmente compacto, existe una vecindad  $U$  de  $x$  cuya clausura  $K$  es compacto. Como  $G$  actúa propiamente discontinuamente sobre  $X$ , sólo existen un número finito de elementos  $g \in G$  tales que  $g(K) \cap K \neq \emptyset$ ; en particular, sólo existen un número finito de elementos  $g \in G$  tales que  $g(U) \cap U \neq \emptyset$   $\square$

**Proposición 5.2.7.** — Si  $G$  es un grupo que actúa de manera discontinua en  $X$ , entonces  $G$  es discreto, es decir, si existe una sucesión  $\{g_n\}$  de  $G$  que converge localmente uniformemente a la identidad, entonces existe  $N >$  tal que  $g_n = I$  para  $n \geq N$ .

*Demonstración.* — Sea  $x \in X$  y  $U$  una vecindad abierta de  $x$  tal que  $g(U) \cap U \neq \emptyset$  sólo para un número finito de elementos  $g \in G$ . Sea  $\{t_1, \dots, t_r\} \subset G$  aquellos elementos de  $G$  con la propiedad anterior (podemos asumir  $t_1 = I$ ).

Como  $g_n(x)$  converge a  $x$ , se tiene que, para  $n$  suficientemente grande,  $g_n(U) \cap U \neq \emptyset$ . De esta manera, para tales  $n$  se tiene que  $g_n \in \{t_1, \dots, t_r\}$ . Por otro lado, como  $g_n$  convergen localmente uniformemente a la identidad, debe ocurrir que para  $n >$  muy grande vale que si  $n \geq N$  entonces  $g_n = I$ . □

Un caso importante a considerar es cuando  $G$  es grupo de isometrías de un espacio métrico  $X$ . En este caso una definición equivalente de  $G$  ser propiamente discontinuo es dada como sigue.

**Definición 5.2.8.** — Un subconjunto  $A$  de un espacio topológico es llamado **discreto** si cada punto de  $A$  tiene una vecindad que sólo corta a  $A$  en tal punto.

**Proposición 5.2.9.** — Sea  $X$  un espacio métrico localmente compacto y  $G <$   $\text{Isom}(X)$  un grupo de isometrías de  $X$ . Entonces  $G$  actúa propiamente discontinuamente en  $X$  sí y sólo si :

- (i)  $G_x$  es finito para todo  $x \in X$ ; y
- (ii)  $G(x)$  es un conjunto cerrado y discreto en  $X$  para todo  $x \in X$ .

*Demonstración.* — (1) supongamos que  $G$  es un grupo propiamente discontinuo de homeomorfismos de  $X$ . Ya hemos visto necesariamente el estabilizador  $G_x$  es finito para cada  $x \in X$ . Por otro lado, supongamos que  $G(x)$  no es cerrado en  $X$ . Entonces es posible encontrar una sucesión infinita de elementos diferentes  $g_m \in G$  tal que  $g_m(x)$  converge a un punto  $y \notin G(x)$ . En este caso, el conjunto  $K = \{x, y, g_1(x), g_2(x), \dots\}$  resulta ser un compacto en  $X$  y vale que  $g_m(K) \cap K \neq \emptyset$  para infinitos elementos de  $G$ , una contradicción. Ahora, si  $G(x)$  no fuese discreto, entonces existe un punto de  $G(x)$  para el cual toda vecindad compacta de tal punto (aquí usamos la condición localmente compacto de  $X$ ) se intersecta de manera no vacía con infinitas trasladadas de ella por  $G$ , lo cual es nuevamente una contradicción.

(2) Ahora supongamos que las condiciones (i), (ii) valen y que  $G$  no es propiamente discontinuo. Luego debe existir un compacto  $K \subset X$  y una colección infinita de elementos  $g_m \in G$  tales que  $g_m(K) \cap K \neq \emptyset$ . Esto nos dá una sucesión de puntos  $x_m \in K$  tales que  $g_m(x_m) \in K$ . Pasando a una subsucesión, como  $K$

es compacto, podemos asumir que  $x_m$  converge a  $x \in K$  y  $g_m(x_m)$  converge a  $y \in K$ . Por otro lado,

$$d(g_m(x), y) \leq d(g_m(x), g_m(x_m)) + d(g_m(x_m), y) = d(x, x_m) + d(g_m(x_m), y),$$

en particular, la sucesión  $g_m(x)$  converge a  $y$ . Como  $G_x$  es finito, podemos asumir que  $g_m(x)$  es una sucesión de términos diferentes que converge a  $y$ . Como  $G(x)$  es un cerrado, tenemos que  $y \in G(x)$ , con lo cual obtenemos una contradicción con el hecho que  $G(x)$  es un conjunto discreto. □

**Observación 5.2.10.** — La demostración anterior también funciona si reemplazamos "isometrías" por "similaridades", es decir homeomorfismos  $g$  del espacio métrico  $X$  tales que existe  $k_g > 0$  tal que para cada par de punto  $x, y \in X$  vale que

$$d(g(x), g(y)) = k_g d(x, y).$$

La demostración hecha para el Teorema 5.2.9 también funciona para grupos discontinuos de isometrías.

**Proposición 5.2.11.** — Sea  $X$  un espacio métrico localmente compacto y  $G < \text{Isom}(X)$  un grupo de isometrías de  $X$ . Entonces  $G$  actúa discontinuamente en  $X$  sí y sólo si :

- (i)  $G_x$  es finito para todo  $x \in X$  ; y
- (ii)  $G(x)$  es un conjunto cerrado y discreto en  $X$  para todo  $x \in X$ .

*Demonstración.* — Como  $X$  es localmente compacto, sabemos que si  $G$  actúa propiamente discontinuamente, entonces este actúa discontinuamente. Así, por el Teorema anterior, las condiciones (i) y (ii) aseguran que  $G$  actúa discontinuamente.

Ahora, si  $G$  actúa discontinuamente, entonces podemos proceder de manera similar al caso propiamente discontinuo como sigue. Sabemos que el estabilizador  $G_x$  es finito para cada  $x \in X$  por la definición de discontinuidad. Supongamos que  $G(x)$  no es cerrado en  $X$ . Entonces es posible encontrar una sucesión infinita de elementos diferentes  $g_m \in G$  tal que  $g_m(x)$  converge a un punto  $y \notin G(x)$ . En este caso, si  $U$  es un abierto que contiene a  $y$ , entonces tendremos que a partir de un  $N > 0$  tendremos que  $g_m(U) \cap U \neq \emptyset$  si  $M \geq N$  ; una contradicción con que  $G$  actúa discontinuamente en  $y$ . Similarmente, si  $G(x)$  no fuese discreto, entonces existe un punto de  $G(x)$  para el cual toda vecindad de tal punto se intersecta de manera no vacía con infinitas trasladadas de ella por  $G$ , lo cual es nuevamente una contradicción. □

**Corolario 5.2.12.** — Sea  $X$  un espacio métrico localmente compacto y  $G < \text{Isom}(X)$  un grupo de isometrías de  $X$ . Entonces  $G$  actúa discontinuamente en  $X$  sí y sólo si  $G$  actúa propiamente discontinuamente.

En el caso que  $X = \widehat{\mathbb{R}}^n$  y el grupo  $G$  de homeomorfismos de  $X$  satisface ciertas propiedades, entonces las definiciones de propiamente discontinuo y discontinuo también coinciden.

**Definición 5.2.13.** — Sea  $G$  un grupo de homeomorfismos de  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ . Diremos que  $G$  es un **grupo de tipo convergente** si para cada sucesión  $\{g_n\}$  en  $G$  valen alguna de las dos siguientes propiedades.

1. Existe una subsucesión  $\{g_{n_k}\}$  de  $\{g_n\}$  y un homeomorfismo  $g$  de  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  tal que :
  - (a)  $g_{n_k}$  converge uniformemente a  $g$ ; y
  - (b)  $g_{n_k}^{-1}$  converge uniformemente a  $g^{-1}$ .
2. Existen puntos  $r, s \in \widehat{\mathbb{R}}^n$  (no necesariamente diferentes) y existe una subsucesión  $\{g_{n_k}\}$  de  $\{g_n\}$  tal que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} g_{n_k}(x) = a, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} g_{n_k}^{-1}(x) = r$$

localmente uniformemente en  $\widehat{\mathbb{R}}^n - \{r\}$  y  $\widehat{\mathbb{R}}^n - \{a\}$ , respectivamente.

**Teorema 5.2.14.** — Sea  $G$  un grupo de homeomorfismos de  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  de tipo convergente cuya región de discontinuidad  $\Omega \subset \widehat{\mathbb{R}}^n$  es no vacía. Entonces  $G$  actúa propiamente discontinuamente en  $\Omega$ .

*Demonstración.* — Sea  $K \subset \Omega$  un compacto. Supongamos que existe una sucesión de elementos diferentes  $\{g_m\}$  en  $G$  tales que  $g_m(K) \cap K \neq \emptyset$ . Luego, existen puntos  $x_m \in K$  con  $g_m(x_m) \in K$ . Como  $K$  es compacto, podemos asumir (pasando a una subsucesión) que  $x_m$  converge a un punto  $x_0 \in K$  y que  $g_m(x_m)$  converge a un punto  $y_0 \in K$ . Como  $G$  es de tipo convergente, pasando a una subsucesión, podemos asumir que ocurre una de las siguientes.

1. Existe un homeomorfismo  $g$  de  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  tal que :
  - (a)  $g_m$  converge uniformemente a  $g$ ; y
  - (b)  $g_m^{-1}$  converge uniformemente a  $g^{-1}$ .
2. Existen puntos  $r, s \in \widehat{\mathbb{R}}^n$  (no necesariamente diferentes) tal que :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} g_m(x) = a, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} g_m^{-1}(x) = r$$

localmente uniformemente en  $\widehat{\mathbb{R}}^n - \{r\}$  y  $\widehat{\mathbb{R}}^n - \{a\}$ , respectivamente.

Como  $G$  actúa discontinuamente, tenemos que  $G$  es discreto. Luego, la posibilidad 1., sólo puede ocurrir si los elementos  $g_m$  son todos iguales a  $g$  (a partir de un  $m$  suficientemente grande), una contradicción al hecho que estos elementos fueron escogidos diferentes.

Así, tenemos que vale la posibilidad 2. Observemos que  $a, r \notin \Omega$  (para toda vecindad abierta  $U$  de  $r$  (respectivamente,  $a$ ) vale que  $g_m(U) \cap U \neq \emptyset$  (respectivamente,  $g_m^{-1}(U) \cap U \neq \emptyset$ ); de donde se obtiene, en particular, que  $\{x_0, y_0\} \cap \{a, r\} = \emptyset$ . Ahora,  $g_m(x_m)$  converge al punto  $a$  y también al punto  $y_0$ , una contradicción.

□

El Teorema 5.2.14 nos dice que para grupos  $G < \text{Hom}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$  de tipo convergente, las definiciones de que  $G$  actúe de manera discontinua y de que actúe de manera propiamente discontinuamente en su región de discontinuidad son equivalentes.

**Definición 5.2.15.** — Un espacio métrico  $X$  es llamado **finitamente compacto** si todas las bolas cerradas

$$\overline{B}_r(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

son compactas.

**Teorema 5.2.16.** — [68] *En el caso que  $X$  es un espacio métrico finitamente compacto se tiene que su grupo isometrías  $\text{Isom}(X)$  es un grupo topológico y la función  $T : \text{Isom}(X) \times X \rightarrow X$ , definida por  $T(h, x) = h(x)$ , es continua.*

El resultado anterior nos permite hablar de subgrupos discretos de isometrías de espacios métricos finitamente compactos. Por ejemplo, el subgrupo aditivo  $\mathbb{Z}$  de  $\mathbb{R}$  es un grupo discreto de isometrías del espacio Euclidiano  $\mathbb{R}$ . Este es un caso particular de los grupos discretos en el Problema 3.- de la Sección 5.1.

En [68] se puede obtener la demostración del siguiente hecho sobre grupos de isometrías.

**Lema 5.2.17.** — *Si  $X$  es un espacio métrico finitamente compacto, entonces  $\text{Isom}(X)$  es un subconjunto cerrado del espacio de funciones continuas de  $X$  en  $X$ ,  $C(X, X)$ , con la topología compacto-abierta.*

Una consecuencia del lema anterior es la siguiente equivalencia.

**Teorema 5.2.18.** — *Si  $X$  es un espacio métrico finitamente compacto y separable, entonces un subgrupo  $G < \text{Isom}(X)$  es discreto sí y sólo si es propiamente discontinuo.*

*Demonstración.* — (1) Supongamos que  $G < \text{Isom}(X)$  no fuese discreto. Luego deberíamos poder encontrar una colección de elementos diferentes  $g_m \in G$  tal que  $g_m$  converge a la identidad. Sea  $x \in X$  y consideremos el conjunto  $K = \{x, g_1(x), g_2(x), \dots\}$ . Como  $g_m(x)$  converge a  $x$ , tenemos que  $K$  es un compacto. Pero en este caso, tendríamos que para infinitos elementos  $g_m$  de  $G$  vale que  $g_m(K) \cap K \neq \emptyset$ , es decir, que  $G$  no es un grupo propiamente discontinuo.

(2) Ahora veamos la parte complicada. Supongamos que  $G < \text{Isom}(X)$  es discreto. Al ser  $X$  separable, tenemos que es posible encontrar una base numerable para  $X$ . De esta manera, como  $X$  es finitamente compacto, el espacio  $C(X, X)$  también tiene una base numerable. Como  $X$  es un espacio regular, también lo es  $C(X, X)$ . Esto nos asegura que  $C(X, X)$  es un espacio metrizable. En un espacio metrizable todo subespacio discreto es cerrado, luego  $G$  es un cerrado en  $\text{Isom}(X)$  y, por el lema anterior, un cerrado en  $C(X, X)$ . Si  $G$  no actúa propiamente discontinuo en  $X$ , entonces (por la Proposición 5.2.9) existe un punto  $x_0 \in X$  y una sucesión  $g_m \in G$  de elementos diferentes tal que  $g_m(x_0)$  converge a un punto  $y \in X$ . Al ser  $G$  un cerrado y discreto,  $\{g_m\}$  también es un cerrado en  $C(X, X)$ . Veamos que  $\{g_m\}$  es de hecho equicontinuo en  $X$ . En efecto, si  $x \in X$  y  $r > 0$ , entonces

$$g_m(B_r(x)) = B_r(g_m(x)).$$

Ahora, para cada  $x \in X$ , definamos  $K_x = \{x, g_1(x), g_2(x), \dots\} \subset X$ . Ya que

$$d(g_m(x), g_m(x_0)) = d(x, x_0) = r(x),$$

tenemos que

$$K_x \subset V_x = \bigcup_{m=1}^{\infty} \overline{B}_{r(x)}(g_m(x_0))$$

Como  $K_{x_0}$  está acotado, tenemos que  $\overline{V_x}$  es un compacto, luego  $\overline{K_x}$  es compacto para todo  $x \in X$ . Por el teorema de Arzela-Ascoli, tenemos como consecuencia que  $\{g_m\}$  es compacto en  $C(X, X)$ . Pero como  $\{g_m\}$  es discreto, este debe ser finito, una contradicción. □

PROBLEMAS. —

- 1.- Verificar que  $G_x$  es un subgrupo de  $G$  y que si  $G$  actúa (propiamente) discontinuamente en  $x \in X$ , entonces este es finito.
- 2.- Probar que existe una biyección entre las clases laterales  $G/G_x$  y la órbita  $G(x)$ .
- 3.- Si  $G$  es un grupo finito, entonces  $G$  actúa (propiamente) discontinuamente en  $X$ .

- 4.- Considere en  $S^n$  una colección finita de esferas generalizadas  $(n - 1)$ -dimensionales, dos a dos disjuntas y tal que todas ellas acotan un dominio común. Considere  $G$  como el grupo generado por las reflexiones en todas esas esferas. Verifique que  $G$  es un grupo (propriadamente) discontinuo en algún subconjunto de  $S^n$ .
- 5.- Considere en  $S^n$  una colección de  $2k$  esferas generalizadas  $(n - 1)$ -dimensionales, digamos  $C_1, C'_1, \dots, C_k$  y  $C'_k$ , dos a dos disjuntas y tal que todas ellas acotan un dominio común  $\mathcal{D}$ . Sea  $t_j$  una transformación de Möbius tal que
- (i)  $t_j(C_j) = C'_j$ , para cada  $j = 1, \dots, k$ ;
  - (ii)  $t_j(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D} = \emptyset$ , para cada  $j = 1, \dots, k$ .
- Considere  $G$  como el grupo generado por las transformaciones  $t_1, \dots, t_k$ . Verifique que  $G$  es un grupo (propriadamente) discontinuo en algún subconjunto de  $S^n$  y que cada  $t_j$  es una transformación loxodrómica.
- 6.- ¿Qué pasa si admitimos tangencias en el problema anterior ?
- 7.- ¿Qué pasa si admitimos una cantidad infinita de esferas en el Problema 5.- ?
- 8.- Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  un subgrupo discreto que deja invariante una esfera generalizada  $(n - 1)$ -dimensional  $C$ . Ver que  $G$  es necesariamente un grupo discontinuo en el complemento de cierto subconjunto de  $C$ .

### 5.3. Cocientes por grupos discontinuos

Supongamos ahora que tenemos un grupo  $G$  de homeomorfismos actuando discontinuamente en el espacio topológico  $X$ . Podemos definir la relación de equivalencia

$$x \equiv y \Leftrightarrow \text{existe } g \in G \text{ tal que } g(x) = y$$

Denotemos por  $X/G$  al conjunto de las clases de equivalencia de la relación anterior y por

$$\pi : X \rightarrow X/G$$

a la proyección natural que asocia a cada  $x \in X$  su clase de equivalencia. Si dotamos a  $X/G$  de la topología cociente, entonces obtenemos que  $\pi$  es una función continua. Por otro lado, si  $V \subset X$  es un abierto, entonces tenemos que

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{g \in G} g(V)$$

es un abierto ya que cada  $g \in G$  es homeomorfismo; luego  $\pi$  es también una función abierta.

Tomemos dos clases diferentes  $\pi(x) \neq \pi(y)$  en  $X/G$ . Como  $G$  actúa de manera discontinua en  $x$ , tenemos la existencia de un abierto  $U$ ,  $x \in U$ , tal que

$g(U) \cap U \neq \emptyset$  sólo para un número finito de elementos  $g \in G$ . En particular,  $U \cap G(y)$  es un conjunto finito. Ya que  $X$  es un espacio Hausdorff, podemos escoger  $U$  con la propiedad extra que  $U$  no contenga puntos de la órbita de  $y$ . De esta manera tenemos que en  $X/G$  es posible escoger un abierto conteniendo  $\pi(x)$  y que no contenga a  $\pi(y)$ , es decir  $X/G$  es al menos un espacio topológico  $\mathcal{T}_1$ .

Por lo anterior, tenemos abiertos disjuntos  $U_x$  y  $U_y$  tales que  $x \in U_x$ ,  $y \in U_y$ ,  $U_x \cap G(y) = \emptyset$  y  $U_y \cap G(x) = \emptyset$ . Consideremos los abiertos  $V = \pi(U_x)$  y  $W = \pi(U_y)$  en  $X/G$ . Entonces  $\pi(x) \in V$ ,  $\pi(y) \notin V$ ,  $\pi(y) \in W$ ,  $\pi(x) \notin W$ . Desgraciadamente, puede ocurrir que  $V \cap W \neq \emptyset$ . En muchos casos ocurre que  $X/G$  no es un espacio Hausdorff.

Más adelante veremos que para grupos discontinuos  $G$  de transformaciones (extendidas) de Möbius tenemos que  $\Omega/G$  es Hausdorff, donde  $\Omega$  es la región de discontinuidad a ser definida en el capítulo siguiente.

PROBLEMAS. —

- 1.- Verificar que la relación definida en esta sección es efectivamente una relación de equivalencia.
- 2.- Sea  $X$  un espacio topológico y  $G$  un grupo finito de homeomorfismos de  $X$ . Verificar que  $X/G$  es un espacio Hausdorff.
- 3.- Sea  $G$  un grupo discontinuo en un espacio topológico  $X$ . Si para todo par de puntos  $x, y \in X$  tales que  $G(x) \neq G(y)$  existen abiertos  $U_x, U_y$ , con  $x \in U_x$ ,  $y \in U_y$  satisfaciendo la siguiente propiedad :

$$g(U_x) \cap U_y = \emptyset \quad \text{para todo } g \in G,$$

entonces  $X/G$  es un espacio Hausdorff.

- 4.- Considere en  $S^n$  una colección finita de esferas generalizadas  $(n - 1)$ -dimensionales, dos a dos disjuntas y tal que todas ellas acotan un dominio común. Si  $G$  es el grupo generado por las reflexiones en todas esas esferas, determinar un abierto  $\Omega$  donde  $G$  actúa discontinuamente y determine que es  $\Omega/G$ .
- 5.- Considere en  $S^n$  una colección de  $2k$  esferas generalizadas  $(n - 1)$ -dimensionales, digamos  $C_1, C'_1, \dots, C_k$  y  $C'_k$ , dos a dos disjuntas y tal que todas ellas acotan un dominio común  $\mathcal{D}$ . Sea  $t_j$  una transformación de Möbius tal que
  - (i)  $t_j(C_j) = C'_j$ , para cada  $j = 1, \dots, k$ ;
  - (ii)  $t_j(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D} = \emptyset$ , para cada  $j = 1, \dots, k$ .
 Si  $G$  es el grupo generado por las transformaciones  $t_1, \dots, t_k$ , determinar un abierto  $\Omega$  donde  $G$  actúa discontinuamente y determine que es  $\Omega/G$ .



- 6.- Ver que el espacio cociente  $X/G$ , donde  $X = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  y  $G = \langle A(x,y) = (2x, y/2) \rangle \cong \mathbb{Z}$ , no es Hausdorff.

#### 5.4. Variedades $n$ -dimensionales

**Definición 5.4.1.** — Una **variedad (real)  $n$ -dimensional** es por definición un espacio topológico  $M$  que sea Hausdorff y segundo numerable tal que para cada punto  $p \in M$  existe un abierto  $U \subset M$ ,  $p \in U$ , y un homeomorfismo  $h : U \rightarrow V$ , donde  $V$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . El par  $(U, h)$  es llamada **una carta de  $M$** .

Si tenemos una variedad  $n$ -dimensional  $M$  y dos cartas  $(U_1, h_1), (U_2, h_2)$  de ella tales que  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ , entonces tenemos de manera natural un homeomorfismo

$$h_2 \circ h_1^{-1} : h_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow h_2(U_1 \cap U_2)$$

llamada un cambio de coordenadas de  $M$ .

**Observación 5.4.2.** — Uno puede considerar ciertas clases de variedades pidiendo ciertas restricciones sobre sus cambios de coordenadas, es decir, considerando una cierta subcolección de cartas. Por ejemplo, si pedimos que los cambios de coordenadas sean diferenciables, entonces obtenemos las variedades diferenciables.

**5.4.1. Ejemplos.** — Algunos ejemplos simples de variedades  $n$ -dimensionales son los siguientes.

- (1) El espacio  $\mathbb{R}^n$ .
- (2) El espacio  $\widehat{\mathbb{R}}^n \cong S^n$ . En este caso tenemos una variedad  $n$ -dimensional cerrada.
- (3) Cualquier subconjunto abierto  $\Omega \subset \widehat{\mathbb{R}}^n$ .
- (4) Sea  $M$  una variedad  $n$ -dimensional y sea  $G$  un grupo de homeomorfismos de  $M$  con la propiedad que para cada punto  $p \in M$  se tiene que exista un abierto  $U \subset M$ ,  $p \in U$ , tal que  $g(U) \cap U = \emptyset$  para todo  $g \in G - \{I\}$  (es decir,  $G$  actúa de manera discontinua y sin puntos fijos).

Entonces podemos formar el espacio cociente  $M/G$ , donde dos puntos  $p, q \in M$  son equivalentes por  $G$  si existe  $g \in G$  tal que  $g(x) = y$ . En este caso,  $M/G$  resulta ser una variedad  $n$ -dimensional donde las cartas se pueden elegir como la composición de inversas locales de la proyección natural  $\pi : M \rightarrow M/G$  con cartas locales de  $M$ . Si tenemos que  $M$  es además diferenciable y  $G$  consiste de difeomorfismos de  $M$ , entonces obtenemos que  $M/G$  es también una variedad diferenciable  $n$ -dimensional.

- (5) En el ejemplo anterior, podemos considerar el caso en que la variedad  $n$ -dimensional  $M$  sea además un espacio métrico y  $G$  un grupo de isometrías de  $M$ . Bajo los mismos supuestos que en (4), se obtiene que  $M/G$  es una

variedad  $n$ -dimensional que es un espacio métrico. Sea  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  la métrica en  $M$ .

La Proposición 5.2.11 nos asegura que cada órbita  $G(x)$  es un subconjunto cerrado y discreto de  $M$ .

Miremos la proyección  $\pi : M \rightarrow M/G$ , donde como antes dotamos a  $M/G$  de la topología cociente. Así, tenemos que  $\pi$  es una función continua y abierta. Definamos la función

$$D : M/G \times M/G \rightarrow \mathbb{R} : (\pi(x), \pi(y)) \rightarrow \text{dist}(G(x), G(y))$$

donde

$$\text{dist}(A, B) = \text{Infimo}\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

La función  $D : M/G \times M/G \rightarrow \mathbb{R}$  define una métrica en  $M/G$ , que produce la topología cociente, y que satisface que para todo  $x \in X$  y todo  $r > 0$  ocurre que  $\pi(B_r(x)) = B_r(\pi(x))$ . Obtenemos que  $M/G$  es un espacio métrico, luego Hausdorff. Para verificar lo anterior, primeros observemos que si  $x, y \in M, \gamma, \delta \in G$ , entonces

$$d(\gamma(x), \delta(y)) = d(x, \gamma^{-1}(\delta(y))),$$

luego,

$$D(\pi(x), \pi(y)) = \text{dist}(x, G(y)).$$

Por otro lado, si  $\pi(x) \neq \pi(y)$ , entonces  $x \notin G(y)$ . Como  $G(y)$  es un conjunto cerrado, tenemos que  $\text{dist}(x, G(y)) > 0$ , es decir,  $D(\pi(x), \pi(y)) > 0$ . Veamos ahora la desigualdad triangular. Sean  $x, y, z \in M, g, h \in G$ ; luego

$$d(x, g(y)) + d(y, h(z)) = d(x, g(y)) + d(g(y), g(h(z))) \geq$$

$$d(x, g(h(z))) \geq \text{dist}(x, G(z)) \geq D(\pi(x), \pi(z)),$$

luego,

$$D(\pi(x), \pi(y)) + D(\pi(y), \pi(z)) \geq D(\pi(x), \pi(z)).$$

Ahora que ya sabemos que  $D$  define una métrica en  $M/G$ , veamos como lucen las bolas abiertas. Sea  $x \in M$  y  $r > 0$ . Es claro por la definición de  $D$  que tenemos la inclusión

$$\pi(B_r(x)) \subset B_r(\pi(x))$$

De manera recíproca, sea  $y \in M$  tal que  $\pi(y) \in B_r(\pi(x))$ , es decir,

$$\text{dist}(x, G(y)) = D(\pi(x), \pi(y)) < r.$$

Luego, existe  $\gamma \in G$  tal que  $\gamma(y) \in B_r(x)$ . En particular,  $\pi(y) \in \pi(B_r(x))$ , como queremos. Esto además nos dice que la topología cociente en  $M/G$  está definida por la métrica  $D$ .

### 5.5. Orbifolds

**Definición 5.5.1.** — Un **orbifold**  $n$ -dimensional consiste de un espacio Hausdorff segundo numerable  $X$  (llamado el espacio topológico subyacente del orbifold) y de una colección

$$\{(U_\alpha, V_\alpha, G_\alpha, f_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha/G_\alpha); \alpha \in \mathcal{A}\},$$

satisfaciendo las siguientes propiedades :

- (1) la colección  $\{U_\alpha; \alpha \in \mathcal{A}\}$  es un cubrimiento abierto de  $X$  ;
- (2)  $G_\alpha$  es un grupo finito de homeomorfismos del abierto  $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  ;
- (3)  $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha/G_\alpha$  es un homeomorfismo ;
- (4) si  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , y si  $\pi_s : V_s \rightarrow V_s/G_s$  es la proyección natural (cubrimiento ramificado) inducida por la acción de  $G_s$  sobre  $V_s$ , entonces el homeomorfismo

$$f_\beta \circ f_\alpha^{-1} : f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

puede ser levantado a un homeomorfismo

$$h_{\alpha,\beta} : \pi_\alpha^{-1}(f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)) \rightarrow \pi_\beta^{-1}(f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)).$$

Una variedad  $n$ -dimensional  $M$  es un caso particular de orbifold  $n$ -dimensional. En este caso  $G_\alpha = \{I\}$  y  $(U_\alpha, f_\alpha)$  son las cartas de  $M$ .

Cuando tenemos que  $X$  es una variedad diferenciable,  $G_\alpha$  son grupos de difeomorfismos de  $V_\alpha$ ,  $f_\alpha$  son difeomorfismos y los cambios de coordenadas  $f_\beta \circ f_\alpha^{-1}$  y  $h_{\alpha,\beta}$  son diferenciables, entonces tenemos orbifolds diferenciables.

**Ejemplo 5.5.2 (Ejemplo Regular).** — Sea  $X = M$  una variedad  $n$ -dimensional y  $G$  un grupo de homeomorfismos que actúa de manera discontinua en  $M$ . Entonces el espacio cociente  $M/G$  resulta ser una orbifold  $n$ -dimensional. Si los estabilizadores  $G_x$  son el grupo trivial, entonces obtenemos una variedad  $n$ -dimensional.

Un caso particular es cuando  $X$  es un espacio métrico y  $G$  es un grupo discontinuo de isometrías de  $X$ , entonces el orbifold  $X/G$  es además un espacio métrico como hemos visto anteriormente en el caso de variedades.



## CAPÍTULO 6

### GRUPOS KLEINIANOS Y DISCRETOS EN $\widehat{\mathbb{M}}^n$

Referencias para este capítulo son los ya mencionados en los capítulos anteriores y también el libro [80].

#### 6.1. Grupos Kleinianos

*Definición 6.1.1.* — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  un subgrupo dado.

1. Denotaremos por  $\Omega(G) \subset \widehat{\mathbb{R}}^n$  al conjunto de puntos donde  $G$  actúa discontinuamente, llamado la **región de discontinuidad** de  $G$ . Su complemento en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  es llamado su **conjunto límite** y denotado por  $\Lambda(G)$ .
2. Si  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  es un grupo que actúa discontinuamente en algún punto de  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ , es decir,  $\Omega(G) \neq \emptyset$ , entonces diremos que  $G$  es un **grupo Kleiniano  $n$ -dimensional**.
3. Si  $G < \widehat{\mathbb{M}}^2$  es un grupo Kleiniano 2-dimensional, entonces diremos que  $G$  es un **grupo Kleiniano planar** y, en caso de mayores dimensiones, hablaremos de **grupos Kleinianos espaciales**.

Más adelante veremos que todo grupo Kleiniano  $n$ -dimensional es necesariamente discreto (Proposición 6.7.1) y que todo subgrupo discreto de  $\widehat{\mathbb{M}}^n$  es necesariamente un grupo Kleiniano  $(n+1)$ -dimensional (Proposiciones 6.7.4 y 6.7.5). Usando una extensión de Poincaré podemos mirar cada grupo discreto  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  como un grupo discreto  $G < \widehat{\mathbb{M}}^{n+1}$  (Proposición 6.6.3). Puede ocurrir que  $G$  no sea un grupo Kleiniano  $n$ -dimensional (es decir, su región de discontinuidad en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  sea un conjunto vacío). Más adelante veremos que en todo caso ocurre que su región de discontinuidad en  $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$  es no vacío, es decir que este es siempre un grupo Kleiniano  $(n+1)$ -dimensional.

*Proposición 6.1.2.* — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$ . Entonces  $\Omega(G)$  es un abierto de  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ . Además,  $\Omega(G)$  es el abierto maximal donde  $G$  actúa discontinuamente. El conjunto límite  $\Lambda(G)$  es un compacto.

*Demonstración.* — Sólo basta verificar que  $\Omega(G)$  es un conjunto abierto. Si  $x \in \Omega(G)$ , entonces existe un abierto  $U$ , de manera que  $x \in U$ , tal que el conjunto  $\{t \in G : t(U) \cap U \neq \emptyset\}$  es finito. Luego, es claro que  $U \subset \Omega(G)$ .  $\square$

**Proposición 6.1.3.** — *Los conjuntos  $\Omega(G)$  y  $\Lambda(G)$  son invariantes bajo la acción de  $G$ .*

*Demonstración.* — Basta con verificar que para todo  $x \in \Omega(G)$  y todo  $g \in G$  vale que  $g(x) \in \Omega(G)$ . Sea  $U \subset \Omega(G)$  abierto,  $x \in U$ , tal que  $\{t \in G : t(U) \cap U \neq \emptyset\}$  es finito. Si tomamos el abierto  $V = g(U)$ , entonces  $g(x) \in V$  y

$$\{t \in G : t(V) \cap V \neq \emptyset\} = \{g \circ t \circ g^{-1} \in G : t(U) \cap U \neq \emptyset\}$$

es finito, con lo cual obtenemos que  $g(x) \in \Omega(G)$ .  $\square$

PROBLEMAS. —

- 1.- Verificar que todo grupo finito de transformaciones de Möbius es un grupo Kleiniano.
- 2.- Sea  $T$  una transformación de Möbius y  $G = \langle T \rangle$ . Bajo que condiciones  $G$  es un grupo Kleiniano. Determina la región de discontinuidad.
- 3.- Considere en  $S^n$  una colección finita de esferas generalizadas  $(n - 1)$ -dimensionales, dos a dos disjuntas y tal que todas ellas acotan un dominio común. Si  $G$  es el grupo generado por las reflexiones en todas esas esferas, determinar la región de discontinuidad de  $G$ .
- 4.- Considere en  $S^n$  una colección de  $2k$  esferas generalizadas  $(n - 1)$ -dimensionales, digamos  $C_1, C'_1, \dots, C_k$  y  $C'_k$ , dos a dos disjuntas y tal que todas ellas acotan un dominio común  $\mathcal{D}$ . Sea  $t_j$  una transformación de Möbius tal que
  - (i)  $t_j(C_j) = C'_j$ , para cada  $j = 1, \dots, k$ ;
  - (ii)  $t_j(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D} = \emptyset$ , para cada  $j = 1, \dots, k$ .
 Si  $G$  es el grupo generado por las transformaciones  $t_1, \dots, t_k$ , determinar la región de discontinuidad de  $G$ . Este tipo de grupos son llamados **grupos de Schottky clásicos**.

## 6.2. Algunos ejemplos de grupos Kleinianos

**6.2.1. Grupos Fuchsianos.** — Un grupo Kleiniano  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  que deja invariante una bola generalizada  $B \subset \widehat{\mathbb{R}}^n$  es llamado un **grupo Fuchsiano**. Más adelante veremos que el conjunto límite  $\Lambda(G)$  está contenido en la esfera borde  $S = \partial B$ . Estos grupos se obtienen como extensión de Poincaré de grupos discretos en  $\widehat{\mathbb{M}}^{n-1}$ .

Si denotemos por  $\tau$  la reflexión en  $S$ , entonces la unicidad de  $\tau$  asegura que  $\tau$  conmuta con cada transformación de  $G$ .

En caso que  $\Lambda(G) = S$ , decimos que  $G$  es un **grupo Fuchsiano de la primera clase**; en caso contrario, es llamado un **grupo Fuchsiano de la segunda clase**.

Si denotamos por  $B^* = \tau(B)$  la otra bola acotada por  $S$ , entonces en el caso que  $G$  es de la primera clase tenemos que  $\Omega(G) = B \cup B^*$ . El cociente  $\mathcal{O}_G = \Omega(G)/G = B/G \cup B^*/G$  tiene un homeomorfismo anti-conformal de orden dos, inducida por  $\tau$ , que permuta las dos componetes  $B/G$  y  $B^*/G$ , es decir, ellas son anticonformalmente homeomorfas.

De manera análoga, en el caso que  $G$  es de la segunda clase tenemos que  $\Omega(G) = B \cup B^* \cup \Omega_S(G)$ , donde  $\Omega_S(G)$  es la región de discontinuidad de  $G$  vista como grupo de automorfismos de  $S$ . El cociente  $\mathcal{O}_G = \Omega(G)/G = B/G \cup \Omega_S(G)/G \cup B^*/G$  tiene un homeomorfismo anti-conformal de orden dos, inducida por  $\tau$ , que permuta las dos componetes  $B/G$  y  $B^*/G$ , es decir, ellas son anticonformalmente homeomorfas, y tiene a  $\Omega_S(G)/G$  como conjunto de puntos fijos.

**6.2.2. Grupos casi-Fuchsianos.** — Un grupo Kleiniano  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  para el cual  $\Omega = B_1 \cup B_2$ , donde  $B_j$  es una bola topológica  $j = 1, 2$ , de manera que  $\partial B_1 = \partial B_2 = S$  es una esfera topológica, es llamado un **grupo casi-Fuchsiano**.

*Observación 6.2.1.* — En la definición anterior es necesario pedir que la esfera  $S$  acote dos bolas topológicas ya que, para  $n \geq 3$ , se pueden encontrar esferas topológicas que no acotan bolas (buscar ejemplos). Esto mismo permite encontrar grupos Kleinianos con conjunto límite una esfera topológica que no son casi-Fuchsianos.

**6.2.3. Grupos de Schottky.** — Supongamos que tenemos transformaciones loxodrómicas  $f_1, \dots, f_k \in \widehat{\mathbb{M}}^n$  y una colección de  $2k$  esferas topológicas en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ , digamos  $\Sigma_1, \Sigma'_1, \dots, \Sigma_k$  y  $\Sigma'_k$ , dos a dos disjuntas, cada una de ellas acotando dos bolas topológicas, y todas ellas acotando un dominio común  $\mathcal{D} \subset \widehat{\mathbb{R}}^n$ , de manera que :

- (i)  $f_j(\Sigma_j) = \Sigma'_j$ , para  $j = 1, \dots, k$ ;
- (ii)  $f_j(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D} = \emptyset$ , para  $j = 1, \dots, k$ .

Entonces decimos que el grupo  $G$  generado por  $f_1, \dots, f_k$  es un **grupo de Schottky de género  $k$** . La existencia de estos grupos está dada por el Problema 4.- anterior.

Se puede verificar, usando inducción en la longitud de palabras, que toda transformación de  $G$ , excepto la identidad, es loxodrómica. También se puede verificar que  $G$  es un grupo libre de rango  $k$ , que  $\Omega(G)$  es conexo, que  $\Lambda(G)$  es un conjunto de Cantor (si  $k \geq 2$ ) y que  $\Omega(G)/G \cong \#^k(S^{n-1} \times S^1)$ .

En el caso que podamos escoger cada una de las esferas  $\Sigma_j, \Sigma'_j$  como esferas generalizadas, para todo  $j = 1, \dots, k$ , entonces diremos que  $f_1, \dots, f_k$  son **generadores clásicos** de  $G$ . Diremos que  $G$  es un **grupo de Schottky clásico** si podemos escoger un conjunto de generadores clásicos.

En [52] se verificó de manera existencial, pero no constructiva, la existencia de grupos de Schottky no-clásicos. En [81] hay una construcción explícita de un grupo de Schottky no-clásico de género 2 y dimensión  $n = 2$ . En [27] hay una construcción en dimensión  $n = 4$ . En [38] existen construcciones teóricas de infinitos grupos no-clásicos en dimensión  $n = 2$ .

**6.2.4. Grupos Web.** — Un grupo Kleiniano  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  es llamado un **grupo web** si para cada componente conexa  $\Delta$  de  $\Omega(G)$  se tiene que el estabilizador

$$G_\Delta = \{t \in G : t(\Delta) = \Delta\}$$

es un grupo casi-Fuchsiano.

Por ejemplo, en  $n = 2$ , consideremos

$$a(z) = z + 1, \quad b(z) = z + i, \quad c(z) = \frac{z}{2z + 1}$$

Entonces  $G = \langle a, b, c \rangle$  es un grupo web.

**6.2.5. Grupos degenerados.** — Un grupo Kleiniano finitamente generado  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  es llamado un **grupo degenerado** si  $\Omega(G)$  es conexo y contractible.

No existen ejemplos explícitos de este tipo de grupos, sólo se sabe que existen por resultados de Bers y Maskit.

**Observación 6.2.2.** — Si en la definición anterior quitamos la condición de ser finitamente generado, entonces es posible construir ejemplos de la siguiente manera. Sea

$$D = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0, x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 1\}$$

Consideremos una colección infinita numerable de esferas  $\Sigma_j, \Sigma'_j$ , de manera que

- (i)  $\Sigma_j$  y  $\Sigma_k, \Sigma'_j$  y  $\Sigma'_k, \Sigma_j$  y  $\Sigma'_k$  son disjuntas para  $j \neq k$ ,
- (ii)  $\Sigma_j$  y  $\Sigma'_j$  son tangentes en un punto de  $D$  de manera que  $D$  está contenida en la porción común acotada por esas dos esferas,
- (iii) los puntos de tangencia de todas esas esferas forman un conjunto denso en  $D$ ,
- (iv) ninguna de esas esferas separa otras dos.

Entonces, el grupo generado por las reflexiones en todas esas esferas será un grupo con  $\Omega(G)$  conexo y contractible, pero infinitamente generado.

PROBLEMAS. —

- 1.- Completar los detalles de cada uno de los ejemplos anteriores.



### 6.3. Grupos Kleinianos y sus estabilizadores

**Proposición 6.3.1.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^2$  un grupo Kleiniano planar y sea  $p \in \Omega(G)$ . Entonces el estabilizador  $G_p$  tiene las siguientes tres posibilidades :

- (i)  $G_p < \mathbb{M}^2$  es un grupo cíclico finito ; ó bién
- (ii)  $G_p$  es un grupo de orden dos generado por una reflexión ; ó bién
- (iii)  $G_p = \langle \tau_1, \tau_2 : \tau_1^2 = \tau_2^2 = (\tau_2 \circ \tau_1)^n = 1 \rangle$ , donde  $\tau_1, \tau_2$  son reflexiones.

*Demonstración.* — Denotemos por  $G_p^+$  al subgrupo de  $G_p$  consistiendo de transformaciones de Möbius. Por definición, tenemos que  $G_p^+$  es finito y, en particular, todos sus elementos son transformaciones elípticas de orden finito. Si tenemos dos transformaciones  $f, g \in G_p^+$  diferentes, entonces ellas deben tener ambos puntos fijos en común ya que en otra situación tendríamos que su conmutador  $[f, g] \in G_p$  es parabólico. De esta manera, podemos asumir sin problemas que  $p = 0$  y el otro punto fijo en común (de todo elemento de  $G_p^+$ ) es  $\infty$ . Así,  $G_p^+$  es subgrupo finito del grupo especial ortogonal  $SO_2$ , luego cíclico por el Lema 6.3.2. De esta manera tenemos el caso (i) listo.

Supongamos ahora que  $G_p$  contiene una transformación extendida de Möbius. Ya que toda transformación extendida de Möbius que no es reflexión y que tiene al menos un punto fijo es de orden infinito (pseudo-parabólico ó pseudo-hiperbólico), tenemos que tal elemento es una reflexión  $\tau$ . Ya que  $\tau$  debe conjugar todo elemento de  $G_p^+$  en uno del mismo subgrupo, tenemos necesariamente que  $\tau$  es una reflexión contenida en  $O_2$  y, en particular, que  $G_p$  es un subgrupo finito de  $O_2$ , así el resultado es consecuencia del Lema 6.3.2. □

**Lema 6.3.2.** — Sea  $H$  un subgrupo finito del grupo ortogonal  $O_2$ . Entonces tenemos que  $H$  es uno de los siguientes :

- (i) un grupo cíclico generado por una rotación en  $SO_2$  ;
- (ii) un grupo de orden dos generado por una reflexión ;
- (iii) un grupo dihedral  $\langle \tau_1, \tau_2 : \tau_1^2 = \tau_2^2 = (\tau_2 \circ \tau_1)^n = 1 \rangle$ , donde  $\tau_1, \tau_2$  son reflexiones.

*Demonstración.* — Sea primero  $H$  un subgrupo finito de  $SO_2$ . Ya que  $H$  es finito, podemos escoger un elemento de menor ángulo de rotación (en el sentido opuesto a las manecilla de un reloj), digamos  $h$ . Tenemos entonces que  $\langle h \rangle < H$ . Si tenemos que  $\langle h \rangle \neq H$ , entonces podemos encontrar  $t \in H - \langle h \rangle$ . Pero en este caso es claro que existe un entero  $n$  de manera que  $t^n \circ h \in H$  tiene ángulo de rotación menor que  $h$ , una contradicción. Hemos obtenido el caso (i).

Supongamos ahora que  $H$  es subgrupo finito de  $O_2$  que contiene a un elemento  $\tau_1$  de  $O_2 - SO_2$ . Entonces  $\tau$  debe ser una reflexión en una línea  $L_1$  por el origen. Sea  $H^+ = H \cap SO_2$ . Si tenemos que  $H^+ = \{I\}$ , entonces estamos en el caso (ii). Supongamos ahora que  $H^+$  no es trivial. Sea  $h \in H^+ = H \cap SO_2$  el generador de

menor ángulo de rotación  $2\pi/n \in (0, \pi)$ , como antes. Entonces  $\tau_2 = \tau_1 \circ h \in H$  es una reflexión en una línea  $L_2$  por el origen que hace un ángulo  $\pi/n$  con  $L_1$ . Es claro que  $H$  está generado por  $\tau_1$  y  $\tau_2$  con las relaciones como en (iii).  $\square$

Ahora veamos lo que pasa para los estabilizadores para grupos Kleinianos en mayores dimensiones.

**Proposición 6.3.3.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  un grupo Kleiniano y  $p \in \Omega(G)$ . Entonces el estabilizador  $G_p$  es un grupo finito isomorfo a un grupo finito del grupo ortogonal  $O_n$ .

*Demonstración.* — Módulo conjugación podemos asumir  $p = \infty$ . Ahora, toda transformación (extendida) de Möbius que fija al punto  $\infty$  es de la forma

$$T(x) = \lambda Rx + a,$$

donde  $\lambda > 0$ ,  $R \in O_n$  y  $a \in \mathbb{R}^n$ . Si  $T$  es de orden finito, entonces debe ocurrir que  $\lambda = 1$  y  $R$  es de orden finito. En efecto, si el orden de  $T$  es  $r > 1$ , entonces

$$x = T^r(x) = \lambda^r R^r x + b,$$

es válido para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , con lo cual podemos constatar la afirmación.

Lo anterior nos asegura que  $G_\infty$  es un grupo finito de isometrías Euclidianas de  $\mathbb{R}^n$ . Definamos la función

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty) : x \mapsto \sum_{T \in G_\infty} \|T(x)\|^2$$

Tenemos que  $F$  es una función estrictamente convexa, luego con un único mínimo, digamos  $q \in \mathbb{R}^n$ . Ya que  $F \circ T = F$ , para todo  $T \in G_\infty$ , tenemos por la unicidad de  $q$  que  $T(q) = q$ . Ahora podemos conjugar por una traslación de manera que podemos asumir  $q = 0$ . De esta manera, tendremos que  $G_\infty$  es un grupo finito en  $O_n$  como queríamos.  $\square$

El Problema 1.- más abajo nos asegura que el subgrupo estabilizador  $G_p$ , donde  $p \in \Omega(G)$  y  $G$  es un grupo Kleiniano, debe ser un grupo finito que deja invariante una bola. Ahora procederemos a ver que todo grupo finito en  $\widehat{\mathbb{M}}^n$  que dejan invariante una bola debe ser estabilizador de un punto.

**Proposición 6.3.4.** — Sea  $B \subset \widehat{\mathbb{R}}^n$  una bola generalizada y  $G < \text{Aut}(B)$  un grupo finito. Entonces existe un punto  $p \in B$  tal que  $G = G_p$ .

*Demonstración.* — Sea  $d_B$  la métrica hiperbólica en  $B$ . Escojamos un punto  $q \in B$  y definamos la función

$$F : B \rightarrow [0, \infty) : x \mapsto \sum_{T \in G} d_B^2(q, T(x))$$

Tenemos que  $F$  es una función estrictamente convexa en  $B$ , luego con un único mínimo, digamos  $p \in B$ . Ya que  $F \circ T = F$ , para todo  $T \in G$ , tenemos por la unicidad de  $p$  que  $T(p) = p$ . □

**Observación 6.3.5.** — Una consecuencia de lo anterior es el siguiente hecho. Si  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  es un grupo finito, entonces  $G$  es isomorfo a un grupo finito de  $O_{n+1}$ . Esto es consecuencia de que podemos ver  $G$  como un grupo de isometrías del espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$  por medio de la extensión de Poincaré. Así, los grupos finitos de  $\widehat{\mathbb{M}}^n$  corresponden a los grupos finitos de  $O_{n+1}$ .

PROBLEMAS. —

- 1.- Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  un grupo Kleiniano y sea  $p \in \Omega(G)$ . Verificar que el estabilizador  $G_p$  es un grupo finito que deja invariante una bola conteniendo  $p$ . En el caso  $n = 3$  verifique que estos estabilizadores son isomorfos a grupos cíclicos finitos ó grupos dihedrales ó grupos de simetrías de los sólidos Platónicos.

#### 6.4. Cocientes de grupos Kleinianos son Hausdorff

Volvamos a ver la problemática de la primera sección del capítulo anterior sobre la propiedad de cocientes Hausdorff.

Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  un grupo Kleiniano  $n$ -dimensional y  $\Omega \neq \emptyset$  su región de discontinuidad.

Es claro que si  $G$  es finito, entonces  $\Omega = \widehat{\mathbb{R}}^n$  y que el orbifold cociente  $\Omega/G$  es Hausdorff.

Supongamos ahora que  $G$  es infinito. Si tomamos un punto  $x \in \Omega$ , entonces podemos escoger una bola Euclidiana centrada en  $x$ , digamos  $x \in U_x \subset \overline{U_x} \subset \Omega$ , de manera que  $g(U_x) \cap U_x = \emptyset$  con la posible excepción de un número finito de transformaciones de  $G$ . Entonces es claro que el diámetro cordal de las trasladas de  $U_x$  tiende a cero ya que la imagen por una transformación de Möbius de  $U_x$  sigue siendo una bola en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  y tales trasladadas forman un conjunto infinito de bolas disjuntas.

Así, si tenemos  $x, y \in \Omega$ , con  $\pi(x) \neq \pi(y)$ , tenemos bolas abiertas disjuntas  $U_x$  y  $U_y$  tales que  $x \in U_x$ ,  $y \in U_y$ ,  $U_x \cap \gamma(U_x) = \emptyset$  y  $U_y \cap \gamma(U_y) = \emptyset$ , para todo  $\gamma \in G$  con la posible excepción de un número finito de elementos de  $G$ .

Ya que los diámetros esféricos de las trasladadas  $\gamma(U_x)$ ,  $\gamma \in G$  deben ir a cero y  $\overline{U_y} \subset \Omega$ , debemos tener que  $\gamma(U_x) \cap U_y = \emptyset$  con la posible excepción de un número finito de elementos de  $G$ . De manera similar,  $\gamma(U_y) \cap U_x = \emptyset$  con la posible excepción de un número finito de elementos de  $G$ . Podemos escoger  $U_x$  y  $U_y$  más pequeñas de manera que  $U_x \cap G(U_y) = \emptyset$  y  $U_y \cap G(U_x) = \emptyset$ . Consideremos los abiertos  $V = \pi(U_x)$  y  $W = \pi(U_y)$  en  $\Omega/G$ . Entonces  $\pi(x) \in$

$V$  y  $\pi(y) \in W$ . Ahora es fácil verificar de todo lo dicho arriba que  $V \cap W = \emptyset$ . En particular, tenemos el siguiente.

**Teorema 6.4.1.** — Si  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  un grupo Kleiniano  $n$ -dimensional con región de discontinuidad  $\Omega \neq \emptyset$ , entonces  $\Omega/G$  es un espacio Hausdorff.

**Teorema 6.4.2.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^2$  un grupo Kleiniano planar y  $\Delta$  una colección  $G$ -invariante de componentes de la región de discontinuidad  $\Omega$  de  $G$ . Supongamos que para cada  $x \in \Delta$  tenemos  $G_x = \{I\}$ . Entonces  $\Delta/G$  resulta ser una superficie diferenciable real. Si además  $G < \mathbb{M}^2$ , entonces  $\Delta/G$  resulta ser una superficie de Riemann. Si existen elementos de  $G$  que son transformaciones extendidas de Möbius, entonces  $\Delta/G$  es una superficie de Klein no orientada.

*Demonstración.* — Nuestra suposición asegura que la proyección natural  $\pi : \Delta \rightarrow \Delta/G$  es un cubrimiento regular con grupo cobertor  $G$ . Luego podemos usar inversas locales como coordenadas locales. En este caso los cambios de coordenadas serán restricciones de elementos de  $G$ .

□

De manera similar, uno tiene el siguiente resultado más general.

**Teorema 6.4.3.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  un grupo Kleiniano  $n$ -dimensional y  $\Delta$  una colección  $G$ -invariante de componentes de la región de discontinuidad  $\Omega$  de  $G$ . Supongamos que para cada  $x \in \Delta$  tenemos  $G_x = \{I\}$ . Entonces,  $\Delta/G$  resulta ser una variedad diferenciable real  $n$ -dimensional. Si además  $G < \mathbb{M}^n$ , entonces  $\Delta/G$  resulta ser una variedad orientada. Si existen elementos de  $G$  que son transformaciones extendidas de Möbius, entonces  $\Delta/G$  es una variedad no orientada. Estas variedades son llamadas **variedades Kleinianas** y tienen bien definida una noción de ángulos en cada espacio tangente.

Cuando  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  es un grupo Kleiniano  $n$ -dimensional,  $\Delta$  una colección invariante de componentes de la región de discontinuidad  $\Omega$  de  $G$  y existen puntos  $x \in \Delta$  tal que  $G_x \neq \{I\}$ , entonces se puede ver que la colección de tales puntos produce problemas para el cociente  $\Delta/G$ . De todas maneras, lo que obtenemos es una **orbifold de Riemann** en la dimensión correspondiente. En este caso tenemos el siguiente resultado debido a Armstrong [10].

**Teorema 6.4.4.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  un grupo Kleiniano  $n$ -dimensional con región de discontinuidad  $\Omega \neq \emptyset$  y sea  $\Delta \subset \Omega$  una componente simplemente conexa y  $G$ -invariante de  $\Omega$ . Si

$$H = \{t \in G : \text{Fix}(t) \cap \Delta \neq \emptyset\},$$

entonces

$$H \triangleleft G \quad \text{y} \quad \pi_1(\Delta/G) \cong G/H.$$

**Ejemplo 6.4.5.** — Sea  $G$  el grupo cíclico generado por una rotación  $R \in \widehat{\mathbb{M}}^n$  de orden finita. Entonces tenemos que  $\Omega = \widehat{\mathbb{R}}^n$  y  $H = G$ . Luego,  $\widehat{\mathbb{R}}^n/G$  es un orbifold que es simplemente conexo.

### 6.5. Dominios fundamentales

Consideremos un grupo Kleiniano  $n$ -dimensional  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$ . Para tener una idea de como luce el cociente  $\Omega(G)/G$ , podemos escoger subconjuntos de  $\Omega(G)$  que contengan exáctamente un punto de cada órbita. No cualquier conjunto con tal propiedad es bueno para este estudio. Ahora procederemos a definir algunos conjuntos que nos servirán para este propósito.

**Definición 6.5.1.** — Un subconjunto  $\mathcal{F} \subset \Omega(G)$  (no necesariamente conexo) es llamado un **dominio fundamental de  $G$**  si tiene las siguientes propiedades.

(i) Por cada punto  $p \in \Omega(G)$

$$\#(\mathcal{F} \cap G(p)) \geq 1$$

$$\#(\text{Int}(\mathcal{F}) \cap G(p)) \leq 1$$

(ii) La frontera de  $\mathcal{F}$  tiene medida de Lebesgue igual a cero.

**6.5.1. Región fundamental de Ford.** — Una manera de construir tales dominios fundamentales es por medio de esferas isométricas.

**Definición 6.5.2.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  un grupo Kleiniano tal que  $\forall \gamma \in G$  tenemos que  $\gamma(\infty) \neq \infty$ . Por cada  $\gamma \in G - \{I\}$  tenemos su esfera isométrica  $I_\gamma$ , que tiene centro en  $\gamma^{-1}(\infty)$ , la cual divide a  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  en dos bolas generalizadas. Denotamos por  $\text{Ext}(I_\gamma)$  a la unión de  $I_\gamma$  con la bola generalizada determinada por  $I_\gamma$  que no contiene a  $\gamma^{-1}(\infty)$ . El conjunto

$$\bigcap_{\gamma \in G - \{I\}} \text{Ext}(I_\gamma)$$

es llamado la **región fundamental de Ford** del grupo  $G$ .

En el próximo capítulo (ver Proposición 7.2.1) veremos que las esferas isométricas de una colección infinita de elementos diferentes de un grupo Kleiniano tienen la propiedad que sus diámetros tienden a cero. Lo otro importante a observar es que dada una transformación de Möbius  $\gamma \neq I$ , tal que  $\gamma(\infty) \neq \infty$ , y dado cualquier punto  $p$ , entonces existe una potencia  $\gamma^r$  de manera que  $\gamma^r(p)$  vive en la clausura de  $\text{Ext}(I_\gamma) \cap \text{Ext}(I_{\gamma^{-1}})$ . Usando esencialmente tales propiedades se puede verificar el siguiente resultado.

**Proposición 6.5.3 ([56]).** — *La región fundamental de Ford es un dominio fundamental para  $G$ . Más aún, la frontera de tal región consiste en arcos de círculos ( $n = 2$ ) ó polígonos circulares ( $n = 3$ ). Si consideramos los pegamentos de los lados frontera dados por identificación de puntos de la misma órbita, obtendremos un espacio topológico homeomorfo al cociente  $\Omega(G)/G$ .*

Más adelante veremos como construir otros dominios fundamentales para grupos que dejan invariante un una bola  $n$ -dimensional, llamados **dominios de Dirichlet**.

PROBLEMAS. —

- 1.- Considere en  $S^n$  una colección finita de esferas generalizadas  $(n - 1)$ -dimensionales, dos a dos disjuntas y tal que todas ellas acotan un dominio común. Si  $G$  es el grupo generado por las reflexiones en todas esas esferas, determinar un dominio fundamental de  $G$  y determine el orbifold uniformizado por  $G$ .
- 2.- Considere en  $S^n$  una colección de  $2k$  esferas generalizadas  $(n - 1)$ -dimensionales, digamos  $C_1, C'_1, \dots, C_k$  y  $C'_k$ , dos a dos disjuntas y tal que todas ellas acotan un dominio común  $\mathcal{D}$ . Sea  $t_j$  una transformación de Möbius tal que
  - (i)  $t_j(C_j) = C'_j$ , para cada  $j = 1, \dots, k$ ;
  - (ii)  $t_j(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D} = \emptyset$ , para cada  $j = 1, \dots, k$ .
 Si  $G$  es el grupo de Schottky clásico generado por las transformaciones  $t_1, \dots, t_k$ , determinar un dominio fundamental de  $G$  y el orbifold que este uniformiza.

## 6.6. Grupos discretos en $\widehat{\mathbb{M}}^n$

Ya que  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  es compacto y cada transformación de (extendida) de Möbius puede ser determinada únicamente por su acción en un número finito de puntos, tenemos que las nociones de convergencia localmente uniforme, convergencia uniforme y convergencia puntual coinciden en este caso (ver Problema 1.- más abajo).

**Proposición 6.6.1.** — *Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  y  $H$  un subgrupo de índice finito en  $G$ . Entonces  $G$  es discreto sí y sólo si  $H$  es discreto.*

*Demonstración.* — Es claro que si  $G$  es discreto, entonces  $H$  lo es. Supongamos ahora que  $H$  es discreto. Como el índice de  $H$  es finito en  $G$ , tenemos que existen elementos  $t_j \in G$ , para  $j = 1, \dots, N$ , de manera que  $G = \cup_{j=1}^N Ht_j$ . Supongamos que tenemos una sucesión  $g_n \in G$  que converge a la identidad. Entonces podemos escoger una subsucesión, que denotamos otra vez como  $g_n$ , de manera que  $g_n \in Ht_k$ , para un mismo  $k$ . Es decir,  $g_n = h_n \circ t_k$ , para ciertos  $h_n \in H$ . Entonces

$h_n = g_n \circ t_k^{-1}$  debe converger a  $t_k^{-1}$ . Como  $H$  es discreto, debe ocurrir que existe un valor  $M > 0$  tal que para  $n \geq M$  vale que  $h_n = t_k^{-1}$ , en particular,  $g_n = I$ .  $\square$

**Corolario 6.6.2.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  y  $G^+$  su subgrupo de índice dos de transformaciones de Möbius en  $G$ . Entonces  $G$  es discreto sí y sólo si  $G^+$  es discreto.

**Proposición 6.6.3.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  y denotemos por  $\widehat{G} < \widehat{\mathbb{M}}^{n+1}$  una extensión de Poincaré de  $G$ . Entonces  $G$  es discreto sí y sólo si  $\widehat{G}$  es discreto.

*Demonstración.* — Es claro que si  $\widehat{G}$  es discreto, entonces  $G$  también lo es. Veamos ahora la otra dirección. Sea  $S \subset \widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$  la esfera invariante por  $\widehat{G}$  definida por una proyección estereográfica. Es decir, cada bola acotada por  $S$  es invariante por tal grupo. Sea  $B$  una de estas y sea  $d_B$  la métrica hiperbólica en  $B$ . Entonces sabemos que  $\widehat{G}$  actúa como grupo de isometrías. Supongamos que tenemos una sucesión  $g_n \in G$  que converge a la identidad. Denotemos por  $\widehat{g}_n \in \widehat{G}$  la respectiva sucesión de extensiones de Poincaré. Tomemos un punto  $z \in B$  y dos líneas geodésicas diferentes en  $B$ , digamos  $L_1$  y  $L_2$ , de manera que  $z$  es punto de intersección de ellas. Como  $g_n(x)$  converge a  $x$  para cada  $x \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ , tenemos que  $\widehat{g}_n(p)$  converge a  $p$  para cada  $p \in S$ . En particular, esto nos asegura que  $\widehat{g}_n(L_j)$  converge a  $L_j$ , para  $j = 1, 2$ . Ahora, esto nos dá que  $\widehat{g}_n(z)$  converge a  $z$ . En particular,  $\widehat{g}_n$  converge puntualmente a la identidad. Ya que cada transformación de Möbius queda determinada por la acción en un número finito de puntos diferentes, la convergencia puntual es lo mismo que convergencia uniforme.  $\square$

PROBLEMAS. —

- 1.- Verificar que las nociones de convergencia localmente uniforme, convergencia uniforme y convergencia puntual coinciden en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ .
- 2.- Sean  $L_1, L_2 \subset S^n$  dos esferas generalizadas, ambas de dimensión 1 (es decir, círculos generalizados), de manera que se intersectan en exácamente dos puntos. Sea  $A_j$  la transformación de Möbius de orden dos que tiene a  $L_j$  como conjunto de puntos fijos, para  $j = 1, 2$ . Si  $G$  es el grupo generado por  $A_1$  y  $A_2$ , determinar condiciones para asegurar la discretitud de  $G$ .
- 3.- ¿Qué puede decir del problema anterior para las demás posibilidades de intersección?

### 6.7. Grupos discretos versus grupos Kleinianos

En esta sección veremos que todo grupo Kleiniano  $n$ -dimensional es un grupo discreto y que todo grupo  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  es siempre un grupo Kleiniano  $(n + 1)$ -dimensional. Veremos un ejemplo de un grupo discreto en  $\widehat{\mathbb{M}}^2$  que no es Kleiniano 2-dimensional.

**Proposición 6.7.1.** — Si  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  es un grupo Kleiniano  $n$ -dimensional, entonces  $G$  es discreto.

*Demonstración.* — Sea  $x \in \Omega(G)$  tal que  $G_x = \{I\}$  y  $U_x \subset \Omega(G)$  un abierto tal que  $g(U_x) \cap U_x = \emptyset$  para todo  $g \in G, g \neq I$ . Supongamos que existe una sucesión  $g_n \in G$  de elementos diferentes convergiendo a la identidad. Entonces es claro que  $g_n(U_x) \cap U_x \neq \emptyset$  para todo  $n$  suficientemente grande, una contradicción a la elección de  $U_x$ . □

A continuación mostramos un ejemplo de un grupo discreto que no es Kleiniano (según nuestra definición) para  $n = 2$ .

**Ejemplo 6.7.2.** — El grupo  $G = PSL(2, \mathbb{Z}[i]) < \mathbb{M}^2$  formado por las transformaciones de la forma

$$t(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}[i], ad - bc = 1$ , es un grupo discreto pero  $\Omega(G) = \emptyset$ . Ejemplos similares existen de grupos discretos en  $\widehat{\mathbb{M}}^n$  con  $\Omega(G) = \emptyset$ . Estos ejemplos corresponden a las variedades hiperbólicas de volumen finito, de dimensiones  $n + 1$ .

Ahora procederemos a ver que cada vez que tenemos un grupo discreto, su extensión de Poincaré nos es un grupo Kleiniano en la siguiente dimensión. Veamos primero el caso planar. Dada una transformación de Möbius

$$t(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1$ , tenemos su norma

$$\|t\| = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2.$$

Si  $\widehat{t}$  es la extensión de Poincaré de  $t$  determinada por la proyección estereográfica  $\phi: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow S$ , donde

$$S_{\mathbb{R}} = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\} \cup \{\infty\},$$

entonces  $\widehat{t}$  actúa como isometría del modelo  $\mathbb{H}^3$  del espacio hiperbólico.

**Lema 6.7.3.** —

$$\|t\| = 2 \cosh(d_{\mathbb{H}^3}(e_3, \widehat{t}(e_3)))$$



*Demonstración.* — Para simplificar los cálculos, usemos la identificación

$$\mathbb{H}^3 = \{z + rj : z \in \mathbb{C}, r > 0\},$$

es decir como subconjunto de los cuaterniones. De esta manera  $e_3 = j$  y

$$\tilde{t}(z, r) = \frac{(az + b)(\overline{cz + d}) + a\bar{c}r^2 + rj}{|c(z + rj) + d|^2}$$

La forma infinitesimal de la métrica hiperbólica es dada por

$$ds = \sqrt{\frac{|dz|^2 + dr^2}{r^2}}$$

De esta manera se tiene que

$$2 \cosh(d_{\mathbb{H}^3}(j, \tilde{t}(j))) = \frac{|j - \tilde{t}(j)|^2}{|c|^2 + |d|^2} + 2$$

de donde se obtiene el resultado. □

**Teorema 6.7.4.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^2$  un grupo discreto y sea  $\phi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow S$  una proyección estereográfica, donde  $S \subset \widehat{\mathbb{R}}^3$  es una esfera generalizada. Entonces la extensión de Poincaré de  $G$  en  $\widehat{\mathbb{M}}^3$  es un grupo Kleiniano 3-dimensional. Más aún,  $\Lambda(G) \subset S$ .

Este resultado es consecuencia del teorema 5.2.18 pero daremos una demostración usando propiedades de la métrica hiperbólica.

*Demonstración.* — Por lo anterior, basta asumir que  $G$  es grupo de transformaciones de Möbius. Ya que al conjugar un grupo Kleiniano espacial por una transformación de Möbius 3-dimensional volvemos a obtener un grupo Kleiniano espacial, podemos asumir  $S = S_{\mathbb{R}}$ . De esta manera, podemos asumir que la extensión de Poincaré  $\tilde{G}$  de  $G$  es un grupo de isometrías del modelo del espacio hiperbólico dado por el semi-espacio superior  $\mathbb{H}^3$ . Supongamos que este grupo  $\tilde{G}$  no actúa discontinuamente en un punto  $x \in \mathbb{H}^3$ . Entonces podemos conjugar  $G$  por una isometría  $t$  tal que  $t(x) = (0, 0, 1)$ . De esta manera, podemos asumir  $x = (0, 0, 1)$  y tendremos la existencia de una sucesión infinita  $\tilde{t}_n \in \tilde{G}$  tal que  $\tilde{t}_n(j)$  converge a  $j$ . Por el lema anterior tenemos que  $\|\tilde{t}_n\|$  converge a 1, es decir, los coeficientes de la representación matricial de todas estas transformaciones están acotados. Luego podemos encontrar una subsucesión convergente, contradiciendo la discretitud de  $G$ . □

El resultado anterior es de hecho válido en mayores dimensiones, es decir.

**Teorema 6.7.5.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  un grupo discreto y sea  $\phi : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow S$  una proyección estereográfica, donde  $S \subset \widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$  es una esfera generalizada. Entonces la extensión de Poincaré de  $G$  en  $\widehat{\mathbb{M}}^{n+1}$  es un grupo Kleiniano  $(n+1)$ -dimensional. Más aún,  $\Lambda(G) \subset S$ .

Por lo anterior, cada vez que tenemos un grupo discreto  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  de transformaciones (extendidas) de Möbius, su extensión de Poincaré  $\widehat{G} < \widehat{\mathbb{M}}^{n+1}$  es Kleiniano. Además,  $\Lambda(\widehat{G}) = \Lambda(G)$ .

Diremos que un grupo discreto  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  es un **grupo Kleiniano de la segunda clase** si  $G$  es Kleiniano  $n$ -dimensional y, en caso contrario, que es un **grupo Kleiniano de la primera clase** (luego no es Kleiniano  $n$ -dimensional, pero es Kleiniano  $(n+1)$ -dimensional).

PROBLEMAS. —

- 1.- Escribir los detalles del ejemplo 6.7.2.
- 2.- Verificar que el teorema 6.7.4 es consecuencia del teorema 5.2.18.

## CAPÍTULO 7

### PROPIEDADES DE GRUPOS DISCRETOS

En este capítulo veremos algunas propiedades generales sobre grupos discretos  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$ .

#### 7.1. Loxodrómicos en grupos discretos

Nuestra primera relación tiene que ver con los puntos fijos de elementos loxodrómicos de grupos discretos.

**Proposición 7.1.1.** — Sean  $f, g \in \mathbb{M}^n$  transformaciones de Möbius, ambas diferentes de la identidad. Si  $f$  es loxodrómica y ambas tienen exactamente un punto fijo en común, entonces el grupo generado por ellas no es discreto.

*Demonstración.* — Veamos el caso  $n = 2$ . Conjugando por una transformación de Möbius si es necesario, podemos asumir que  $\infty$  es el punto fijo en común y que  $f$  también fija 0 (y que este punto fijo es repulsor). Luego

$$f(z) = \lambda^2 z, \quad g(z) = az + b$$

donde

$$|\lambda^2| > 1 \text{ y } b \neq 0$$

La sucesión de transformaciones  $t_m = f^{-m}(g(f^m(z))) = az + b/\lambda^m$  converge a  $q(z) = az$  cuando hacemos tender  $m$  hacia  $+\infty$ , una contradicción para la discretitud.

En caso de mayores dimensiones, la demostración es muy similar. Al igual que en el caso planar, podemos asumir que  $f$  fija 0 (punto fijo atractor) y fija al punto  $\infty$  (punto fijo repulsor), es decir,  $f(x) = \lambda Rx$ , donde  $0 < \lambda < 1$  (cambiamos  $f$  por  $f^{-1}$  si es necesario) y  $R$  es una matriz ortogonal. También podemos asumir que  $\infty$  es el punto fijo en común. Luego  $g(x) = \mu Sx + a$ , donde  $\mu > 0$ ,  $S$  es una matriz ortogonal y  $a \neq 0$ . Luego,

$$t_m(x) = f^m \circ g \circ f^{-m}(x) = \lambda^m R^m a + \mu R^m S R^{-m} x.$$

Como  $t_m(0) = \lambda^m R^m a$  converge a 0 y  $a \neq 0$ , tenemos que las transformaciones  $t_m$  son dos a dos diferentes. Ahora, como el grupo ortogonal es compacto,

podemos extraer una subsucesión  $t_{m_k}$  que converge, obteniendo que el grupo por ellas generadas no es discreto. □

PROBLEMAS. —

- 1.- Verificar que si el teorema 7.1.1 eliminamos la palabra "exáctamente", entonces el resultado ya no es verdad.
- 2.- Sean  $f, g \in \mathbb{M}^n$  de manera que  $f$  es loxodrómico y ambas tienen un punto fijo en común. Determinar cuando el grupo generado por ellas es discreto.

## 7.2. Radios de esferas isométricas

Veamos ahora la siguiente propiedad respecto a los radios de las esferas isométricas de grupos Kleinianos.

**Proposición 7.2.1.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  un grupo Kleiniano tal que  $\infty \in \Omega(G)$  y tal que todo elemento de  $G - \{I\}$  no fija  $\infty$ . Entonces, si denotamos por  $r_g$  el radio de la esfera isométrica de  $g \in G - \{I\}$ , se tiene que

$$\sum_{g \in G - \{I\}} r_g^{2n} < \infty,$$

en particular, si  $g_m \neq I$  es una sucesión de elementos diferentes de  $G$ , entonces

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} r_{g_m} = 0.$$

*Demonstración.* — Como  $\infty \in \Omega(G)$  y  $g(\infty) \neq \infty$  para todo  $g \in G - \{I\}$ , podemos escoger un radio  $R > 0$  suficientemente grande de manera que el conjunto

$$U = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z\| \geq R\} \cup \{\infty\}$$

tiene la propiedad que

$$g(U) \cap U = \emptyset$$

para cada  $g \in G - \{I\}$ .

La idea es usar la Proposición 3.6.1 con  $E = U$ . En efecto, sea  $g \in G - \{I\}$ . Denotemos por  $R > \delta_g > 0$  la distancia entre  $U$  y  $g^{-1}(\infty)$  (el centro de la esfera isométrica de  $g$ ). Tenemos la desigualdad :

$$\text{diam}(g(U)) \geq \frac{r_g^2}{\delta_g} \geq \frac{r_g^2}{R}.$$

Como  $g(U)$  debe ser una bola Euclidiana, tenemos que su radio es mayor o igual a  $r_g^2/2R$ . En particular,

$$\text{Vol}(g(U)) \geq \frac{r_g^{2n}}{2^n R^n},$$

donde "Vol" denota *volumen Euclidiano*. Ahora basta observar que para  $g \neq k$ ,  $g, k \in G - \{I\}$  se debe tener que  $g(U) \cap k(U) = \emptyset$ . Luego las imágenes por

los elementos de  $G - \{I\}$  de  $U$  es una colección disjunta dos a dos de bolas Euclidianas contenidas en la bola de radio  $R$  y centro el origen. Esto dice que la suma de los volúmenes de estos es finita, es decir,

$$\infty > 2^n R^n \sum_{g \in G - \{I\}} \text{Vol}(g(U)) \geq \sum_{g \in G - \{I\}} r_g^{2n}$$

obteniendo la propiedad buscada.  $\square$

**Observación 7.2.2.** — El resultado anterior asegura que si  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  es un grupo Kleiniano tal que  $\infty \in \Omega(G)$  no es punto fijo de ninguno de los elementos no triviales de  $G$ , entonces existe una transformación  $g \in G - \{I\}$  con máximo valor de  $r_g$  (es decir, máximo radio de su esfera isométrica). Para  $n = 2$  esto es equivalentemente a tener el mínimo valor de  $c > 0$  si  $g$  es representado por una matriz

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$$

### 7.3. Grupos discretos en $\widehat{\mathbb{M}}^n$ son convergentes

Una consecuencia directa de la Proposición 7.2.1 es la siguiente información respecto a la convergencia de subsucesiones de elementos de un grupo discreto.

**Proposición 7.3.1.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  un grupo discreto y consideremos una sucesión  $g_m \in G$  de elementos diferentes. Entonces existen puntos límites  $x, y \in \Lambda(G)$  y una subsucesión  $g_{m_k}$  tal que

- (i)  $g_{m_k}(z)$  converge a  $x$  uniformemente en compactos de  $\widehat{\mathbb{R}}^n - \{y\}$ ;
- (ii)  $g_{m_k}^{-1}(z)$  converge a  $y$  uniformemente en compactos de  $\widehat{\mathbb{R}}^n - \{x\}$ .

*Demonstración.* — Primero que nada, haciendo una extensión de Poincaré, si es necesario, podemos asumir que  $G$  es Kleiniano. Además, como este resultado es independiente del proceso de conjugación, podemos asumir que  $\infty \in \Omega(G)$  y que todo  $g \in G - \{I\}$  satisface  $g(\infty) \neq \infty$ . Ahora consideremos los centros de las esferas isométricas  $I_{g_m}$  de  $g_m$  y  $I_{g_m^{-1}}$  de  $g_m^{-1}$ , es decir  $g_m^{-1}(\infty)$  y  $g_m(\infty)$ . Por compacidad de la esfera de Riemann, podemos extraer una subsucesión, la cual seguiremos denotando por  $g_m$ , de manera que  $g_m^{-1}(\infty)$  converge a un valor  $y$  y  $g_m(\infty)$  converge a un valor  $x$ .

Sea  $K \subset \widehat{\mathbb{R}}^n - \{x\}$  un compacto. Como  $g_m^{-1}(\infty)$  converge a  $x$ , existe un entero  $N_K > 0$  de manera que si  $m \geq N_K$ , entonces  $K$  está contenido en el exterior de la esfera isométrica  $I_{g_m}$ . Como  $g_m$  envía el exterior de  $I_{g_m}$  en el interior de  $I_{g_m^{-1}}$ , entonces tenemos que  $g_m(K)$  está contenida en el interior de la esfera  $I_{g_m^{-1}}$ . Como los radios de estas esferas converge a 0 y los radios convergen a  $y$ , entonces

tenemos que  $g_m(K)$  converge al punto  $y$  como se deseaba. La otra demostración es análoga y se deja como tarea.  $\square$

**Observación 7.3.2 (Grupos Convergentes).** — La propiedad probada en la Proposición 7.3.1 para los subgrupos discretos de  $\widehat{\mathbb{M}}^n$  permitirá obtener varias propiedades sobre tales grupos discretos. Tales propiedades funcionarán en grupos de homeomorfismos de  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  que sean grupos convergentes. Es importante notar en este punto que existen grupos convergentes  $K < \text{Hom}(\widehat{\mathbb{R}}^n)$  que no son topológicamente conjugados a grupos en  $\widehat{\mathbb{M}}^n$  [22, 23].

PROBLEMAS. —

- 1.- Verificar que si  $G$  es un grupo Kleiniano, entonces  $\Lambda(G)$  es denso en ninguna parte, es decir, no existe abierto  $V$  de manera que  $\Lambda(G) \cap V$  es denso en  $V$ .

#### 7.4. Grupos finitos

**Proposición 7.4.1.** — Sea  $G$  un subgrupo de  $\widehat{\mathbb{M}}^n$ . Entonces  $\Lambda(G) = \emptyset$  si y sólo si  $G$  es finito.

*Demonstración.* — Sabemos que si  $G$  es finito, entonces  $\Lambda(G) = \emptyset$ . Sea  $G$  infinito y  $\Lambda(G) = \emptyset$ . Como  $G$  es infinito, podemos extraer una sucesión  $g_n \in G$  de elementos diferentes. Como  $G$  es Kleiniano, luego discreto, podemos usar la Proposición 7.3.1 para obtener que  $\Lambda(G) \neq \emptyset$ , una contradicción.  $\square$

PROBLEMAS. —

- 1.- Liste todos los subgrupos finitos de  $\mathbb{M}^2$ .
- 2.- Para cada grupo finito  $G < \mathbb{M}^2$  determine el orbifold  $S^2/G$ .
- 3.- Verifique que todo grupo finito abstracto se puede ver como un subgrupo de transformaciones de Möbius de alguna dimensión. ¿Puede indicar la mínima dimensión para cada grupo finito ?

#### 7.5. Grupos elementales y no-elementales

**Proposición 7.5.1.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  un grupo discreto. Entonces las posibilidades para  $\Lambda(G)$  son las siguientes : (i)  $\emptyset$ ; (ii) un punto; (iii) dos puntos; ó (iv) infinito.

*Demonstración.* — Supongamos que  $G$  tiene al menos tres puntos límites. Por la Proposición 7.4.1,  $G$  debe ser infinito y luego podemos extraer una sucesión  $g_n \in G$  de elementos diferentes. Sean  $x, y \in \Lambda(G)$  como en la Proposición 7.3.1. Como hay un punto  $z \in \Lambda(G) - \{x, y\}$ , tenemos que su órbita por la sucesión  $g_n$  nos dará un número infinito de puntos límites.

Una manera de probar este hecho sin utilizar la Proposición 7.3.1 es como sigue. Supongamos que  $\Lambda(G)$  es finito de cardinalidad  $d \geq 3$ . Módulo conjugación por una transformación de Möbius, podemos asumir que  $\{a_1 = \infty, a_2 = 0, a_3 = e_1 = (1, 0, \dots, 0), a_4, \dots, a_d\} = \Lambda(G)$ . Podemos extraer un subgrupo de índice finito  $H$  de  $G$  con la propiedad que cada elemento de  $H$  fija  $a_j$ , para cada  $j = 1, \dots, d$ . Si  $h \in H$ , entonces como  $h(0) = 0$  y  $h(\infty) = \infty$ , tenemos que  $h(x) = \lambda Rx$ , donde  $\lambda > 0$  y  $R$  es una matriz ortogonal. Como  $h(e_1) = e_1$ , tenemos que  $\lambda = 1$ . De esta manera,  $H$  es un subgrupo discreto del grupo ortogonal, el cual es compacto; luego  $H$  es finito. Como  $H$  es de índice finito en  $G$ , tenemos que  $G$  es también finito; luego  $\Lambda(G) = \emptyset$ , una contradicción.  $\square$

**Definición 7.5.2.** — Si  $G$  es grupo discreto y  $\Lambda(G)$  contiene al menos tres puntos, entonces decimos que  $G$  es un **grupo no-elemental**. En caso contrario, decimos que  $G$  es un **grupo elemental**.

El siguiente resultado nos da la clasificación de los grupos Kleinianos elementales y completa la información dada en la Proposición 7.4.1.

**Teorema 7.5.3.** — Si  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  es un grupo Kleiniano elemental, entonces :

- (i)  $\Lambda(G) = \emptyset$  sí y sólo si  $G$  es finito.
- (ii)  $\Lambda(G) = \{p\}$  sí y sólo si  $G$  es una extensión finita y normal de un grupo Abeliano libre de rango finito generado por elementos parabólicos.
- (iii)  $\Lambda(G) = \{p, q\}$ ,  $p \neq q$ , sí y sólo si  $G$  es un grupo infinito que contiene transformaciones loxodrómicas que tienen a  $p$  y  $q$  como puntos fijos. Más aún,  $G$  es una extensión finita normal de un grupo cíclico locodrómico.

*Idea general de la demostración.* — Parte (i) es exactamente lo que dice la Proposición 7.4.1. Supongamos ahora que  $G$  es infinito.

Parte (ii). Supongamos que  $\#\Lambda(G) = 1$ . Podemos asumir, módulo conjugación, que  $\Lambda(G) = \{\infty\}$ . Como el conjunto límite es invariante por el grupo, toda transformación de  $G$  fija el punto  $\infty$ . Es claro que  $G$  no puede tener elementos loxodrómicos (pues ambos puntos fijos de un loxodrómico son puntos límites). Veamos que  $G$  debe contener elementos parabólicos. En efecto, si  $G$  no contiene parabólicos, entonces toda transformación de  $G$  es elíptica de orden finito que fija  $\infty$  y otro punto en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $t$  un elemento de  $G - \{I\}$ . Módulo conjugar por una traslación (así  $\infty$  sigue siendo el único punto límite) podemos asumir que  $0$  es punto fijo de  $t$ . Como  $G$  es infinito, podemos encontrar una sucesión  $g_m \in G - \langle t \rangle$  de

elementos diferentes tales que  $g_m(x)$  y  $g_m^{-1}(x)$  convergen a  $\infty$  en subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^n$ . De esta manera, las transformaciones  $h_m = g_m \circ t^{-1} \circ g_m^{-1}$  son transformaciones elípticas con  $\infty$  y  $g_m(0)$  como puntos fijos. Para  $m$  suficientemente grande se puede verificar que el conmutador  $t \circ h_m$  deja de ser elíptico de orden finito, una contradicción. Consideremos el subgrupo  $H$  de  $G$  generado por los elementos parabólicos de  $G$  (el cual es claramente un subgrupo normal de  $G$ ). El grupo  $H$  es un grupo discreto de isometrías Euclidianas (todos sus elementos son translaciones). Es bien conocido que  $H$  es un grupo Abeliano libre de rango finito (el rango es acotado arriba por  $n$ ). Es posible verificar que  $H$  tiene índice finito en  $G$ , pero esto es un poco más complicado.

Parte (iii). Supongamos ahora que  $\#\Lambda(G) = 2$ . Módulo conjugación, podemos asumir que  $\Lambda(G) = \{0, \infty\}$ . En este caso, todo elemento de  $G - \{I\}$  debe preservar estos dos puntos. Ahora, la infinitud de  $G$  nos permite asegurar que el subgrupo  $H$  de  $G$ , formado por aquellas transformaciones que fijan  $0$  e  $\infty$ , es un subgrupo de índice a lo más dos, luego es un subgrupo normal infinito.

Todo elemento de  $H$  tiene la forma  $g(x) = \lambda_g R_g x$ , donde  $\lambda_g > 0$  y  $R_g \in O_n$ . Aseguramos la existencia de elementos  $g \in H$  con multiplicador  $\lambda_g \neq 1$ . En efecto, si tenemos que  $\lambda_g = 1$  para todo  $g \in H$ , entonces  $H < O_n$ . Ya que  $O_n$  es compacto y  $H$  discreto, entonces  $H$  debe ser finito, y luego  $G$  es finito, una contradicción. Es claro que los elementos  $g \in H - \{I\}$  con  $\lambda_g \neq 1$  son loxodrómicos. Más aún, se puede verificar que  $H$  es extensión finita de un grupo cíclico loxodrómico por un grupo ortogonal finito.

Ahora, por discretitud de  $G$ , la Proposición 7.1.1 asegura que  $G$  no tiene elementos parabólicos. Un elemento de  $G - H$  no puede ser parabólico ni loxodrómico, es decir, debe ser elíptico. De esta manera,  $G$  es una extensión finita y normal de un grupo cíclico loxodrómico.

□

PROBLEMAS. —

- 1.- Determinar todos los grupos Kleinianos de  $\mathbb{M}^2$  y  $\mathbb{M}^3$  cuyo conjunto límite consiste de un punto.
- 2.- Determinar todos los grupos Kleinianos de  $\mathbb{M}^2$  y  $\mathbb{M}^3$  cuyo conjunto límite consiste de dos puntos.
- 3.- Mostrar ejemplos de grupos Kleinianos no-elementales.
- 4.- Completar los detalles de la demostración del Teorema 7.5.3, al menos para el caso  $n = 2$ .



### 7.6. Puntos límites son puntos límites de órbitas

En el próximo resultado veremos que en efecto los puntos límites de un grupo Kleiniano son puntos límites de órbitas. Más adelante, usando la extensión de Poincaré, veremos que esto es también válido para grupos discretos que son Kleinianos de la primera clase.

**Proposición 7.6.1.** — Si  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  es un grupo Kleiniano, entonces tenemos que  $x \in \Lambda(G)$  sí y sólo si existe un punto  $p \in \widehat{\mathbb{R}}^n$  y una sucesión  $g_m$  de elementos diferentes de  $G$  tal que  $g_m(p)$  converge a  $x$ .

*Demonstración.* — Módulo conjugación, podemos asumir que  $\infty \in \Omega(G)$  y  $G_\infty = \{I\}$ . Por el teorema 7.5.3, tenemos claro el resultado para el caso elemental. Supongamos ahora que  $G$  es un grupo Kleiniano no-elemental.

(1) Supongamos que tenemos un punto  $p \in \widehat{\mathbb{R}}^n$  y una sucesión  $g_m \in G$  de elementos diferentes tal que  $g_m(p)$  converge a  $x$ . Entonces para cualquier vecindad abierta  $U$  de  $x$  existirá un entero  $M > 0$  tal que para  $m > M$  vale que  $g_{m+1} \circ g_m^{-1}(U) \cap U \neq \emptyset$ . Ahora, como la sucesión  $g_m$  consiste de elementos diferentes, entonces existen infinitos valores de  $m$  tales que la sucesión  $g_{m+1} \circ g_m^{-1}$  es de elementos diferentes. Luego,  $x \in \Lambda(G)$ .

(2) Sea  $x \in \Lambda(G)$ . Tenemos dos casos a considerar :

(2.1) El estabilizador  $G_x = \{g \in G : g(x) = x\}$  es infinito. En este caso podemos escoger  $p = x$  y la sucesión en  $G_x$ .

(2.2) El estabilizador  $G_x$  es finito y para cualquier bola abierta  $B$  centrada en  $x$  existen infinitas transformaciones  $g \in G$  tales que  $g(B) \cap B \neq \emptyset$ . Para cada  $m \in \{1, 2, 3, \dots\}$  escogemos  $g_m \in G$ , todos diferentes, tales que  $g_m \notin G_x$  y  $g_m(B_m) \cap B_m \neq \emptyset$ , donde  $B_m$  denota la bola Euclidiana centrada en  $x$  y radio  $1/m$ . Podemos pasar a una subsucesión para asumir que  $g_m^{-1}(\infty)$  y  $g_m(\infty)$  convergen. Ahora, como  $g_m(B_m) \cap B_m \neq \emptyset$ , es claro que  $B_m$  debe cortar al interior de la esfera isométrica  $I_{g_m}$  ó al interior de la esfera isométrica  $I_{g_m^{-1}}$ . Pasando a una subsucesión y reemplazando por inversos, podemos asumir que  $B_m$  corta al interior de la esfera isométrica  $I_{g_m^{-1}}$ . Como los radio de  $B_m$  y de  $I_{g_m^{-1}}$  convergen a cero, tenemos que  $g_m(\infty)$  converge a  $x$  (así, tomamos  $p = \infty$ ).

□

El argumento de la demostración anterior también nos da el siguiente hecho.

**Proposición 7.6.2.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  un grupo Kleiniano. Entonces para cada  $x \in \Lambda(G)$  existe un punto  $y \in \Lambda(G)$  y una sucesión  $g_m$  de elementos diferentes de  $G$  tal que  $g_m(w)$  converge a  $x$  uniformemente en compactos de  $\widehat{\mathbb{R}}^n - \{y\}$ .

*Demonstración.* — En el caso que  $\Lambda(G) = \{x\}$ , entonces  $G_x$  contiene un parabólico  $g$ . Podemos considerar  $y = x$  y  $g_m = g^m$ . Similarmente, si  $\Lambda(G) = \{x, y\}$ , entonces  $G$  contiene un loxodrómico  $g$  cuyos puntos fijos son  $x$  (atractor) e  $y$  (repulsor). En este caso,  $g^m$  es la sucesión deseada.

Ahora, veamos el caso que  $\Lambda(G)$  es infinito. Supongamos la misma notación que en la demostración anterior. Si  $x$  satisface la propiedad (2.2) de la demostración anterior, entonces usamos  $y$  como el límite de los puntos  $g_m^{-1}(\infty)$  (pasando a una subsucesión si es necesario). Si  $x$  satisface la condición (2.1) de tal demostración, entonces se puede ver que  $G_x$  debe necesariamente tener un elemento  $g$  que es loxodrómico o parabólico (ya que  $G_x$  es discreto y  $O_n$  es compacto). Así, podemos proceder como fué en el caso elemental, es decir usar  $g^m$  y poner como punto  $y$  al otro punto fijo de  $g$  (caso que  $g$  es loxodrómico con  $x$  como punto fijo atractor) o bien  $y = x$  (caso  $g$  es parabólico). □

Sabemos que si  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  es un grupo discreto y  $\widehat{G} < \widehat{\mathbb{M}}^{n+1}$  es una extensión de Poincaré de  $G$ , que deja invariante una esfera generalizada  $S$  y cada una de las bolas generalizadas que esta esfera acota, entonces  $\Lambda(G) = \Lambda(\widehat{G}) \subset S$ . De esta manera, lo anterior asegura lo siguiente.

**Corolario 7.6.3.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  un grupo discreto y  $\widehat{G} < \widehat{\mathbb{M}}^{n+1}$  una extensión de Poincaré de  $G$ . Si  $p \in \Lambda(G)$ , entonces existe una sucesión  $g_n \in G$  de elementos diferentes y un punto  $q \in \Lambda(G)$  tal que  $\widehat{g}_n(q)$  converge a  $p$  uniformemente en compactos de  $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1} - \{q\}$  (donde  $\widehat{g}_n$  denota la extensión de Poincaré de  $g_n$ ).

**Corolario 7.6.4.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  un grupo discreto. Si  $p \in \Lambda(G)$ , entonces existe una sucesión  $g_n \in G$  de elementos diferentes y un punto  $q \in \Lambda(G)$  tal que  $g_n(q)$  converge a  $p$  uniformemente en compactos de  $\widehat{\mathbb{R}}^n - \{q\}$ .

**Corolario 7.6.5.** — Sea  $G$  un grupo Kleiniano y  $\Lambda(G)$  con al menos tres puntos. Entonces  $\Lambda(G)$  es perfecto.

## 7.7. Existencia de loxodróminos

**Proposición 7.7.1.** — Si  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  es un grupo Kleiniano con  $\#\Lambda(G) \geq 2$ , entonces  $G$  contiene elementos loxodróminos. Más aún, para todo  $p \in \Lambda(G)$  existe una sucesión de elementos loxodróminos diferentes, digamos  $l_m \in G$ , cuyos puntos fijos atractores convergen a  $p$ .

*Demonstración.* — El caso en que  $\Lambda(G)$  consiste de dos puntos es consecuencia del teorema 7.5.3. Ahora en adelante supongamos que  $G$  es no-elemental.

Podemos asumir, módulo conjugación, que  $\infty \in \Omega(G)$  y que el  $G$ -estabilizador de  $\infty$  es trivial. Sea  $p \in \Lambda(G)$ . Hemos visto (ver la demostración de la Proposición 7.6.1) que es posible construir una sucesión  $g_m \in G$  de elementos diferentes tales que las esferas isométricas  $I_{g_m}$  convergen a  $p$  y las esferas isométricas  $I_{g_m^{-1}}$  convergen a un cierto  $q \in \Lambda(G)$  (no necesariamente diferente de  $p$ ).

1. Si  $p \neq q$ , entonces podemos encontrar  $m$  suficientemente grande de manera que  $I_{g_m}$  y  $I_{g_m^{-1}}$  se encuentran cada una en el exterior de la otra, en cuyo caso tendremos que  $g_m^{-1}$  es la sucesión de elementos loxodrómicos buscada.
2. Si  $p = q$ , entonces tomamos un punto  $w \in \Lambda(G) - \{p\}$ . De manera similar a lo anterior, existe  $u \in \Lambda(G)$  y una sucesión  $t_m \in G$  de elementos diferentes tales que las esferas isométricas  $I_{t_m}$  convergen a  $w$  y las esferas isométricas  $I_{t_m^{-1}}$  convergen a  $u$ .
  - (a) Si  $w = u$ , entonces, para  $m$  suficientemente grande, las esferas  $I_{t_m}, I_{t_m^{-1}}$  son exteriores a las esferas  $I_{g_m}, I_{g_m^{-1}}$ . En este caso,  $g_m \circ t_m$  es la sucesión buscada.
  - (b) Si  $w \neq u \neq p$ , entonces  $t_m$  es loxodrómica para  $m$  muy grande. Ahora, para  $m$  suficientemente grande las esferas isométricas  $I_{t_m}$  y  $I_{t_m^{-1}}$  estarán contenidas en el complemento común de  $I_{g_m}$  y  $I_{g_m^{-1}}$ . Así, al igual que en el caso anterior  $g_m \circ t_m$  es la sucesión buscada de elementos loxodrómicos.
  - (c) Si  $w \neq u = p$ , entonces  $t_m$  es loxodrómica para  $m$  suficientemente grande y es la sucesión buscada.

□

**Proposición 7.7.2.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  un grupo Kleiniano con  $\#\Lambda(G) \geq 2$ . Si  $p, q \in \Lambda(G)$ , entonces es posible encontrar una sucesión de loxodrómicos  $g_m \in G$  tal que los puntos fijos atractores de ellas se acumulan en  $p$  y los puntos fijos repulsores de ellas se acumulan en  $q$ .

*Demonstración.* — En el caso que  $\#\Lambda(G) = 2$ , entonces existe un loxodómico  $l \in G$  cuyos puntos fijos forman el conjunto límite. Luego tomando  $g_m = l^{\pm m}$  nos da el resultado deseado.

Supongamos ahora que  $G$  es no-elemental y sean  $p, q \in \Lambda(G)$ . Sabemos por la Proposición 7.6.2 que podemos escoger una sucesión  $l_m \in G$  de elementos loxodrómicos de manera que los puntos fijos atractores de  $l_m$  convergen a  $p$ . Por compacidad de  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ , podemos también asumir que los puntos fijos repulsores de  $l_m$  se acumulan en el punto  $u \in \Lambda(G)$ . Si  $q = u$ , entonces podemos usar  $g_m = l_m$ .

Supongamos que  $u \neq q$ . Entonces tomamos una sucesión de loxodrómicos  $t_m$  cuyos puntos fijos atractores se acumulan en  $q$  y sus puntos fijos repulsores

se acumulan en  $v$ . Si  $v = p$ , entonces nuestra sucesión buscada es  $g_m = t_m^{-1}$ . Supongamos entonces que  $v \neq p$ .

Si  $u \neq v$ , entonces para  $m$  suficientemente grande las esferas isométricas de  $t_m$  y  $t_m^{-1}$  estén el exterior de las esferas isométricas de  $l_m$  y  $l_m^{-1}$ . Luego  $g_m = l_m \circ t_m^{-1}$  define una sucesión de loxodrómicos como se desea.

Si  $u = v$ , entonces, ya que las esferas isométricas de  $l_m^{-1}$  y de  $t_m^{-1}$  son disjuntas para  $m$  suficientemente grande, tenemos que para tales valores de  $m$  los loxodrómicos  $l_m$  y  $t_m$  tienen al menos un punto fijo diferente y luego, por la discretitud de  $G$ , deben tener ambos puntos fijos diferentes. Así, para cada tal valor de  $m$  existe un entero  $k_m$  tal que las esferas isométricas de  $l_m^{k_m}$  y de  $t_m^{k_m}$  son disjuntas. Luego la sucesión de loxodrómicos dada por  $g_m = l_m^{k_m} \circ t_m^{-k_m}$  es la sucesión buscada.  $\square$

**Corolario 7.7.3.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  un grupo Kleiniano. Entonces  $G$  contiene sólo elementos elípticos sí y sólo si  $G$  es finito.

*Demonstración.* — Es claro que si  $G$  es finito, entonces todo elemento de  $G$  es elíptico. Supongamos ahora que tenemos un grupo  $G$  discreto con sólo elementos elípticos. Si  $G$  fuese infinito con  $\#\Lambda(G) \geq 2$ , entonces la Proposición 7.7.1 nos da una contradicción. Si  $\Lambda(G) = \emptyset$ , entonces por la Proposición 7.4.1 sabemos que  $G$  debe ser finito. Nos queda por eliminar el caso en que  $\#\Lambda(G) = 1$ , en cuya situación, podemos asumir que  $\Lambda(G) = \{\infty\}$ . En este caso,  $G$  es un grupo discreto de isometrías del espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Este grupo debe contener parabólicos para que  $\infty$  sea punto límite, una contradicción.  $\square$

**Corolario 7.7.4.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  un grupo Kleiniano no-elemental. Entonces  $G$  contiene dos transformaciones loxodrómicas  $f, g \in G$ , de manera que  $\text{Fix}(f) \cap \text{Fix}(g) = \emptyset$ .

*Demonstración.* — Por la Proposición 7.7.1 el grupo  $G$  debe contener alguna transformación loxodrómica. Sea  $f \in G$  un elemento loxodrómico y sean  $p, q$  sus puntos fijos. Sea  $u \in \Lambda(G) - \{p, q\}$ . Tomemos una sucesión  $g_n \in G$  y un punto  $v \in \Lambda(G)$  tal que  $g_n(x)$  converge hacia  $u$ , para  $x \in \widehat{\mathbb{R}}^n - \{v\}$ . Entonces tenemos que para  $n$  muy grande, la transformación loxodrómica  $h = g_n \circ f \circ g_n^{-1} \in G$  tiene sus puntos fijos muy cerca de  $u$ , luego diferentes a  $f$ .  $\square$

**Corolario 7.7.5.** — Sea  $G < \mathbb{M}^2$  un grupo Kleiniano no-elemental y  $K \neq \{I\}$  un subgrupo normal de  $G$ . Entonces  $\Lambda(K) = \Lambda(G)$  y en particular  $K$  es un grupo Kleiniano no-elemental.

*Demonstración.* — Como  $K$  es subgrupo de  $G$ , sabemos que  $\Lambda(K) \subset \Lambda(G)$ . Veamos que  $K$  es no-elemental. Si  $K$  es finito (no-trivial), entonces el conjunto (finito)  $L$  de puntos fijos de los elementos elípticos de  $K$  es invariante por la acción de  $G$  (al ser  $K$  subgrupo normal de  $G$ ). Luego la órbita por  $G$  de cada uno de esos puntos está contenida en  $L$ . Esto nos da una contradicción con la Proposición 7.6.2 y el hecho que  $\Lambda(G)$  es infinito. Si  $\Lambda(K)$  tiene cardinalidad 2, y como es invariante bajo la acción de  $G$ , entonces tenemos el mismo tipo de contradicción que antes reemplazando  $L$  por  $\Lambda(K)$ . Si  $\Lambda(K)$  consiste de un sólo punto, digamos  $p$ , entonces la invariancia de  $\Lambda(K)$  por  $G$  asegura que todo elemento de  $G$  fija al punto  $p$ . Como  $K$  contiene un parabólico, la discretitud de  $G$  dice que  $G$  no tiene loxodrómicos, una contradicción con la proposición 7.7.1.

Ahora que tenemos que  $K$  es no-elemental, tenemos que  $\Lambda(K)$  tiene infinitos puntos. La invariancia de  $\Lambda(K)$  por el grupo  $G$  y la Proposición 7.6.2 obtenemos que  $\Lambda(G)$  está contenida e la clausura de  $\Lambda(K)$ . Pero  $\Lambda(K)$  es un cerrado, luego,  $\Lambda(G)$  está contenido en  $\Lambda(K)$ . □

**Corolario 7.7.6.** — Sea  $G < \mathbb{M}^2$  un grupo Kleiniano no-elemental. Si  $K_j$  es subgrupo normal de  $G$  tal que  $K_j \neq \{I\}$ , para  $j = 1, 2$ , entonces  $K_1 \cap K_2 \neq \{I\}$ .

*Demonstración.* — Ya que  $G$  es no-elemental, sabemos por el Corolario 7.7.5 que  $\Lambda(G) = \Lambda(K_j)$ ,  $j = 1, 2$ ; luego tanto  $K_1$  como  $K_2$  son no-elementales. Como consecuencia de la Proposición 7.7.1 sabemos de la existencia de elementos loxodrómicos  $t_j \in K_j$ , para  $j = 1, 2$ . Como  $K_j$  es normal en  $G$ , tenemos que el conmutador  $a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1} \in K_j$ . □

PROBLEMAS. —

- 1.- Verificar que si  $G$  es un grupo Kleiniano, entonces  $\Lambda(G)$  es denso en ninguna parte, es decir, no existe abierto  $V$  de manera que  $\Lambda(G) \cap V$  es denso en  $V$ .
- 2.- Verificar que todo grupo discreto no-elemental contiene como subgrupo a un grupo de Schottky de género  $k$ , para cualquier  $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ .
- 3.- Si  $f, g \in \widehat{\mathbb{M}}^n$  son parabólicas con puntos fijos diferentes, entonces existe un entero  $k > 0$  tal que  $f^k \circ g$  es loxodrómica. (Ind. Podemos asumir que  $f(\infty) = \infty$  y que  $g(0) = 0$ . Verificar que la esfera isométrica de  $f^m \circ g$  coincide con la esfera isométrica de  $g$  y que la esfera isométrica de  $g^{-1} \circ f^{-m}$  coincide con la esfera isométrica de  $g^{-1}$ ).

### 7.8. Subgrupos de índice finito

Ya hemos visto que si  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  y  $H$  es un subgrupo de índice finito en  $G$ , entonces  $G$  es discreto si y sólo si  $H$  lo es. El siguiente resultado nos permite comparar sus puntos límites.

**Proposición 7.8.1.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  un grupo discreto y  $H$  un subgrupo de índice finito de  $G$ , entonces  $\Omega(G) = \Omega(H)$  y  $\Lambda(G) = \Lambda(H)$ . En particular,  $G$  es Kleiniano si y sólo si  $H$  es Kleiniano.

*Demonstración.* — Basta con verificar que tienen el mismo conjunto límite. Como  $H < G$ , es claro que  $\Lambda(H) \subset \Lambda(G)$ . Sea  $p \in \Lambda(G)$ . Como  $G$  es discreto, existe una sucesión  $\{g_m\}$  de elementos diferente en  $G$  y un punto  $z_0 \in \widehat{\mathbb{R}}^n$  tal que  $g_m(z_0)$  converge a  $p$ .

Al ser  $H$  subgrupo de índice finito en  $G$ , tenemos que

$$G = H \cup Hx_1 \cup \cdots \cup Hx_k,$$

donde  $x_1, \dots, x_k \in G$ . Luego debe existir una subsucesión infinita de  $\{g_m\}$  donde todos sus transformaciones viven en el mismo  $Hx_j$ . Podemos suponer ahora que  $g_m \in Hx_1$  para todo  $m$ . En este caso  $g_m = h_mx_1$ . Es claro que  $\{h_m\}$  es una sucesión infinita de transformaciones diferentes. Ahora  $h_m(x_1(z_0)) = g_m(z_0)$  converge a  $p$  diciendo que  $p \in \Lambda(H)$ . □

**Corolario 7.8.2.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  un grupo discreto. Entonces  $G$  es Kleiniano si y sólo si  $G^+$  es Kleiniano.

PROBLEMAS. —

- 1.- Sea  $G < \mathbb{M}^n$  un grupo Kleiniano que actúa sin puntos fijos en  $D$ , una componente de  $\Omega(G)$  que es invariante por  $G$ . Suponga que el grupo de los automorfismos conformales de  $M = D/G$  es finito. verificar que  $G$  tiene índice finito en su normalizador dentro de  $\mathbb{M}^n$ .

### 7.9. Subconjuntos cerrados invariantes

**Proposición 7.9.1.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  un grupo discreto que deja invariante un conjunto finito  $F \neq \emptyset$ . Entonces  $G$  es elemental.

*Demonstración.* — Supongamos que  $G$  es no-elemental. Denotemos por  $Fix(h)$  al conjunto de los puntos fijos de  $h \in G$ . Entonces sabemos que podemos encontrar dos transformaciones loxodrómicas  $f, g \in G$  con  $Fix(f) \cap Fix(g) = \emptyset$ . Como  $F$  debe ser invariante por  $f$ ,  $F$  finito, entonces debe ocurrir  $F \subset Fix(f)$ . De manera similar,  $F \subset Fix(g)$ . Esto nos da una contradicción al hecho que  $Fix(f) \cap Fix(g) = \emptyset$ .

□

**Corolario 7.9.2.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  un grupo discreto no-elemental y  $F \neq \emptyset$  un subconjunto cerrado que es invariante por la acción de  $G$ . Entonces

$$\Lambda(G) \subset F.$$

*Demonstración.* — Como  $G$  no es elemental, la Proposición 7.9.1 asegura que  $F$  es un conjunto infinito. Sea  $p \in \Lambda(G)$ . Sabemos, por Proposición 7.6.1 (ver Corolario 7.6.4), que existe un punto límite  $q$  y una sucesión de elementos diferentes  $g_n \in G$  tal que, si  $x \neq q$ , entonces  $g_n(x)$  converge a  $p$ . Como  $F$  es infinito, podemos tomar  $x \in F$ . Por otro lado,  $F$  es invariante por  $G$  lo cual dice que la órbita de  $x$  permanece en  $F$ . Ahora el hecho que  $F$  es cerrado asegura que los puntos límites de esta órbita también viven en  $F$ , es decir  $p \in F$ . Así, hemos probado que  $\Lambda(G) \subset F$ .

□

**Observación 7.9.3.** — El resultado anterior nos dice que el conjunto cerrado no vacío más pequeño que es invariante por un grupo discreto no-elemental es su conjunto límite.

**Ejemplo 7.9.4.** — Supongamos que tenemos un grupo Kleiniano no-elemental  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  y una colección  $\Delta$  de componentes de  $\Omega(G)$  tal que para todo  $t \in G$  tenemos que  $t(\Delta) \subset \Delta$ . Entonces la clausura  $\overline{\Delta}$  es un cerrado no vacío invariante por  $G$ . La proposición anterior asegura que  $\Lambda(G) \subset \partial\Delta$  (la frontera de  $\Delta$ ). Por otro lado, cada punto en  $\partial\Delta$  no puede vivir en  $\Omega(G)$ , al ser este un abierto, luego  $\partial\Delta \subset \Lambda(G)$ , en particular,

$$\Lambda(G) = \partial\Delta$$

## 7.10. Subgrupos normales

Ya hemos considerado el buen comportamiento de la propiedad *ser discreto y no-elemental* bajo subgrupos de índice finito. Otros subgrupos importantes son los **normales**. En esta sección nos preocuparemos de como se comporta la propiedad *ser discreto y no-elemental* bajo subgrupos normales. Primero veamos algunos ejemplos.

**Ejemplo 7.10.1.** — (**Grupos discretos no-elementales en  $\widehat{\mathbb{M}}^2$  conteniendo subgrupos normales finitos no triviales**). Consideremos un grupo  $K < \mathbb{M}^2$ , discreto no-elemental, que deja invariante la recta real y sea  $\tau(z) = \bar{z}$ , entonces tenemos que  $\tau \circ k = k \circ \tau$ , para todo  $k \in K$ . Luego, si consideramos el grupo

$$G = \langle H, \tau \rangle,$$

entonces, ya que  $H$  tiene índice 2 en  $G$ , tenemos que  $G$  es discreto y no-elemental. Por otro lado, tenemos que el grupo  $H = \langle \tau \rangle$  es un subgrupo normal finito y no trivial de  $G$ .

**Ejemplo 7.10.2.** — (No existen grupos discretos no-elementales en  $\mathbb{M}^2$  conteniendo subgrupos normales finitos no triviales). Sea  $G < \mathbb{M}^2$  un grupo discreto no-elemental y supongamos que existe  $H \triangleleft G$  de manera que  $H \neq \{I\}$  es finito. Entonces el conjunto  $F \subset \widehat{\mathbb{C}}$  formado por los puntos fijos de los elementos no triviales de  $H$  resulta ser un conjunto finito no-vacío e invariante por  $G$ . Luego, por el Corolario 7.9.2 tendremos  $\Lambda(G) \subset F$ , una contradicción al hecho que hemos supuesto  $G$  no-elemental.

**Ejemplo 7.10.3.** — (Existen grupos discretos no-elementales en  $\mathbb{M}^n$ ,  $n \geq 3$ , conteniendo subgrupos normales finitos no triviales). Este ejemplo es una extensión del ejemplo 7.10.1. Sólo es necesario dar un ejemplo en el caso  $n = 3$ . Para esto, consideremos la rotación  $\tau \in SO_3$  de orden 2 en torno al eje  $x$  en  $\mathbb{R}^3$ . En el subespacio  $x > 0$  consideramos una colección de  $r \geq 2$  esferas ortogonales al eje  $x$ , dos a dos disjuntas, digamos  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$ . Denotemos por  $\sigma_0$  la reflexión en el plano  $x = 0$  y por  $\sigma_j$  la reflexión en la esfera  $\Sigma_j$ , para  $j = 1, \dots, r$ . Entonces tenemos que  $\tau \circ \sigma_k = \sigma_k \circ \tau$ , para  $k = 0, 1, \dots, r$ . Consideremos las transformaciones loxodrómicas,  $A_j = \sigma_0 \circ \sigma_j$ , para  $j = 1, \dots, r$ , y

$$G = \langle \tau, A_1, \dots, A_r \rangle.$$

Se tiene que  $G < \mathbb{M}^3$  es un grupo discreto no-elemental que contiene al grupo  $H = \langle \tau \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  de manera normal.

Antes de dar el resultado principal de esta sección (que es una generalización del Corolario 7.7.5 a caso de mayores dimensiones), primero probaremos un hecho que necesitaremos en su demostración.

**Lema 7.10.4.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  un grupo discreto. Entonces no existe sucesión de elementos elípticos de orden 2 diferentes convergiendo a la identidad.

*Demonstración.* — Considerando una extensión de Poincaré permite asumir que  $G$  es Kleiniano y que  $\infty \in \Omega(G)$  es tal que  $G_\infty = \{I\}$ . Supongamos que tenemos una sucesión de elementos diferentes  $g_m \in G$ ,  $g_m^2 = I$  y que  $g_m$  converge a la identidad  $I$ . Como consecuencia de la Proposición 3.5.2, tenemos que  $g_m = \sigma_m \circ R_m$ , donde  $\sigma_m$  es la reflexión en la esfera isométrica  $I_{g_m}$  de  $g_m$  y  $R_m$  es una rotación que fija el punto  $p_m = g_m(\infty)$ . Podemos asumir por compacidad de  $\widehat{\mathbb{R}}^n$  que la sucesión  $p_m$  converge a un punto  $p_\infty$ . Luego,  $p_\infty \in \Lambda(G)$  y, en particular,  $p_\infty \neq \infty$ . Por otro lado, como  $g_m$  converge a la identidad, también tenemos que  $g_m(\infty) = p_m$  converge a  $\infty$ , una contradicción.



□

**Proposición 7.10.5.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  y  $H$  un subgrupo normal de  $G$  que no es finito. entonces

- (i)  $G$  es discreto no-elemental sí y sólo si  $H$  es discreto no-elemental ;
- (ii)  $\Omega(G) = \Omega(H)$  y  $\Lambda(G) = \Lambda(H)$ .

*Demonstración.* — (1) Veamos primero el caso en que  $G$  es un grupo discreto no-elemental (esto ya fue probado en el Corolario 7.7.5 para  $n = 2$ ). Al ser  $H$  subgrupo del grupo discreto  $G$ , entonces tenemos que  $H$  es discreto y que  $\Lambda(H) \subset \Lambda(G)$ . Como  $H$  no es finito,  $\Lambda(H) \neq \emptyset$  como consecuencia de la Proposición 7.3.1. Pero también tenemos del hecho que  $H$  es normal en  $G$  que  $\Lambda(H)$  es un conjunto cerrado invariante por  $G$ . Como consecuencia del Corolario 7.9.2 tenemos que  $\Lambda(G) \subset \Lambda(H)$ , en consecuencia, tenemos la igualdad  $\Lambda(G) = \Lambda(H)$  y que  $H$  es además no-elemental.

(2) Supongamos ahora que  $H$  es grupo discreto no-elemental. Entonces, como consecuencia del Corolario 7.7.4, existen infinitas transformaciones loxodrómicas  $h_j \in H$  tales que  $Fix(h_j) \cap Fix(h_i) = \emptyset$  para  $i \neq j$ . Sea  $Fix(h_j) = \{a_j, b_j\}$ .

Procedemos verificar que  $G$  es discreto. En efecto, en caso contrario, tenemos una sucesión  $g_n \in G$ , de elementos diferentes, convergiendo a la identidad. Entonces  $g_m \circ h_j \circ g_m^{-1} \in H$  converge a  $h_j$ . Como  $H$  es discreto, existe  $M > 0$  tal que si  $m \geq M$ , entonces  $g_m \circ h_j \circ g_m^{-1} = h_j$ . Esto nos dice que  $g_m$  envía los puntos fijos de  $h_j$  en si mismos. Como consecuencia del Lema 7.10.4 podemos asumir que  $g_m$  no son elementos de orden 2. Reemplazando  $g_m$  por  $g_m^2 \neq I$ , si es necesario, podemos asumir que  $g_m$  fija ambos puntos fijos de  $h_j$ . Pero en este caso,  $g_m$  tendría infinitos puntos fijos, siendo estos  $\{a_j, b_j\}_{j=1}^{\infty}$ . Esto sólo puede ocurrir si  $g_m = I$ , una contradicción.

Ahora que tenemos que  $G$  es discreto y no-elemental (ya que  $\Lambda(H) \subset \Lambda(G)$ ), la igualdad  $\Lambda(G) = \Lambda(H)$  es consecuencia de la parte (1).

(3) Ahora debemos analizar el caso en que ambos grupos  $G$  y  $H$  son elementares. El único caso que debemos eliminar es cuando  $\#\Lambda(H) = 1$  y  $\#\Lambda(G) = 2$ . En esta situación, existe un elemento loxodrómico  $g \in G$  y un elemento parabólico  $h \in H$  con un punto fijo en común, lo cual es una contradicción a la discretitud de  $G$ .

□

PROBLEMAS. —

- 1.- Sea  $H$  generado por  $t(z) = -z$  y  $G$  consistiendo de todas las transformaciones de Möbius de la forma  $q(z) = \lambda z$ , donde  $\lambda \in \mathbb{R} - 0$ . Verificar que (i)  $H$  es subgrupo normal de  $G$ , (ii)  $H$  es discreto y finito y (iii)  $G$  no es discreto (Ind. Considere la sucesión  $q_n(z) = (1 - 1/n)z$  y vea que converge a la identidad cuando  $n$  tiende a infinito).

**7.11. Aplicación :  $Aut(M)$  es finito para  $M$  variedad hiperbólica de volumen finito**

Consideremos un grupo  $G < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  que sea no-elemental y no tenga torsión. En estas condiciones tenemos que  $M_G = \mathbb{H}^n/G$  es una variedad hiperbólica  $n$ -dimensional. El cubrimiento universal  $\pi : \mathbb{H}^n \rightarrow M_G$  es localmente una isometría.

Si  $t : M_G \rightarrow M_G$  es un automorfismo conformal (anticonformal), entonces por propiedad de cubrimiento universal podemos levantar  $t$  a un automorfismo conformal (anticonformal)  $\hat{t} : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ , el cual es una restricción de un elemento de  $\widehat{M}^n$  que deja invariante  $\mathbb{H}^n$  (como consecuencia del Teorema de Liouville para  $n \geq 3$  y del análisis complejo para  $n = 2$ ). Si denotamos por  $N_G < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  al subgrupo normalizador de  $G$  en el grupo de isometrías de  $\mathbb{H}^n$ , entonces  $\hat{t} \in N_G$ . Es claro que todo elemento de  $N_G$  se puede obtener de esta manera, luego podemos identificar el grupo  $Aut(M_G)$  de automorfismos conformales/anticonformales de  $M_G$  con  $N_G/G$ .

Como  $G$  es no elemental, tenemos como consecuencia de la Proposición 7.10.5 que  $N_G$  es también un grupo discreto no-elemental de isometrías de  $\mathbb{H}^n$  tal que  $\Lambda(G) = \Lambda(N_G)$ . Así, tenemos que

$$M_G/Aut(M_G) = \mathcal{O}_G = \mathbb{H}^n/N_G.$$

En el caso que  $Vol(M_G) < \infty$  (volumen hiperbólico finito), tenemos que  $Vol(\mathcal{O}_G) < \infty$ ,  $Vol(M_G) = |Aut(M_G)|Vol(\mathcal{O}_G)$  y  $|Aut(M_G)| = [N_G : G]$ . El siguiente resume lo anterior.

**Corolario 7.11.1.** — *El grupo de automorfismos de una variedad hiperbólica de volumen finito es siempre finito.*

**7.12. Teorema de rigidez de Mostow**

En el caso de dimensión dos, tenemos que si hay dos grupos Fuchsianos algebraicamente isomorfos, digamos  $F_1$  y  $F_2$ , actuando en el disco generalizado  $D$ , tales que  $D/F_1$  y  $D/F_2$  son superficies de Riemann de área hiperbólica finita, entonces existe un homeomorfismo de  $D$  que conjuga uno en el otro (ver el Capítulo 9). Pero tal homeomorfismo  $f : D \rightarrow D$  no tiene por que ser una isometría del plano hiperbólico  $(D, d_D)$  (ver Problema 1.-). En el caso de dimensión mayor a dos tenemos una cierta rigidez.

**Teorema 7.12.1 (Teorema de Mostow).** — *Sean  $G_1, G_2$  grupos de isometrías hiperbólicas sin torsión, actuando en la bola generalizada  $B \subset \widehat{\mathbb{R}}^n$ , para  $n \geq 3$ . Supongamos que  $M_j = B/G_j$  tiene volumen finito,  $j = 1, 2$ . Entonces  $G_1$  y*

$G_2$  son algebraicamente isomorfos sí y sólo si existe una isometría del espacio hiperbólico  $(B, d_B)$  que los conjuga.

El Teorema de Mostow nos entrega el siguiente complemento del Corolario 7.11.1 para el caso de dimensión  $n \geq 3$ .

**Corolario 7.12.2.** — *El grupo de automorfismos de una variedad hiperbólica de volumen finito es isomorfo al grupo de automorfismos exteriores de su grupo fundamental.*

*Demonstración.* — Ya hemos observado que el grupo de isometrías de  $M_G = \mathbb{H}^n/G$ , donde  $G$  es grupo discreto de isometrías de  $\mathbb{H}^n$  sin torsión es isomorfo a  $N_G/G$ , donde  $N_G$  denota el normalizador de  $G$  en el grupo  $Aut(\mathbb{H}^n) = Iso(\mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n})$ . La finitud viene dada por el Corolario 7.11.1 del hecho que el volumen de  $M_G$  es finito. Por el teorema de Mostow, todo automorfismo de  $G$  es inducido por una isometría de  $\mathbb{H}^n$  que pertenece al normalizador  $N_G$ . Por otro lado, si una isometría  $t \in N_G$  induce el automorfismo identidad de  $G$ , entonces tenemos que  $t$  debe conmutar con cada transformación en  $G$ . Pero en  $G$ , al ser no-elemental, podemos encontrar dos transformaciones loxodrómicas que no conmutan, luego con puntos fijos diferentes. Como  $t$  conmuta con cada una de ellas, deben tener los mismo puntos fijos. De esta manera  $t$  debe ser la identidad y hemos obtenido un isomorfismo entre  $N_G$  y el grupo de automorfismos de  $G$ . Además,  $N_G/G$  resulta ser isomorfo al grupo de automorfismos exteriores de  $G$ . Como  $Aut(M)$  es isomorfo a  $N_G/G$ , obtenemos lo deseado.  $\square$

PROBLEMAS. —

- 1.- Dar un ejemplo de dos grupos Fuchsianos algebraicamente isomorfos que no son conjugados por una transformación de Möbius.

### 7.13. Lema de Selberg

Usando el semi-espacio superior  $\mathbb{H}^{n+1}$  como modelo del espacio hiperbólico  $(n+1)$ -dimensional, tenemos la identificación natural (por la extensión de Poincaré) entre el grupo de isometrías de  $\mathbb{H}^{n+1}$  y el grupo  $\widehat{M}^n$  de transformaciones (extendidas) de Möbius. En este capítulo no haremos distinción entre un elemento de  $\widehat{M}^n$  y la respectiva extensión de Poincaré como isometría de  $\mathbb{H}^{n+1}$ .

Si tomamos un grupo discreto  $G < \widehat{M}^n$ , entonces tenemos el espacio cociente

$$M = \mathbb{H}^{n+1}/G$$

el cual es una variedad sólo en el caso que  $G$  no tenga torsión. El siguiente resultado asegura que siempre existe una variedad hiperbólica  $N$  que cubre de manera regular a  $M$  con grado finito.

**Teorema 7.13.1 (Lema de Selberg).** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$  un grupo finitamente generado de transformaciones (extendidas) de Möbius. Entonces es posible encontrar un subgrupo sin torsión  $H < G$  que es normal y tiene índice finito.

**Observación 7.13.2.** — Notemos que todo subgrupo de índice finito de un grupo finitamente generado debe ser finitamente generado [51].

**7.13.1. Demostración del Lema de Selberg.** — La idea de la demostración del lema de Selberg es como sigue. El grupo de isometrías de  $\mathbb{H}^{n+1}$  es isomorfo a un subgrupo de  $GL(n+2, \mathbb{R})$ , de hecho un subgrupo de índice dos del subgrupo de matrices  $A \in GL(n+2, \mathbb{R})$  tales que  ${}^t A J A = J$ , donde  $J$  es la matriz cuya diagonal es  $[1, 1, \dots, 1, -1]$  y el resto de elementos son igual a 0. Esto corresponde a tomar como modelo del espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$  la esfera de radio  $-1$  en  $\mathbb{R}^{n+2}$  respecto al producto interior no-degenerado

$$\langle (x_1, \dots, x_{n+2}), (y_1, \dots, y_{n+2}) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_{n+1} y_{n+1} - x_{n+2} y_{n+2},$$

es decir,

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 - x_{n+2}^2 = -1, x_{n+2} > 0\}$$

También observemos que si  $G^+$  es el subgrupo de transformaciones de Möbius en  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$ , entonces basta con encontrar un subgrupo normal de índice finito en  $G^+$  sin torsión. En efecto, ya que  $G = \langle G^+, \tau \rangle$ , donde  $\tau \in G - G^+$ , tenemos que  $\tau^2 \in G$ . Luego, si  $H < G^+$  es de índice finito, normal en  $G^+$  sin torsión, entonces  $K = H \cap \tau H \tau^{-1}$  es de índice finito, normal sin torsión en  $G$ .

En el caso  $n = 2$  podemos identificar  $\mathbb{M}^2$  con  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  usando el homomorfismo sobreyectivo

$$\varphi : \text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{M}^2 : A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \varphi_A$$

donde

$$\varphi_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

cuyo núcleo es  $\{\pm I\}$ . Entonces podemos considerar el subgrupo  $\widehat{G} = \varphi^{-1}(G)$  que es también un subgrupo finitamente generado de  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ . Luego, lo que debemos verificar es que todo subgrupo finitamente generado de  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  contiene un subgrupo normal de índice finito que no tiene torsión.

Trabajaremos con el caso  $n = 2$  por comodidad, pero el argumento que daremos es idéntico para cualquier  $n$ .

**Lema 7.13.3.** — Supongamos que  $A$  es un sub-anillo de  $\mathbb{C}$  que es finitamente generado sobre  $\mathbb{Z}$ , es decir, existen  $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}$  tales que  $A = \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_r]$ . Entonces tenemos que :

- (i) La intersección de todos los ideales maximales de  $A$  es  $\{0\}$ ;
- (ii) Si  $\mathfrak{N}$  es un ideal maximal de  $A$ , entonces  $A/\mathfrak{N}$  es un cuerpo finito.

**Observación 7.13.4.** — Este resultado es consecuencia de Hilbert-Nullstellensatz.

Consideremos un grupo finitamente generado  $G < \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ , digamos

$$G = \langle T_1, \dots, T_m \rangle$$

Escribamos

$$T_j = \begin{bmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{bmatrix}$$

Sea  $A$  el sub-anillo de  $\mathbb{C}$  generado por todos los coeficientes  $a_j, b_j, c_j, d_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

**Lema 7.13.5.** — Para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 2$ , existe un subgrupo normal  $N$  de índice finito en  $G$  tal que para todo  $T \in N$  tenemos que su traza, denotada por  $\mathrm{tr}(T)$ , es diferente de  $z$ .

*Demonstración.* — En el caso que  $z \notin A$ , entonces basta escoger  $N = G$ . Supongamos ahora que  $z \in A$ . Sea  $\mathfrak{N}$  un ideal maximal de  $A$  que no contenga al elemento  $z - 2$ , el cual existe por parte (i) del Lema 7.13.3. Por el mismo lema, tenemos que  $K = A/\mathfrak{N}$  es un cuerpo finito.

Denotemos por

$$\phi : A \rightarrow K$$

el homomorfismo sobreyectivo natural inducido por  $\mathfrak{N}$ . Tenemos inducido el homomorfismo de anillo

$$\psi : \mathrm{M}(2, A) \rightarrow \mathrm{M}(2, K) : \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \phi(a) & \phi(b) \\ \phi(c) & \phi(d) \end{bmatrix},$$

cuyo núcleo es el ideal

$$A_0 = \{T \in \mathrm{M}(2, A) : \psi(T) = 0\}.$$

La restricción

$$\psi : \mathrm{SL}(2, A) \rightarrow \mathrm{SL}(2, K)$$

resulta ser un homomorfismo de grupos multiplicativos cuyo núcleo es el subgrupo

$$U = \{T \in \mathrm{SL}(2, A) : \psi(T) = I\}.$$

Ya que  $K$  es finito, tenemos que  $U$  tiene índice finito en  $\mathrm{SL}(2, A)$  y, en particular, el subgrupo  $N = U \cap G$  tendrá índice finito y será normal en  $G$ . Veamos ahora que esta elección de  $N$  funciona para nuestra suposición. Si  $T \in N$ , entonces la condición  $T \in U$  asegura que  $\psi(T - I) = 0$ , luego  $\mathrm{tr}(\psi(T - I)) = 0$ , es decir,  $\mathrm{tr}(T) - 2 = \mathrm{tr}(T - I) \in \mathfrak{N}$ . Ya que  $z - 2 \notin \mathfrak{N}$ , entonces  $\mathrm{tr}(T) \neq z$ .

□

El lema anterior nos asegura que para cualquier elección finita de valores  $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}$ ,  $z_j \neq 2$ , podemos encontrar un subgrupo normal de índice finito  $N_j$  de  $G$  de manera que ninguna matriz de  $N_j$  tiene traza  $z_j$ ,  $j = 1, \dots, r$ . Entonces  $N = \bigcap_{j=1}^r N_j$  será un subgrupo normal de índice finito en  $G$  de manera que ninguna matriz de  $N$  tiene traza en  $\{z_1, \dots, z_r\}$ . En particular, si logramos verificar el siguiente lema, entonces tendremos la demostración del lema de Selberg.

**Lema 7.13.6.** — *El número de diferentes valores primos  $p$  para los cuales existe una matriz  $T \in G$  de orden  $p$  es finito.*

*Demonstración.* — Denotemos por  $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$  ( $r + s = 4n$ ) los coeficientes de los generadores  $T_1, \dots, T_n \in G$ , ordenados de manera que  $\alpha_j$  son algebraicos sobre el cuerpo de los racionales  $\mathbb{Q}$  y los valores  $\beta_j$  son trascendentales sobre  $\mathbb{Q}$ .

Denotemos por  $\overline{\mathbb{Q}}$  la clausura algebraica de  $\mathbb{Q}$  en el cuerpo de los números complejos  $\mathbb{C}$ .

Consideremos el ideal  $\mathcal{A}$  de los polinomios en  $\overline{\mathbb{Q}}[x_1, \dots, x_s]$  que se anulan en  $(x_1, \dots, x_s) = (\beta_1, \dots, \beta_s)$ . Es claro que el polinomio constante 1 no está en  $\mathcal{A}$ , luego existe un ideal maximal  $\mathcal{M}$  conteniendo al ideal  $\mathcal{A}$ . Por Hilbert Nullstellensatz tenemos

$$\mathcal{M} = \langle x_1 - \gamma_1, x_2 - \gamma_2, \dots, x_s - \gamma_s \rangle$$

donde  $\gamma_j \in \overline{\mathbb{Q}}$ .

Formamos las nuevas matrices  $T'_1, \dots, T'_m$  de las matrices  $T_1, \dots, T_m$  al reemplazar cada coeficiente  $\beta_j$  por  $\gamma_j$ , respectivamente. Sea  $G'$  el grupo generado por estas nuevas matrices de  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ .

El hecho que  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$  permite observar que tenemos bien definida un homomorfismo sobreyectivo de grupos

$$\theta : G \rightarrow G'$$

Además tenemos que si  $T \in G$  tiene orden  $q$ , entonces existe un entero  $a$ , relativamente primo con  $q$ , tal que  $\text{tr}(T) = 2 \cos(2a\pi/q) \in \overline{\mathbb{Q}}$ . Así, tenemos que  $\text{tr}(\theta(T)) = \text{tr}(T)$ , luego  $\theta(T)$  también tiene orden  $q$ .

Esto nos dice que basta con verificar el lema para el grupo de matrices  $G'$ .

Sea  $F = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \gamma_1, \dots, \gamma_s)$  el cuerpo que es una extensión algebraica de  $\mathbb{Q}$  de grado finito  $d$ .

Sea  $T \in G'$  de orden un primo  $p$ . Los valores propios de  $T$  (raíces primitivas de la unidad de orden  $p$ ) son algebraicos de grado  $(p-1)$  sobre  $\mathbb{Q}$  (soluciones del polinomio mónico  $x^{p-1} - 1 = 0$ ). Por otro lado, el polinomio característico de  $T$  es  $x^2 - \text{tr}(T)x + 1$ . Ya que  $\text{tr}(T) \in F$ , tenemos que los valores propios de  $T$  son de grado a lo más dos respecto  $F$ . Esto nos asegura que ellos son de grado a lo más  $2d$  sobre  $\mathbb{Q}$ . Esto nos dice que  $p-1 \leq 2d$ , obteniendo el resultado deseado.  $\square$

**Observación 7.13.7.** — Sea  $G < \widehat{M}^n$  un grupo finitamente generado y sea  $H$  un subgrupo de índice finito y normal que no tiene torsión. Entonces sabemos (por ser de índice finito) que ellos tienen el mismo conjunto límite, luego la misma región de discontinuidad  $\Omega$ . Así, la variedad  $M = \Omega/H$  cubre de manera regular al orbifold  $O = \Omega/G$  con grupo cobertor  $G/H < \text{Aut}(M)$ .

Usando proyecciones estereográficas, también tenemos que si  $G$  es grupo de isometrías hiperbólicas discreto, actuando en la bola generalizada  $B$ , entonces existe un subgrupo  $H$  de  $G$  que es normal, de índice finito y sin torsión. En este caso,  $B/H$  define una variedad hiperbólica que cubre regularmente al orbifold hiperbólico  $B/G$  con grupo cobertor  $G/H < \text{Iso}(B/H)$ .

PROBLEMAS. —

- 1.- Verificar que los argumentos hechos en la demostración del Lema de Selberg efectivamente pueden ser usados si cambiamos  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  con  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ .

#### 7.14. Lema de Margulis

El siguiente resultado es de mucha importancia en el estudio de grupos hiperbólicos. La demostración puede encontrarse en [54]. Sea  $G < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  un grupo discreto (entonces Kleiniano). Para cada  $x \in \mathbb{H}^n$  y cada  $r > 0$ , definamos

$$G_r(x) = \langle \{g \in G : d_{\mathbb{H}^n}(x, g(x)) \leq r\} \rangle.$$

Por discretitud de  $G$ , tenemos que  $G_r(x)$  es finito. En efecto, si  $G_r(x)$  fuese infinito, entonces en la bola compacta centrada en  $x$  y radio  $r$  tendríamos infinitos elementos de la órbita de  $x$  (pues  $G_x$  es finito). Esto nos asegura la existencia de puntos límites en tal bola compacta, luego en  $\mathbb{H}^n$ , una contradicción.

**Teorema 7.14.1 (Lema de Margulis).** — *Existe una constante  $\epsilon(n) > 0$ , llamada la constante de Margulis, y un entero  $N(n)$ , ambas sólo dependientes de la dimensión  $n$ , tal que si  $G < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  es un grupo discreto y  $x \in \mathbb{H}^n$ , entonces se tiene que  $G_{\epsilon}(x)$  contiene un subgrupo normal abeliano de índice a lo más  $N$ .*

En el siguiente capítulo daremos una argumentación para el caso  $n = 3$  como consecuencia de la desigualdad de Jorgensen.





## CAPÍTULO 8

### PROPIEDADES DE GRUPOS DISCRETOS PLANARES

En los capítulos anteriores hemos visto algunas propiedades que satisfacen grupos discretos de transformaciones de Möbius en cualquier dimensión. En este capítulo veremos alguna más para el caso particular de grupos planares.

#### 8.1. Lema de Shimizu-Leutbecher

El siguiente resultado es de mucha importancia para el caso planar.

**Lema 8.1.1 (Lema de Shimizu-Leutbecher).** — Sea  $G < \mathbb{M}^2$  un grupo discreto que contiene a la transformación parabólica  $p(z) = z + 1$ . Si

$$t(z) = \frac{az + b}{cz + d} \in G$$

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$  y  $ad - bc = 1$ , entonces

$$c = 0 \quad \text{ó} \quad |c| \geq 1$$

*Demonstración.* — Supongamos que  $0 < |c| < 1$ . Definamos  $t_1 = t$ ,  $t_{n+1} = t_n^{-1} \circ p \circ t_n$  y sean

$$t_n(z) = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n} \in G$$

$a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{C}$  y  $a_n d_n - b_n c_n = 1$ . Entonces tenemos las igualdades :

$$a_{n+1} = 1 + d_n c_n$$

$$b_{n+1} = d_n^2$$

$$c_{n+1} = -c_n^2 = -c^{2^n}$$

$$d_{n+1} = 1 - d_n c_n$$

De aquí podemos observar que  $c_n \neq c_m$  para  $n \neq m$ , en particular,  $t_n \neq t_m$  para  $n \neq m$ , y también que  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ . De esta manera, si tomamos  $|c| = \epsilon$ , entonces vale que

$$|c_{n+1}| = |c_n|^2 < \epsilon^2$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} |d_{n+1}| &\leq 1 + |d_n|\epsilon \\ |d_{n+2}| &\leq 1 + |d_{n+1}|\epsilon \leq 1 + \epsilon + |d_n|\epsilon^2 \\ &\vdots \\ |d_{n+k}| &\leq 1 + \epsilon + \epsilon^2 + \cdots + \epsilon^k + |d_n|\epsilon^{k+1} \end{aligned}$$

Así, podemos observar que los conjuntos

$$\{|d_r| : r \in \{1, 2, 3, \dots\}\}$$

$$\{|b_r| : r \in \{1, 2, 3, \dots\}\}$$

$$\{|a_r| : r \in \{1, 2, 3, \dots\}\}$$

son conjuntos acotados. Luego podemos extraer una subsucesión  $n_k$  tal que  $a_{n_k}, b_{n_k}, d_{n_k}$  son convergente. Tal subsucesión nos dará la respectiva subsucesión de las transformaciones  $t_n$  que converge a la identidad, una contradicción a la discretitud de  $G$ .

□

**Corolario 8.1.2.** — Sea  $G$  un grupo Fuchsiano actuando en un disco generalizado  $D$  y  $x \in S$  (el círculo generalizado borde de  $D$ ) el punto fijo de una transformación parabólica de  $G$ . Entonces

- (1) el estabilizador  $G_x$  es cíclico parabólico; y
- (2) existe un disco  $D_x \subset D$  tangente en  $x$  tal que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall t \in G_x, & t(D_x) = D_x \\ \forall t \in G - G_x, & t(D_x) \cap D_x = \emptyset. \end{array} \right.$$

*Demonstración.* — La segunda parte es consecuencia del resultado anterior. La primera parte sigue del siguiente hecho. Conjugemos nuestro grupo  $G$  por una transformación de Möbius de manera que  $D = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ ,  $x = \infty$  y que  $p(z) = z + 1 \in G_\infty$  sea elemento parabólico de menor traslación positiva (esto debido a que  $G_\infty$  es discreto). Esto nos asegura que cualquier otra transformación parabólica en  $G_\infty$  debe ser una potencia de  $p$ . La Proposición 7.1.1 nos asegura que  $G_\infty$  no puede contener hiperbólicos. Ahora, todo elemento elíptico que deja invariante  $\Delta$  no puede tener sus puntos fijos en el borde de  $\Delta$ , en particular, en  $G_\infty$  no hay elípticos de  $G$ . En conclusión,  $G_\infty$  está generado por  $p$ .

□

Al disco  $D_x$  del corolario anterior le llamaremos un **horodisco** en  $x$ . Así, este corolario nos dice que si  $S = D/G$  es una superficie de Riemann, donde  $G$  es un grupo Fuchsiano actuando en el disco generalizado  $D$ , que contiene una transformación parabólica, entonces  $S$  tiene una pinchadura cuya vecindad es la proyección de un horodisco.

Una demostración similar al dado para el resultado anterior permite obtener el siguiente.

**Corolario 8.1.3.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^3$  un grupo hiperbólico actuando en una bola generalizada  $B$  de manera que  $G$  contiene una transformación parabólica  $p$ . Sea  $x$  el punto fijo de  $p$ . Entonces existe una bola  $B_x \subset B$  tangente a  $S$  en el punto  $x$  que satisface :

$$\begin{cases} \forall t \in G_x, & t(B_x) = B_x \\ \forall t \in G - G_x, & t(B_x) \cap B_x = \emptyset. \end{cases}$$

PROBLEMAS. —

- 1.- Mostrar ejemplos de grupos discretos  $G < \mathbb{H}^n$ , para  $n \geq 4$ , tales que sus puntos fijos parabólicos no poseen una bola  $B$  que satisface la invariancia mencionada en el Corolario 8.1.3, para  $n = 2, 3$ .

## 8.2. Una serie de Poincaré

**Corolario 8.2.1.** — Sea  $G$  un grupo Kleiniano planar tal que  $\infty \in \Omega(G)$  y  $G_\infty = \{I\}$ . Denotemos por  $G(\infty)$  la órbita de  $\infty$  por la acción del grupo  $G$ . Entonces :

- (1) La serie

$$\sum_{g \in G} (g'(z))^2$$

converge en compactos de  $\Omega(G)$  a una función meromorfa en  $\Omega(G)$  que resulta ser holomorfa en  $\Omega(G) - G(\infty)$  y tiene polos de orden 4 en cada punto de  $G(\infty)$ ;

- (2) Si  $f : \Omega(G) \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa tal que para cada compacto  $K \subset \Omega(G)$  existe  $M_K > 0$  de manera que  $|f(g(z))| \leq M_K$  para todo  $g \in G$  y todo  $z \in K$ , entonces la serie de Poincaré

$$\sum_{g \in G} f(g(z))(g'(z))^2$$

converge uniformemente en compactos de  $\Omega(G)$  a una función meromorfa  $G$ -invariante.

*Demonstración.* — Veamos parte (1). Sea  $K \subset \Omega(G)$  un compacto. Luego, en  $K$  sólo pueden haber un número finito de puntos de  $G(\infty)$ . Denotemos por  $M = \{g_1, \dots, g_n\} \subset G$  aquellos elementos tales que  $g_j^{-1}(\infty) \in K$ . Entonces, podemos escribir

$$\sum_{g \in G} (g'(z))^2 = (g'_1(z))^2 + \dots + (g'_n(z))^2 + \sum_{g \in G-M} (g'(z))^2$$

Cada sumando  $(g'_j(z))^2$  es una función meromorfa en  $\widehat{\mathbb{C}}$ , holomorfa en el complemento de  $g_j^{-1}(\infty)$  y con un polo de orden 4 en  $g_j^{-1}(\infty)$ . Escribiendo

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}),$$

tenemos que

$$\sum_{g \in G-M} |g'(z)|^2 = \sum_{g \in G-M} \frac{1}{|c|^2} |z - g^{-1}(\infty)|^{-4}$$

Como  $K \subset \Omega(G)$  es compacto y tenemos  $g \in G - M$ , existe una constante  $A > 0$  tal que  $|z - g^{-1}(\infty)| > A$ . Luego la convergencia de la serie

$$\sum_{g \in G-M} |g'(z)|^2$$

es consecuencia de 7.2.1. Esto dice que la serie

$$\sum_{g \in G-M} (g'(z))^2$$

converge absolutamente en  $K$  a una función holomorfa en  $K$ .

Parte (2) es consecuencia del test de Weierstrass. □

### 8.3. Componentes de $\Omega(G)$

**Corolario 8.3.1.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^2$  un grupo Kleiniano planar. Entonces  $\Omega(G)$  tiene 1, 2 ó  $\infty$  componentes conexas.

*Demonstración.* — Supongamos que  $\Omega(G)$  consiste de un número finito  $n \geq 3$  de componentes conexas. Entonces el subgrupo  $H$  de  $G$  que estabiliza cada una de ellas resulta ser de índice finito en  $G$ . De esta manera,  $\Omega(H) = \Omega(G)$ . Luego, cambiando  $G$  por  $H$ , podemos asumir que cada componente conexa de  $\Omega(G)$  es invariante por  $G$ . Por la planaridad de la esfera de Riemann, no es difícil ver que podemos escoger un punto  $p \in \Lambda(G)$  y una componente conexa  $\Omega_1 \subset \Omega(G)$  de manera que  $p$  no pertenece a la clausura de  $\Omega_1$ . Por la Proposición 7.6.1 podemos escoger un punto  $q \in \Omega_1$  y una sucesión  $g_n \in G$  de manera que  $g_n(q) \in \Omega_1$  converge a  $p$ , una contradicción a nuestra suposición que  $p$  no está en la clausura de  $\Omega_1$ . □

**Proposición 8.3.2.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^2$  un grupo Kleiniano planar no elemental. Si  $\Omega(G)$  tiene una componente invariante, entonces las otras componentes de  $\Omega(G)$  son simplemente conexas.

*Demonstración.* — Sea  $A \subset \Omega(G)$  una componente invariante. Por el Corolario 7.9.2, tenemos que  $\Lambda(G)$  es el borde de  $A$ . Luego cualquier otra componente de  $\Omega$  es necesariamente simplemente conexa. □

**Proposición 8.3.3.** — Sea  $G < \widehat{\mathbb{M}}^2$  un grupo Kleiniano planar. Entonces  $\Omega(G)$  tiene a lo más 2 componentes invariantes.

*Demonstración.* — Sólo necesitamos analizar el caso en que  $G$  es no elemental. Supongamos que podemos encontrar tres componentes invariantes bajo el grupo  $G$ , digamos  $A, B, C$ . Como consecuencia de la Proposición 8.3.2, tenemos que todas esas componentes son simplemente conexas. Tomemos un elemento loxodrómico  $l \in G$  y sean  $p, q \in \Lambda(G)$  sus puntos fijos. Sabemos que  $p, q$  viven en el borde de cada una de esas tres componentes. Se pueden construir arcos simples  $\gamma_A \subset A$  y  $\gamma_B \subset B$ , de manera que cada una de ellas conecta los puntos  $p$  y  $q$  y además es invariante por la acción de  $l$ . La curva  $\gamma = \gamma_A \cup \gamma_B \cup \{p, q\}$  es una curva simple y cerrada. La componente  $C$ , al ser conexa, debe estar completamente contenida en uno de los dos discos topológicos acotados por la curva  $\gamma$ . Pero en el otro disco topológicos hay puntos límites de  $G$  y deben pertenecer al borde de  $C$ , una contradicción. □

**Observación 8.3.4.** — El resultado anterior es falso para el caso  $n \geq 3$ . En nuestra demostración usamos la propiedad de planaridad de la esfera. Esto no lo tenemos en el caso de la esfera tres dimensional. De hecho, Tetenov [72] ha mostrado ejemplos de grupos Kleinianos espaciales con cualquier número de componentes invariantes.

PROBLEMAS. —

- 1.- Dar ejemplos de grupos discretos planares con 0, 1 y 2 componentes en su región de discontinuidad.

#### 8.4. Una desigualdad importante

El siguiente resultado es un hecho importante en la construcción de grupos Kleinianos por medio de ciertos teoremas de combinación que veremos más adelante. Primero veremos la versión planar y luego la versión espacial.

**Corolario 8.4.1.** — Supongamos que tenemos un grupo Kleiniano planar  $G$ , de manera que  $\infty \in \Omega(G)$  y  $G_\infty = \{I\}$ . Si  $\Gamma \subset \Omega(G)$  es una curva simple de

Jordan, tal que  $\Gamma \cap G(\infty) = \emptyset$ . Entonces tenemos que

$$\sum_{t \in G} \text{diam}^4(t(\Gamma)) < \infty,$$

donde  $\text{diam}$  denota el diámetro Euclidiano.

*Demonstración.* — Por cada  $t \in G - \{I\}$ , denotemos por  $D_t$  al disco cerrado acotado por el círculo isométrico que contiene a  $t^{-1}(\infty)$ . Ya que  $\Gamma \subset \Omega(G)$  y los radios de los círculos isométricos convergen a cero por 7.2.1, tenemos que  $\Gamma$  sólo puede interceptar a un número finito de discos cerrados  $D_t$ . Ya que la serie que estamos analizando no cambia su estilo de convergencia si eliminamos un número finito de sumandos, podemos asumir que para todo  $t \in G - \{I\}$  vale que  $D_t \cap \Gamma = \emptyset$ . Ahora, por cada  $t \in G - \{I\}$ , tenemos que  $t(\Gamma) \subset D_{t^{-1}}$ . Y otra vez usando 7.2.1 que nos dice que la suma de los diámetros a la cuarta de los discos  $D_t$  converge nos da el resultado deseado. □

La demostración anterior es fácilmente aplicable a la versión espacial usando 7.2.1.

**Corolario 8.4.2.** — Supongamos que tenemos un grupo Kleiniano  $G < \widehat{\mathbb{M}}^n$ , de manera que  $\infty \in \Omega(G)$  y  $G_\infty = \{I\}$ . Si  $\Gamma \subset \Omega(G)$  es una esfera de Jordan, tal que  $\Gamma \cap G(\infty) = \emptyset$ . Entonces tenemos que

$$\sum_{t \in G} \text{diam}^{2n}(t(\Gamma)) < \infty,$$

donde  $\text{diam}$  denota el diámetro Euclidiano.

## 8.5. Desigualdad de Jørgensen

Uno de los problemas más difíciles es poder determinar si el grupo generado por un par de transformaciones de Möbius es discreto. Es claro que si tenemos un grupo discreto, entonces todo subgrupo debe ser discreto. Como los grupos discretos cíclicos son conocidos, el problema es para el caso de grupos con dos generadores. Una condición necesaria para la discretitud de grupos doblemente generados es dado por el siguiente.

**Proposición 8.5.1 (Desigualdad de Jørgensen [40]).** — Sean  $f, g$  transformaciones de Möbius, ambas diferente de la identidad,  $f$  loxodrómica, sin puntos fijos en común, tal que  $g$  no deja invariante el conjunto de puntos fijos de  $f$ , entonces, si  $\langle f, g \rangle$  es discreto, se debe cumplir que

$$|\text{tr}^2(f) - 4| + |\text{tr}[f, g] - 2| \geq 1$$

donde  $\text{tr}(Q)$  denota la traza de una matriz en  $SL(2, \mathbb{C})$  que representa la transformación de Möbius  $Q$  y  $[f, g] = f^{-1}g^{-1}fg$ .

*Demonstración.* — Ya que la traza de una matriz es invariante por conjugación, tenemos que si conjugamos  $f$  y  $g$  por una misma transformación de Möbius el número

$$|\text{tr}^2(f) - 4| + |\text{tr}[f, g] - 2|$$

se mantiene invariante. Luego podemos asumir que los puntos fijos de la transformación loxodrómica  $f$  son  $0$  y  $\infty$ . Así, tenemos representaciones matriciales de la forma :

$$f = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

donde  $|\lambda| > 1$ ,  $ad - bc = 1$  y  $bc \neq 0$ . Además, la condición que  $g$  no deje invariante los puntos fijos de  $f$  es que  $a = 0$  y  $d = 0$  no ocurran simultáneamente. En este caso, tenemos que

$$|\text{tr}^2(f) - 4| + |\text{tr}[f, g] - 2| = \mu = (1 + |bc|)|\lambda - \lambda^{-1}|.$$

Supongamos por el contrario que  $\mu < 1$ . Definamos  $g_0 = g$  y por cada entero positivo  $n$  consideremos la transformación de Möbius

$$g_{n+1} = g_n \circ f \circ g_n^{-1} = \begin{bmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$$

De esta manera obtenemos las relaciones :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n d_n \lambda - b_n c_n \lambda^{-1} \\ b_{n+1} &= a_n b_n (\lambda^{-1} - \lambda) \\ c_{n+1} &= c_n d_n (\lambda^{-1} - \lambda) \\ d_{n+1} &= a_n d_n \lambda^{-1} - b_n c_n \lambda \end{aligned}$$

De la igualdad  $b_{n+1} = a_n b_n (\lambda^{-1} - \lambda)$  obtenemos de manera inductiva

$$|b_n c_n| \leq \mu^n |bc| \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

y luego

$$a_n d_n = b_n c_n + 1 \rightarrow 1 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

De esta manera, cuando  $n \rightarrow \infty$  tenemos :

$$a_{n+1} = a_n d_n \lambda - b_n c_n \lambda^{-1} \rightarrow \lambda$$

$$d_{n+1} = a_n d_n \lambda^{-1} - b_n c_n \lambda \rightarrow \lambda^{-1}$$

$$\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = |a_n| |(\lambda^{-1} - \lambda)| \rightarrow |\lambda| |(\lambda^{-1} - \lambda)| \leq |\lambda| \sqrt{\mu}$$

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = |d_n| |(\lambda^{-1} - \lambda)| \rightarrow |\lambda^{-1}| |(\lambda^{-1} - \lambda)| \leq |\lambda|^{-1} \sqrt{\mu}$$

En particular, para  $n$  suficientemente grande debemos tener que

$$\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| \leq |\lambda| \sqrt{\mu}$$

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \leq |\lambda|^{-1} \sqrt{\mu}$$

Así, tenemos que para tales valores de  $n$  vale que :

$$\left| \frac{b_{n+1}}{\lambda^{n+1}} \right| \leq \sqrt{\mu} \left| \frac{b_n}{\lambda^n} \right|$$

$$|c_{n+1} \lambda^{n+1}| \leq \sqrt{\mu} |c_n \lambda^n|$$

Es decir tenemos sucesiones decrecientes y positivas, luego convergentes, y ya que  $\sqrt{\mu} < 1$ , tales límites deben ser 0.

Ahora, la sucesión de transformaciones de Möbius definidas por

$$f^{-n} \circ g_{2n} \circ f^n = \begin{bmatrix} a_{2n} & b_{2n} \lambda^{-2n} \\ c_{2n} \lambda^{2n} & d_{2n} \end{bmatrix} \in \langle f, g \rangle$$

converge a la transformación  $f$ . Por la discretitud del grupo  $\langle f, g \rangle$ , debemos tener que existe  $N > 0$  tal que para  $n \geq N$  vale  $f^{-n} \circ g_{2n} \circ f^n = f$ , es decir,  $g_{2n} = f$ . En particular  $g_{2N}(0) = 0$  y  $g_{2N}(\infty) = \infty$ .

Ahora, si los puntos fijos de  $g_m$  son  $\{x_n, y_n\}$ , entonces por la recurrencia  $g_{n+1} = g_n \circ f \circ g_n^{-1}$ , vemos que  $\{x_{n+1}, y_{n+1}\} = \{g_n(0), g_n(\infty)\}$ . Es decir,

$$\{0, \infty\} = \{g_{2N-1}(0), g_{2N-1}(\infty)\}$$

y de manera recurrente

$$\{0, \infty\} = \{g(0), g(\infty)\}$$

obteniendo una contradicción al hecho que  $g$  no permuta los puntos fijos de  $f$ .  $\square$

La contraposición del resultado anterior, conociendo los grupos elementales planares, es el siguiente.

**Corolario 8.5.2.** — Si  $\langle f, g \rangle$  es un grupo discreto para  $f, g \in \mathbb{M}$ , entonces si vale la desigualdad

$$|\text{tr}^2(f) - 4| + |\text{tr}[f, g] - 2| < 1$$

debe ocurrir que los puntos fijos de  $f$  son invariantes por  $g$ .

**Proposición 8.5.3.** — Consideremos una sucesión  $G^n = \langle f_n, g_n \rangle$  de grupos discretos no elementales y supongamos que  $f_n$  y  $g_n$  convergen a las transformaciones de Möbius  $f$  y  $g$ , respectivamente. Entonces :

(i)  $f$  no es la identidad ;

(ii) si la sucesión  $\{f_n\}$  no contiene elementos elípticos, entonces  $f$  no es elíptico.



*Demonstración.* — Parte (i) : Si tenemos  $f = I$ , entonces

$$|\mathrm{tr}^2(f_n) - 4| + |\mathrm{tr}[f_n, g_n] - 2| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Pero esto nos dice que para  $n$  muy grande tenemos una contradicción con la desigualdad de Jørgensen para  $G^n$ .

Parte(ii) : Si  $f$  es elíptico de orden finito  $k$ , entonces podemos proceder como en el caso anterior usando  $f_n^k$  y  $g_n$  para obtener una contradicción.

Si  $f$  es un elíptico de orden infinito, entonces podemos considerar una potencia  $f^k$  muy cercana a la identidad de manera que

$$|\mathrm{tr}^2(f^k) - 4| + |\mathrm{tr}[f^k, g] - 2| < 1/2.$$

Ahora procedemos como antes con  $f_n^k$  y  $g_n$  para obtener una contradicción.  $\square$

PROBLEMAS. —

1.- Verificar la forma general de la desigualdad de Jørgensen : Si  $\langle f, g \rangle$  es un grupo discreto no-elemental para  $f, g \in \mathbb{M}$ , entonces vale la desigualdad

$$|\mathrm{tr}^2(f) - 4| + |\mathrm{tr}[f, g] - 2| \geq 1$$

### 8.6. Lema de Margulis : Caso n=3

En esta sección daremos una argumentación del lema de Margulis para el caso particular  $n = 3$ .

**Teorema 8.6.1 (Lema de Margulis :n=3).** — *Existe una constante  $\epsilon(3) > 0$ , llamada la constante de Margulis, tal que si  $G < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$  es un grupo discreto y  $x \in \mathbb{H}^3$ , entonces se tiene que  $G_\epsilon(x)$  es un grupo elemental.*

*Demonstración.* — Como  $G_\epsilon(x)$  es un grupo discreto finitamente generado, para cada  $\epsilon > 0$ , el lema de Selberg nos asegura que existe un subgrupo normal de índice finito que no tiene torsión. Luego, basta que tratemos el caso en que  $G$  no tenga torsión.

Consideremos el modelo del espacio hiperbólico 3-dimensional dado por

$$H = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : t > 0\}$$

y

$$ds = \frac{\sqrt{|dz|^2 + dt^2}}{t}.$$

Supongamos que tal constante  $\epsilon(3)$  no existiese. Módulo conjugación, podemos asumir que  $x = (0, 1) \in H$ . En tal caso es posible construir una sucesión de grupos discretos  $G^n < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$  y elementos diferentes  $f_n, g_n \in G^n_{1/n}(x)$

tales que  $\langle f_n, g_n \rangle$  es no-elemental. Por la igualdad encontrada en la sección 4.4, tenemos que

$$\|f_n\|^2 = 2 \cosh d(x, f_n(x)) < 2 \cosh \left( \frac{2}{n} \right),$$

$$\|g_n\|^2 = 2 \cosh d(x, g_n(x)) < 2 \cosh \left( \frac{2}{n} \right).$$

Luego podemos extraer una subsucesión para asumir que  $f_n$  y  $g_n$  ambas convergen, digamos a  $f, g \in \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ , respectivamente. Pero en este caso, tenemos que  $f$  y  $g$  fijan el punto  $x$ , es decir, son elementos elípticos o la identidad, contradiciendo la Proposición 8.5.3. □

### 8.7. Convergencia algebraica

Una aplicación de la desigualdad de Jørgensen está relacionada con sucesiones convergentes de grupos discretos.

**Definición 8.7.1.** — Sean  $G$  un grupo Kleiniano e isomorfismos  $\Theta_n : G \rightarrow G_n$ , donde  $G_n$  son también grupos Kleinianos, donde tenemos la propiedad de que para cada  $\gamma \in G$  vale que  $\Theta_n(\gamma)$  converge a una transformación (extendida) de Möbius  $\gamma_\infty$ . Entonces el grupo  $G_\infty$  generado por todos esos límites es llamado el **límite algebraico** de tal sucesión de isomorfismos.

**Proposición 8.7.2 (Convergencia Algebraica).** — Sea  $G < \mathbb{M}^2$  un grupo discreto no-elemental y sean  $\Theta_n : G \rightarrow G_n$  isomorfismos sobre grupos discretos no-elementales  $G_n < \mathbb{M}^2$ . Supongamos que para cada  $\gamma \in G$  vale que  $\Theta_n(\gamma)$  converge a una transformación de Möbius  $\gamma_\infty$ . Entonces, el grupo  $G_\infty = \langle \gamma_\infty : \gamma \in G \rangle$  resulta ser un grupo discreto no-elemental y además la función

$$\Theta : G \rightarrow G_\infty : \gamma \mapsto \gamma_\infty$$

es un isomorfismo.

*Demonstración.* — No es difícil ver que  $\Theta : G \rightarrow G_\infty : \gamma \mapsto \gamma_\infty$  resulta ser un homomorfismo de grupos. Sea  $H$  el núcleo de este homomorfismo. Supongamos que  $H \neq \{I\}$ . Entonces, por la Proposición 7.10.5 (al ser  $H$  un subgrupo normal de un subgrupo no-elemental) debemos tener que  $\Lambda(H) = \Lambda(G)$ , es decir,  $H$  también es un grupo discreto no-elemental. Entonces, podemos encontrar dos transformaciones loxodrómicas  $f, g \in H$  que no conmutan. Pero  $f_n = \Theta_n(f), g_n = \Theta_n(g) \in G_n$  convergen hacia la identidad en  $G_\infty$  y ellas no conmutan. En particular, existe  $N > 0$  suficientemente grande de manera que

$$|\text{tr}^2(f_N) - 4| + |\text{tr}[f_N, g_N] - 2| < 1$$

contradiendo la desigualdad de Jørgensen. En particular, debemos tener  $H = \{I\}$  y luego el homomorfismo  $\Theta : G \rightarrow G_\infty$  debe ser un isomorfismo. Esto también nos asegura que  $G_\infty$  debe ser no-elemental.

Ahora veamos que  $G_\infty$  es discreto. Supongamos que tenemos una sucesión de elementos diferentes  $\beta_m \in G_\infty$  que converge a la identidad. Por cada valor  $m$  tenemos una transformación  $\gamma_m \in G$  tal que  $\Theta_n(\gamma_m) \in G_n$  converge a  $\beta_m$ . Tomemos otra vez dos transformaciones loxodrómicas  $f, g \in G$  que no conmuten. Tenemos que  $\Theta_n(\gamma_n \circ f \circ \gamma_n^{-1}), \Theta_n(f) \in G_n$  convergen a la misma transformación. Por discreitud de  $G_n$  y Corolario 8.5.2 debemos tener que para  $n$  suficientemente grande  $\Theta_n(\gamma_n \circ f \circ \gamma_n^{-1})$  y  $\Theta_n(f) \in G_n$  deben conmutar; luego deben tener los mismos puntos fijos. Usando el mismo argumento al reemplazar  $f$  por  $g$ , obtenemos que para  $n$  muy grande  $\Theta_n(f)$  y  $\Theta_n(g)$  deben conmutar, una contradicción al hecho que  $\Theta_n : G \rightarrow G_n$  es un isomorfismo y a la elección de  $f$  y  $g$  en  $G$ .

□

PROBLEMAS. —

1.- Considere una colección de  $2k$  círculos, digamos  $C_1, C'_1, \dots, C_k$  y  $C'_k$ , de manera que es posible escoger un disco abierto  $B_j$  acotado por  $C_j$  y un disco abierto  $B'_j$  acotado por  $C'_j$ , para todo  $j = 1, \dots, k$ , tales que ellos son dos a dos disjuntos. Sean  $t_j$  transformaciones de Möbius tales que

- (i)  $t_j(C_j) = C'_j$ , para cada  $j = 1, \dots, k$ ;
- (ii)  $t_j(B_j) \cap B'_j = \emptyset$ , para cada  $j = 1, \dots, k$ ;
- (iii) si  $G$  denota el grupo generado por  $t_1, \dots, t_k$ , entonces los puntos de intersección de dos círculos es dado por el punto fijo de una transformación parabólica en  $G$ ;
- (iv) cada tangencia de los círculos es enviada por  $t_j$  y  $t_j^{-1}$  en un punto de tangencia.

Verificar que  $G$  es un límite algebraico de grupos de Schottky de género  $k$  y concluir que el grupo  $G$  es discreto. Determine un dominio fundamental para  $G$  y vea que es el cociente de su región de discontinuidad por  $G$ .

### 8.8. Teoremas de combinación

Una de las maneras más importantes para construir grupos Kleinianos a partir de otros es por medio de los **teoremas de combinación** de Klein-Maskit. La idea principal es que si tenemos una colección de grupos Kleinianos, digamos,  $G_1, \dots, G_n$ , entonces podemos formar el nuevo grupo  $G = \langle G_1, \dots, G_n \rangle$  generado por ellos. Los teoremas de combinación dan condiciones para asegurar, entre otras cosas, que  $G$  sea Kleiniano. Este tipo de problemas fueron atacados por F. Klein [43], en un caso particular, y luego por B. Maskit [56] para casos más generales. Antes de enunciar estos teoremas, necesitamos de alguna notación.

**Definición 8.8.1.** —

(1) Dado un grupo  $G < \mathbb{M}^2$  y un subgrupo  $H < G$ , diremos que un subconjunto  $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$  es **conjunto precisamente invariante** por  $H$  en  $G$  si valen las siguientes condiciones :

- (a)  $\gamma(D) \cap D = \emptyset$ , para todo  $\gamma \in G - H$ ; y
- (b)  $\gamma(D) = D$ , para todo  $\gamma \in H$ .

(2) Dado un grupo  $G < \mathbb{M}^2$  y un conjunto  $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ , denotaremos por

$$G(D) = \bigcup_{g \in G} g(D) = \{g(x) : x \in D, g \in G\}$$

(3) Un grupo  $G < \mathbb{M}^2$  Kleiniano para el cual : (i)  $\Lambda(G)$  es una curva de cerrada de Jordan  $\Gamma$  y (ii) deja invariante cada uno de los discos topológicos acotados por  $\Gamma$ , es llamado un **grupo quasifuchsiano de la primera clase**.

### 8.8.1. Primer teorema de combinación. —

**Teorema 8.8.2 (Primer teorema de Combinación).** — Sean  $G_1, G_2 < \mathbb{M}^2$  grupos Kleinianos planares y sea  $H = G_1 \cap G_2$ . Supongamos que :

- (i) existe una curva cerrada de Jordan  $\Gamma$ , que acota los discos topológicos  $D_1$  y  $D_2$ , de manera que  $D_j$  es precisamente invariante por  $H$  en  $G_j$ ,  $j = 1, 2$ ;
- (ii)  $H$  es trivial ó cíclico ó un subgrupo quasifuchsiano de la primera clase ;
- (iii) para cada  $j = 1, 2$ , existe un dominio fundamental  $\mathcal{F}_j$  de  $G_j$  tal que  $\tilde{\mathcal{F}}_j = \mathcal{F}_j \cap G_j(D_j) \subset D_j$  (en otras palabras, el dominio fundamental es disjunto de las trasladadas de  $D_j$  por los elementos de  $G_j - H$ );
- (iv) para cada  $j = 1, 2$ , tenemos que  $\tilde{\mathcal{F}}_j \cap \mathcal{F}_j$  tiene interior no vacío.

Entonces tenemos que :

- (1) el grupo  $G = \langle G_1, G_2 \rangle$  es un grupo Kleiniano planar ;
- (2)  $G = G_1 *_H G_2$ , es decir,  $G$  es el producto libre de  $G_1$  y  $G_2$  amalgamado en  $H$  ;
- (3)  $\Omega(G)/G$  es la unión de  $(\Omega(G_1) - G_1(D_1 \cup D_2))/G_1$  y  $(\Omega(G_2) - G_2(D_2))/G_2$  donde  $(\Gamma \cap \Omega(H))/H \subset (\Omega(G_1) - G_1(D_1))/G_1$  se identifica con  $(\Gamma \cap \Omega(H))/H \subset (\Omega(G_2) - G_2(D_2))/G_2$ .

### Ejemplo 8.8.3 (Grupo de Schottky clásico de género 2)

Consideremos cuatro círculos, digamos  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma'_1$  y  $\Sigma'_2$ , dos a dos disjuntos y acotando un dominio común  $\mathcal{D}$  de conectividad 4. Podemos escoger  $a_1, a_2 \in \mathbb{M}^2$ , ambas transformaciones loxodrómicas tales que :

- (1)  $a_j(\Sigma_j) = \Sigma'_j$ , para  $j = 1, 2$  ;
- (2)  $a_j(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D} = \emptyset$ , para  $j = 1, 2$ .

Podemos considerar una curva cerrada de Jordan  $\Sigma \subset \mathcal{D}$  que separa los círculos  $\Sigma_1$  y  $\Sigma'_1$  de los círculos  $\Sigma_2$  y  $\Sigma'_2$ . Se puede verificar que si tomamos los grupos cíclicos  $G_1 = \langle a_1 \rangle$  y  $G_2 = \langle a_2 \rangle$  y  $H = \{I\}$ , entonces podemos usar el primer teorema de combinación para asegurar que  $G = \langle a_1, a_2 \rangle$  es un grupo Kleiniano

planar isomorfo a un grupo libre de rango dos que uniformiza una superficie de Riemann de género 2. El grupo  $G$  es un **grupo de Schottky clásico de género 2**. En el caso que sólo pedimos que  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma'_1$  y  $\Sigma'_2$  sean curvas cerradas de Jordan, obtenemos un **grupo de Schottky de género 2**.

### 8.8.2. Segundo teorema de combinación. —

**Teorema 8.8.4 (Segundo teorema de Combinación).** — Sea  $G_0 < \mathbb{M}^2$  un grupo Kleiniano planar y sean  $H_1, H_2 < G_0$  subgrupos. Supongamos que :

- (i) existen dos curvas cerradas disjuntas de Jordan  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , y sean  $D_1$  y  $D_2$  discos topológicos tales que  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$  y  $\partial(D_j) = \Gamma_j$ , para  $j = 1, 2$ ;
- (ii)  $D_j$  es precisamente invariante por  $H_j$  en  $G_0$ ,  $j = 1, 2$ ;
- (iii)  $\gamma(D_1) \cap D_2 = \emptyset$  para todo  $\gamma \in G_0$ ;
- (iv)  $H_j$  es trivial ó cíclico ó un subgrupo quasifuchsiano de la primera clase;
- (v) existe una transformación de Möbius  $h \notin G_0$  de manera que  $h(\Gamma_1) = \Gamma_2$ ,  $h(D_1) \cap D_2 = \emptyset$  y  $hH_1h^{-1} = H_2$ ;
- (vi) existe un dominio fundamental  $\mathcal{F}$  de  $G_0$  tal que  $\tilde{\mathcal{F}}_j = \mathcal{F} \cap D_j \subset D_j$  es un dominio fundamental de  $H_j$  en  $D_j$ , para  $j = 1, 2$ ;
- (vii)  $\tilde{\mathcal{F}} \cap (D_1 \cup D_2)^c$  tiene interior no vacío.

Entonces tenemos que :

- (1) el grupo  $G = \langle G_0, h \rangle$  es un grupo Kleiniano planar;
- (2)  $G = G_0 *_{h,}$  es decir,  $G$  es la HNN extensión de  $G_0$  por  $h$ ;
- (3)  $\Omega(G)/G$  es obtenido de  $(\Omega(G_0) - G_0(D_1 \cup D_2))/G_0$  al identificar las proyecciones de  $\Gamma_1 \cap \Omega(H_1)$  y  $\Gamma_2 \cap \Omega(H_2)$ .

**Ejemplo 8.8.5 (Produciendo una nueva asa).** — Consideremos un grupo Kleiniano planar  $G_0 < \mathbb{M}^2$  y dos puntos diferentes  $p, q \in \Omega(G_0)$  tales que :

- (a) sus órbitas son disjuntas, es decir,  $G_0(p) \cap G_0(q) = \emptyset$ , y
  - (b) sus estabilizadores son triviales, es decir,  $(G_0)_p = \{I\} = (G_0)_q$ .
- Podemos encontrar discos Euclidianos  $D_1, D_2 \subset \Omega(G_0)$  tales que :
- (c)  $p \in D_1, q \in D_2$ ;
  - (d)  $G_0(\overline{D_1}) \cap \overline{D_2} = \emptyset$ ;
  - (e)  $D_1$  y  $D_2$  son precisamente invariantes por  $\{I\}$  en  $G_0$ .

En este caso, en la superficie (orbifold) de Riemann  $S_0 = \Omega(G_0)/G_0$  tenemos que estos dos discos se proyectan en dos discos cuyas clausuras son disjuntas  $D'_1$  y  $D'_2$ . Denotemos por  $\Gamma_j$  al círculo borde de  $D_j$ , para  $j = 1, 2$ . Consideremos una transformación loxodrómica  $h \in \mathbb{M}^2$  tal que  $h(\Gamma_1) = \Gamma_2$  y  $h(D_1) \cap D_2 = \emptyset$ . Entonces, usando  $H_1 = H_2 = \{I\}$ , podemos usar el segundo teorema de combinación para tener que  $G = \langle G_0, h \rangle$  es un grupo Kleiniano planar tal que  $\Omega(G)/G$  es topológicamente lo que se obtiene al cortar de  $S_0$  los discos  $D'_1$  y

$D'_2$  y luego identificar ambas curvas de Jordan bordes, es decir, agregar a  $S_0$  una nueva asa.

**Ejemplo 8.8.6 (Produciendo dos pinchaduras).** — Consideremos un grupo Kleiniano planar  $G_0 < \mathbb{M}^2$  y dos discos tangentes  $D_1, D_2 \subset \Omega(G_0)$  en el punto  $p \in \Omega(G_0)$  tales que :

- (a)  $G_0(D_1) \cap D_2 = \emptyset$ ;
- (b)  $D_1$  y  $D_2$  son precisamente invariantes por  $\{I\}$  en  $G_0$ .

En este caso, en la superficie (orbifold) de Riemann  $S_0 = \Omega(G_0)/G_0$  tenemos que estos dos discos se proyectan en dos discos  $D'_1$  y  $D'_2$  tangentes en la proyección del punto  $p$ . Denotemos por  $\Gamma_j$  al círculo borde de  $D_j$ , para  $j = 1, 2$ . Consideremos una transformación parabólica  $h \in \mathbb{M}^2$  que fija al punto  $p$  y tal que  $h(\Gamma_1) = \Gamma_2$  y  $h(D_1) \cap D_2 = \emptyset$ . Entonces, usando  $H_1 = H_2 = \{I\}$ , podemos usar el segundo teorema de combinación para tener que  $G = \langle G_0, h \rangle$  es un grupo Kleiniano planar tal que  $\Omega(G)/G$  es topológicamente lo que se obtiene al eliminar de  $S_0$  dos puntos diferentes.

PROBLEMAS. —

- 1.- Utilice los teoremas de combinación para ver que los grupos de Schottky son Kleinianos y determine un dominio fundamental.
- 2.- Considere una colección de  $2k$  círculos, digamos  $C_1, C'_1, \dots, C_k$  y  $C'_k$ , de manera que es posible escoger un disco abierto  $B_j$  acotado por  $C_j$  y un disco abierto  $B'_j$  acotado por  $C'_j$ , para todo  $j = 1, \dots, k$ , tales que ellos son dos a dos disjuntos. Sean  $t_j$  transformaciones de Möbius tales que
  - (i)  $t_j(C_j) = C'_j$ , para cada  $j = 1, \dots, k$ ;
  - (ii)  $t_j(B_j) \cap B'_j = \emptyset$ , para cada  $j = 1, \dots, k$ ;
  - (iii) si  $G$  denota el grupo generado por  $t_1, \dots, t_k$ , entonces los puntos de intersección de dos círculos es dado por el punto fijo de una transformación parabólica en  $G$ ;
  - (iv) cada tangencia de los círculos es enviada por  $t_j$  y  $t_j^{-1}$  en un punto de tangencia.
 Utilice los teoremas de combinación para ver que  $G$  es un grupo Kleiniano y determine un dominio fundamental para él.
- 3.- Sea  $\Gamma$  un grupo Kleiniano que deja invariante  $\mathbb{H}^2$  (es decir, un grupo de isometrías del plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$ ). Supongamos que  $t(z) = \lambda^2 z$  pertenece a  $\Gamma$  (luego, podemos asumir  $\lambda > 0$ ) y que  $(-\infty, 0)$  no contiene puntos límites de  $\Gamma$ . Verificar que el grupo  $\widehat{\Gamma} = \langle \Gamma, r(z) = -\lambda z \rangle$  es un grupo Kleiniano. Si  $D$  es un dominio fundamental para  $\Gamma$ , describa uno para  $\widehat{\Gamma}$ .

## 8.9. Teorema de la finitud de Ahlfors

**Definición 8.9.1.** — Un grupo que tiene un número finito de generadores, es llamado un **grupo finitamente generado**; en caso contrario diremos que es un **grupo infinitamente generado**.

Si  $G$  es un grupo Kleiniano finitamente generado que contiene transformaciones extendidas de Möbius, entonces su subgrupo de índice dos formado por sus transformaciones de Möbius también resulta ser finitamente generado. Luego sólo nos preocuparemos de grupos finitamente generados que sólo contienen transformaciones de Möbius.

Dado un grupo Kleiniano  $G$  (planar ó espacial) tenemos su región de discontinuidad  $\Omega(G)$ , el cual consiste de componentes conexas.

En el caso planar sabemos que la región de discontinuidad consiste de 1 ó 2 ó infinitas componentes conexas. Luego, el cociente  $\Omega(G)/G$  consistirá de varias superficies (orbifolds) de Riemann.

**Teorema 8.9.2 (Teorema de la Finitud de Ahlfors [4]).** — Si  $G < \mathbb{M}^2$  un grupo Kleiniano planar finitamente generado, entonces  $\Omega(G)/G$  consiste de un número finito de superficies (orbifolds) de Riemann y cada componente es el complemento de a lo más un número finito de puntos de alguna superficie cerrada.

PROBLEMAS. —

- 1.- Sea  $G$  un grupo Kleiniano y  $\Delta \subset \Omega(G)$  una componente invariante por  $G$ . Si el cociente  $\Delta/G$  es topológicamente finito, verificar que  $G$  es finitamente generado.
- 2.- Mostrar un ejemplo de un grupo Kleiniano  $G$  que sea infinitamente generado con  $\Omega/G$  compacto.





## CAPÍTULO 9

### GRUPOS FUCHSIANOS : SUPERFICIES DE RIEMANN

En este capítulo nos restringiremos a un cierto tipo de grupos Kleinianos planares, aquellos que dejan invariante un disco generalizado. Una buena referencia para este capítulo es el clásico libro de A.F. Beardon [11].

#### 9.1. Grupos Fuchsianos

**Definición 9.1.1.** — Un **grupo Fuchsiano** es un subgrupo discreto  $G < \mathbb{M}^2$  que deja invariante algún disco generalizado, es decir, uno de los discos (luego ambos) acotados por un círculo generalizado. Por lo visto en el capítulo anterior, todo grupo Fuchsiano es un grupo Kleiniano planar cuyo conjunto límite está contenido en un círculo generalizado. En el caso que el conjunto límite coincida con tal círculo generalizado diremos que  $G$  es un **grupo Fuchsiano de la primera clase** y, en caso contrario, diremos que es un **grupo Fuchsiano de la segunda clase**.

Si  $G$  es un grupo Fuchsiano de la primera clase, entonces  $\Omega(G)$  consiste de dos discos generalizados, cada uno invariante por cada transformación en  $G$ . Por otro lado, si  $G$  es un grupo Fuchsiano de la segunda clase, entonces  $\Omega(G)$  es conexo pero no simplemente conexo.

Sea  $G$  un grupo Fuchsiano,  $D$  un disco generalizado que es dejado invariante por  $G$ ,  $S = D/G$  y  $\pi : D \rightarrow S$  la proyección natural. Sabemos que

- (i)  $\pi : D \rightarrow S$  es una función continua y abierta; y
- (ii)  $S$  es un espacio topológico Hausdorff (un orbifold de Riemann).

*9.1.0.1. Caso sin torsión.* — Si además  $G_x = \{I\}$  para todo  $x \in D$ , entonces  $S$  tiene una estructura de superficie de Riemann (coordenadas locales son dadas por inversas locales de  $\pi$ ) que hace de  $\pi : D \rightarrow S$  un cubrimiento (universal) holomorfo.

*9.1.0.2. Caso con torsión.* — En caso que existan puntos  $x \in D$  tales que  $G_x \neq \{I\}$  (en cuyo caso es un subgrupo finito no trivial de  $G$ ) se puede verificar que el conjunto  $D^0 = \{x \in D : G_x = \{I\}\}$  es un abierto denso,  $D - D^0$  es una

colección discreta de puntos y que  $D^0$  es invariante por cada transformación en  $G$ . Esto como consecuencia de que  $G_x$  debe ser un grupo cíclico finito. Denotemos por  $S^0 = D^0/G \subset S$ . En este caso,  $S$  también tiene una estructura de superficie de Riemann que hace de  $\pi : D \rightarrow S$  de una función holomorfa tal que  $\pi : D^0 \rightarrow S^0 = D^0/G$  es un cubrimiento regular con  $G$  como grupo de cubrimiento. Alrededor de cada punto  $x \in D - D^0$  existe un abierto  $U_x$  que es invariante por  $G_x$  y que para  $t \in G - G_x$  vale que  $t(U_x) \cap U_x = \emptyset$ . De esta manera podemos ver que localmente  $\pi(z) = z^d$ , donde  $|G_x| = d$ . En otras palabras,  $\pi : D \rightarrow S$  resulta ser un cubrimiento ramificado holomorfo.

PROBLEMAS. —

- 1.- Verificar que todo grupo Fuchsiano finito es cíclico.
- 2.- Determinar todos los grupos Fuchsianos cíclicos.
- 3.- ¿Es posible encontrar un grupo Fuchsiano Abeliano que no sea cíclico ?
4. Si  $\Gamma$  es un grupo Fuchsiano que deja invariante al disco generalizado  $D$ , entonces  $\Lambda(\Gamma) \subset \partial D$ , donde  $\partial D$  denota el círculo borde de  $D$ .

## 9.2. Polígonos fundamentales : dominios de Dirichlet

Sea  $G$  un grupo Fuchsiano actuando sobre el disco (generalizado)  $D$ . En  $D$  tenemos una métrica hiperbólica  $d_D$  donde  $G$  actúa como grupo de isometrías.

**Definición 9.2.1.** — Sea  $P \subset D$  un polígono hiperbólico. Diremos que  $P$  es un **polígono fundamental** para  $G$  si :

- (i) Si  $x \neq y$  están en el interior de  $P$ , entonces no existe  $t \in G$  tal que  $t(x) = y$ ;
- (ii) Para cada lado  $s$  de  $P$  existe un lado  $s'$  de  $P$  (no necesariamente diferente) y un elemento  $t_s \in G$  tal que  $t(s) = s'$ . La transformación  $t_s$  es llamada un **pareo de lados** del polígono  $P$ ;
- (iii) Para todo punto  $x \in D$  existe  $t \in G$  tal que  $t(x) \in P$ ;
- (iv) Para todo punto  $x \in D$  y para todo  $r > 0$  se tiene que la bola hiperbólica centrada en  $x$  y radio  $r$  corta sólo un número finito de trasladadas  $t(P)$ , con  $t \in G$ .

**Observación 9.2.2.** —

- (a) Condiciones (i) y (ii) nos dicen que  $t_s \neq I$ ,  $t_s$  es único para cada lado  $s$  de  $P$  y que  $t_{s'} = t_s^{-1}$ . En particular, si  $s = s'$ , entonces  $t_s^2 = I$ .
- (b) Si tenemos un lado  $s$  tal que  $s = s'$ , entonces la involución  $t_s$  debe tener un punto fijo en el interior del lado  $s$ .
- (c) La condición (iv) nos dice que los puntos de acumulación de las trasladadas de  $P$  por  $G$  están contenidas en el borde de  $D$ .

(d) La condición (iv) asegura que cada punto de  $P$  (incluyendo los puntos en el círculo borde de  $D$ ) es equivalente por  $G$  a sólo un número finito de puntos de  $P$ . En efecto, si tenemos una sucesión  $x = x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  de puntos en el borde de  $P$ , todos ellos equivalentes por  $G$ , entonces existen transformaciones diferentes dos a dos  $t_1, \dots, t_n, \dots$  en  $G$  tales que  $x_n = t_n(x)$ . Por la condición (i) tenemos que  $t_1^{-1}(P), \dots, t_n^{-1}(P), \dots$  es una colección infinita de trasladadas de  $P$  que interceptan cualquier vecindad de  $x$ , una contradicción a la condición (iv).

**Teorema 9.2.3 (Dominio de Dirichlet).** — *Todo grupo Fuchsiano tiene un polígono fundamental.*

*Idea de la demostración.* — Consideremos un punto  $x \in D^0$  tal que  $t(x) \neq x$  para todo  $t \in G - \{I\}$ , y formemos el conjunto

$$P = \bigcap_{t \in G} Q_t(x),$$

donde  $Q_t(x) = \{y \in D : d_D(x, y) \leq d_D(t(x), y)\}$ . Observemos que  $Q_t(x)$  es uno de los dos espacios que determina la línea hiperbólica  $L_t(x) = \{y \in D : d_D(x, y) = d_D(t(x), y)\}$  (aquel que contiene a  $x$ ). Tenemos que  $P$  es un polígono hiperbólico, llamado el **dominio de Dirichlet de  $G$  centrado en el punto  $x$** , que satisface las condiciones (i)-(iv) de la definición de un polígono hiperbólico. Los detalles pueden ser hallados en [11] y [56].

□

Supongamos que tenemos un polígono fundamental  $P$  para el grupo Fuchsiano  $G$  y consideremos los respectivos pareos de lados  $t_s \in G$ , por cada lado  $s$  de  $P$ . Un **vértice** de  $P$  es por definición un punto fijo de una transformación  $t_s$  que es de orden 2 (es decir,  $s = s'$ ) ó bien es un punto  $v \in \overline{D}$  (la clausura de  $D$ ) en el cual terminan dos lados. El vértice  $v$  puede estar contenido en  $D$ , en cuyo caso en un punto común a dos lados de  $P$ , ó puede estar en el círculo al infinito (es decir, el círculo generalizado que es borde de  $D$ ). Por cada vértice  $v = v_1$  de  $P$  procedemos a construir una transformación  $r_v \in G$  como sigue. El vértice  $v$  es punto final de dos lados de  $P$ , tomamos uno de ellos, digamos  $s_1$  y consideramos  $s'_1 = t_{s_1}(s_1)$ . Entonces tomamos el lado  $s_2 \neq s'_1$  que contiene en su final al vértice  $v_2 = t_{s_1}(v_1)$  y consideramos  $s'_2 = t_{s_2}(s_2)$ . Entonces tomamos el lado  $s_3 \neq s'_2$  que contiene en su final al vértice  $v_3 = t_{s_2}(v_2)$  y consideramos  $s'_3 = t_{s_3}(s_3)$ . La condición (iv) de la definición de polígono fundamental asegura que despues de un número finito de pasos obtendremos por primera vez que  $v_n = v_1$  (ver (d) en la observación 9.2.2). Definimos

$$r_v = t_{s_{n-1}} \circ t_{s_{n-1}} \circ \dots \circ t_{s_2} \circ t_{s_1}$$

Observemos que en el caso que  $v$  es el punto fijo de una involución  $t_s$ , lo anterior nos dá  $t_s^2 = I$ .

**Teorema 9.2.4** ([11], [56]). — Sea  $G$  un grupo Fuchsiano y  $P$  un polígono fundamental de  $G$ . Sean  $t_s \in G$  los pareos de lados determinados por  $P$ . En este caso, el grupo Fuchsiano  $G$  es generado por las transformaciones  $t_s$ , donde  $s$  recorre los lados del polígono fundamental  $P$ , y tiene como una colección completa de relaciones a las palabras  $r_v = I$ , donde  $v$  recorre todos los vértices de  $P$ .

**Proposición 9.2.5.** — Sea  $G$  un grupo Fuchsiano finitamente generado actuando en el disco generalizado  $D$ . Entonces  $S = D/G$  resulta ser una superficie de Riemann **topológicamente finita**, es decir, se obtiene de una superficie cerrada de género  $g \geq 0$  al quitar un número finito  $n$  de puntos, un número finito  $m$  de discos cerrados y que está marcada en un número finito  $r$  de puntos donde la proyección  $\pi : D \rightarrow S$  se ramifica.

*Demonstración.* — La razón de esto es que si la superficie  $S$  fuese de tipo topológico infinito, entonces podríamos encontrar en ella infinitos caminos cerrados (basados en un punto  $p \in S$ ) que son homológicamente independientes. Luego,  $G$  no podía tener un conjunto finito de generadores. □

De hecho existe un resultado aún más general.

**Teorema 9.2.6.** — Sea  $G$  un grupo Fuchsiano actuando en el disco generalizado  $D$ . Entonces los siguientes son equivalentes.

- (1)  $G$  es finitamente generado.
- (2) Todo polígono fundamental tiene un número finito de lados.
- (3) La superficie  $S = D/G$  es topológicamente finita.

*Demonstración.* — La Proposición 9.2.5 nos asegura que (1) implica (3). El teorema 9.2.4 nos asegura que (2) implica (1). Para verificar que (3) implica (2), uno debe darse cuenta que podemos construir una superficie de Riemann  $S^d$  de área hiperbólica finita que admite un automorfismo anticonformal  $\tau$  de manera que  $S^d/\tau$  es topológicamente  $S$ . De hecho,  $S^d/\tau$  es  $S$  menos un número finito de anillos (vecindades abiertas de los bordes de  $S$  que son hoyos. El área hiperbólica de  $S^d$  es finita. Ahora, si  $P$  es un polígono hiperbólico para  $G$ , entonces lo anterior dice que podemos escoger por cada lado al infinito de  $P$  una línea geodésica de manera de acotar un polígono de área hiperbólica finita. Esto no podría ser si  $P$  tuviese un número infinito de lados. □

PROBLEMAS. —

- 1.- Sea  $G$  un grupo Fuchsiano que actúa en el disco  $\Delta$  y tal que  $\Delta/G$  es una superficie de Riemann de género  $g \geq 2$ . Verifique que existe un polígono fundamental para  $G$  consistiendo de  $4g$  lados. ¿Qué tan único es ese polígono?
- 2.- Determinar un polígono fundamental para cada grupo Fuchsiano cíclico.

### 9.3. Teoremas de isomorfía

Con los resultados anteriores sobre grupos Fuchsianos finitamente generados, uno puede encontrar ciertos polígonos fundamentales canónicos de la siguiente manera. Sea  $G$  un grupo Fuchsiano finitamente generado actuando en el disco generalizado  $D$  donde  $S = D/G$  se obtiene de una superficie cerrada de género  $g \geq 0$  al quitar un número finito  $n$  de puntos, un número finito  $m$  de discos cerrados y que está marcada en un número finito  $r$  de puntos donde la proyección  $\pi : D \rightarrow S$  se ramifica. Sea  $p \in S$  que no es un valor de ramificación de  $\pi : D \rightarrow S$ . Entonces podemos escoger :

- (i) caminos simples cerrados  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ , basados en  $p$ , dos a dos disjuntos, tales que  $S$  queda disectado en un dominio planar al cortar por ellas ;
- (ii) arcos simples dos a dos disjuntos y disjuntos de los caminos en (i),  $\delta_1, \dots, \delta_n$ , que conectan  $p$  con cada pinchadura ;
- (iii) arcos simples dos a dos disjuntos y disjuntos de los caminos en (i) y (ii),  $\eta_1, \dots, \eta_m$ , que conectan  $p$  con cada borde ;
- (iv) arcos simples dos a dos disjuntos y disjuntos de los caminos en (i), (ii) y (iii),  $\theta_1, \dots, \theta_r$ , que conectan  $p$  con cada valor de ramificación de  $\pi : D \rightarrow S$ . Digamos que  $\theta_j$  conecta  $p$  con el valor de ramificación  $q_j$  de orden  $a_j \in \{2, 3, \dots\}$  (es decir, localmente  $\pi(z) = z^{a_j}$ ).

Al cortar  $S$  por todos esos caminos obtenemos un polígono topológico, el cual tiene  $(4g + 2n + 2m + 2r)$  lados (sin contar los lados al infinito). Podemos levantar por  $\pi : D \rightarrow S$  tal polígono para obtener una copia en  $D$ . Procediendo con cierto cuidado, uno puede suponer que este es de hecho un polígono hiperbólico  $P$  que sirve como polígono fundamental de  $G$  [41]. Así, uno obtiene el siguiente.

**Teorema 9.3.1.** — Sea  $G < \mathbb{M}^2$  un grupo Fuchsiano finitamente generado, actuando en un disco generalizado  $D$ . Sea  $S = D/G$  la superficie uniformizada por  $G$ ,  $\pi : D \rightarrow S$  la proyección natural, y denotemos por  $q_1, \dots, q_r \in S$  los valores de ramificación de  $\pi$  con orden de ramificación  $a_j$  en  $q_j$ . Entonces :

- (1)  $G$  tiene una presentación de la forma :

$$G = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g, \delta_1, \dots, \delta_n, \eta_1, \dots, \eta_m, \theta_1, \dots, \theta_r : \\ \theta_1^{a_1} = \dots = \theta_r^{a_r} \\ \prod_{j=1}^r \theta_j \prod_{j=1}^m \eta_j \prod_{j=1}^n \delta_j \prod_{j=1}^g \alpha_j \beta_j \alpha_j^{-1} \beta_j^{-1} \rangle,$$

donde  $g \geq 0$  es el género de  $S$ ,  $n$  es el número de pinchaduras de  $S$  y  $m$  es el número de hoyos de  $S$ .

(2) La superficie  $S$  es de área finita sí y sólo si  $m = 0$ , en cuyo caso el área es dada por

$$\text{Area}(S) = \pi \left( 4g + 2n - 4 + 2 \sum_{j=1}^r \left( 1 - \frac{1}{a_j} \right) \right)$$

Observemos que si tenemos dos grupos Fuchsianos  $G_1$  (actuando en el disco  $D_1$ ) y  $G_2$  (actuando en el disco  $D_2$ ) de manera que existe un homeomorfismo  $f : D_1 \rightarrow D_2$  tal que  $fG_1f^{-1} = G_2$ , entonces las superficies  $S_1 = D_1/G_1$  y  $S_2 = D_2/G_2$  son topológicamente equivalentes. Pero puede ocurrir que no tengan los mismos números de hoyos y pinchaduras (un homeomorfismo no distingue hoyos de pinchaduras). Pero si  $f : D_1 \rightarrow D_2$  es una función biholomorfa, entonces ambas superficies son conformalmente equivalentes (en particular, con las mismas cantidades de hoyos y pinchaduras). Relacionado con esta observación es el siguiente.

**Teorema 9.3.2 (Teorema de Dehn-Nielsen).** — Siguiendo con las notaciones anteriores, sea  $G$  un grupo Fuchsiano actuando en el disco  $D$  con presentación

$$G = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_m, \delta_1, \dots, \delta_n, \eta_1, \dots, \eta_m, \theta_1, \dots, \theta_r :$$

$$\theta_1^{a_1} = \dots = \theta_r^{a_r}$$

$$\prod_{j=1}^r \theta_j \prod_{j=1}^m \eta_j \prod_{j=1}^n \delta_j \prod_{j=1}^g \alpha_j \beta_j \alpha_j^{-1} \beta_j^{-1} \rangle .$$

Si

$$\psi : G \rightarrow G$$

es un automorfismo de grupo tal que para todo  $j = 1, \dots, m$ , vale que  $\psi(\eta_j)$  es conjugado en  $G$  a una potencia de algún  $\eta_k$  (es decir, preserva el borde), entonces existe un homeomorfismo

$$f : D \rightarrow D$$

tal que

$$\psi(\gamma) = f \circ \gamma \circ f^{-1}, \quad \text{para todo } \gamma \in G$$

**Corolario 9.3.3.** — Todo automorfismo de un grupo Fuchsiano  $G$  de área finita es inducido por un homeomorfismo del disco donde actúa  $G$ .

**Observación 9.3.4.** — Notemos que el homeomorfismo  $f : D \rightarrow D$  en el teorema y el corolario podría invertir la orientación de  $D$  (inducida de la orientación de  $\widehat{\mathbb{C}}$ ).

PROBLEMAS. —

- 1.- Dar un ejemplo de dos grupos Fuchsianos que son topológicamente equivalentes, pero que no son holomórficamente equivalentes.

#### 9.4. Teorema del polígono de Poincaré

En esta sección mostraremos como construir grupos Fuchsianos y **extendidos Fuchsianos** (es decir, grupos Kleinianos que necesariamente contienen transformaciones extendidas de Möbius cuyo subgrupo de índice dos que preserva orientación es Fuchsiano) a partir de polígonos hiperbólicos a partir del **teorema del polígono de Poincaré**. Sea  $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$  un disco generalizado y  $d_D$  su métrica hiperbólica.

**Teorema 9.4.1 (Teorema del Polígono de Poincaré).** — Sea  $P \subset D$  un polígono hiperbólico, es decir, sus lados son arcos de líneas hiperbólicas. Denotemos por  $P^0$  el interior de  $P$  y supongamos las siguientes propiedades :

- (i) Por cada lado  $s$  de  $P$  existe un lado  $s'$  de  $P$ , no necesariamente diferente de  $s$ , y una transformación  $t_s \in \text{Aut}(D)$  tal que  $t_s(s) = s'$ . la transformación  $t_s$  es llamada un pareo de lados de  $P$ ;
- (ii) Para cada lado  $s$  de  $P$  vale que si  $s' = t_s(s)$ , entonces  $t_{s'} = t_s^{-1}$ ;
- (iii) Por cada lado  $s$  de  $P$  tenemos que  $t_s(P^0) \cap P^0 = \emptyset$ ;
- (iv) Por cada vértice  $v = v_0 \in D$  de  $P$ , existe exactamente un número finito de vértices (diferentes entre ellos y diferentes de  $v$ ) de  $P$ , digamos  $v_1, \dots, v_{n_v}$ , y pareos de lados de  $P$ , digamos  $t_1 = t_{s_1}, \dots, t_{n_v+1} = t_{s_{n_v+1}}$ , tales que  $t_1(v_0) = v_1, t_2(v_1) = v_2, \dots, t_{n_v-1}(v_{n_v-2}) = v_{n_v-1}, t_{n_v}(v_{n_v-1}) = v_{n_v}$  y  $t_{n_v+1}(v_{n_v}) = v_0$ . Denotemos por :
  - (iv.1)  $r_v = t_1^{-1} \circ t_2^{-1} \circ \dots \circ t_{n_v+1}^{-1}$ ; y por
  - (iv.2)  $\alpha_j$  el ángulo interior a  $P$  en el vértice  $v_j, j = 0, 1, \dots, n_v$ .
- (v) Por cada vértice finito  $v \in D$  de  $P$  valen las siguientes :
  - (v.1)  $\alpha_0 + \dots + \alpha_{n_v} = 2\pi/k_v$ , donde  $k_v \in \{1, 2, 3, \dots\}$ ; y
  - (v.2)  $r_v$  es elíptica de orden  $k_v$ .
- (vi) Definamos la relación de equivalencia en  $P$  dada por la identificación de cada punto  $p \in s$ , donde  $s$  es un lado de  $P$ , con el punto  $t_s(p) \in s'$ . Denotemos por  $[P]$  al conjunto de las clases de equivalencia de los puntos de  $P$  y sea  $\pi : P \rightarrow [P]$  la proyección natural. Si dotamos a  $[P]$  de la topología cociente entonces  $\pi$  es continua. Consideremos la distancia en  $[P]$  definida como sigue :

$$d(u, v) = \text{Infimo} \sum d_D(x_j, x'_j)$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas las elecciones de puntos

$$\{x_1, x'_1, \dots, x_k, x'_k\} \subset P$$

tales que  $\pi(x_1) = u$ ,  $\pi(x'_j) = \pi(x_{j+1})$  y  $\pi(x'_k) = v$ . Entonces exigimos que esta métrica sea completa.

Bajo todas estas condiciones tenemos que el grupo  $G$  generado por los pares de lados de  $P$  es un grupo (extendido) Fuchsiano con  $P$  como un polígono fundamental.

**Corolario 9.4.2.** — Sea  $P \subset D$  un polígono hiperbólico, es decir, sus lados son arcos de líneas hiperbólicas. Supongamos que todo par de lados  $s_1$  y  $s_2$  son disjuntos ó bien se cortan en un ángulo (desde el interior del polígono) de la forma  $\pi/k$ , cierto  $k \in \{2, 3, 4, \dots\}$ . Por cada lado  $s$  de  $P$  tenemos la reflexión  $\sigma_s$  en la línea hiperbólica  $L_s$  que contiene a  $s$ . Entonces el grupo  $K$  generado por todas las reflexiones  $\gamma_s$ , donde  $s$  recorre todos los lados de  $P$  resulta ser un grupo discreto con  $P$  como polígono fundamental. Sea  $s_0$  uno de los lados de  $P$  y  $\sigma_{s_0}$  su reflexión. El subgrupo de índice dos  $K^+$  de las transformaciones que preservan la orientación en  $K$  resulta ser un grupo Fuchsiano generado por las transformaciones  $\sigma_s \sigma_{s_0}$ , donde  $s$  recorre todos los lados de  $P$  diferentes de  $s_0$ . Además, el polígono  $P \cup \sigma_0(P)$  resulta ser un polígono fundamental para  $K^+$ .

*Idea de la Demostración.* — En los libros de [11] y [56] pueden encontrarse los detalles. Primero formamos el grupo  $K$  generado por los pares de lados en los lados de  $P$  y consideramos el conjunto  $X = K \times P$ . Definimos la relación de equivalencia

$$(t, z) \equiv (t \circ \sigma_s, z), \quad \text{para } z \text{ en lado } s$$

Denotemos por  $\widehat{X}$  al conjunto de las clases de equivalencia. Tenemos la función

$$q : X \rightarrow D : (t, z) \mapsto t(z)$$

Si dotamos a  $K$  de la topología discreta, a  $P$  de la topología inducida de  $D$ , a  $X$  de la topología producto y a  $\widehat{X}$  de la topología cociente, entonces tenemos que  $q$  es una función continua y abierta. Denotemos por  $\pi : X \rightarrow \widehat{X}$  a la proyección natural inducida por la relación de equivalencia. Entonces  $q \circ \pi$  resulta ser una función continua. Tenemos que la función  $q$  desciende a una función

$$\widehat{q} : \widehat{X} \rightarrow D,$$

es decir,  $\widehat{q} \circ \pi = q$ . Las condiciones dadas en el teorema aseguran que  $\widehat{q}$  es un homeomorfismo local. Se tiene que todo arco en  $D$  puede levantarse a un arco en  $\widehat{X}$ , obteniendo que  $\widehat{q}$  es de hecho un cubrimiento. Ya que  $D$  es simplemente conexo, tenemos que  $\widehat{q}$  es un homeomorfismo. □



**Ejemplo 9.4.3.** — Consideremos  $D = \mathbb{H}^2$  y  $P$  el polígono hiperbólico con lados

$$\begin{aligned} s_1 &= \{z \in \mathbb{H}^2 : \operatorname{Re}(z) = -1/2\} \\ s_2 &= \{z \in \mathbb{H}^2 : |z + 1/4| = 1/4\} \\ s_3 &= \{z \in \mathbb{H}^2 : \operatorname{Re}(z) = 0\} \end{aligned}$$

En este caso,  $P$  es un triángulo hiperbólico donde sus tres vértices al infinito son  $-1/2$ ,  $0$  y  $\infty$ . Denotemos por  $\sigma_j$  la reflexión en el lado  $s_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Ya que las condiciones del teorema del polígono de Poincaré se satisfacen, tenemos que el grupo  $K = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rangle$  es un grupo discreto con  $P$  como polígono fundamental. Tenemos también que

$$K^+ = \langle a = \sigma_3\sigma_1, b = \sigma_3\sigma_2 \rangle$$

es un grupo Fuchsiano con polígono fundamental  $P \cup \sigma_3(P)$ . Así, tenemos que  $K^+$  está generado por las transformaciones parabólicas :

$$\begin{aligned} a(z) &= z + 1 \\ b(z) &= \frac{z}{4z + 1} \end{aligned}$$

y no tiene relaciones, es decir,  $K^+$  es un grupo libre de rango 2. Además, tenemos que  $S^+ = \mathbb{H}^2/K^+$  es la esfera de Riemann con tres pinchaduras y tenemos que  $S = \mathbb{H}^2/K$  es un disco cerrado con tres puntos del borde eliminados. La superficie de Riemann  $S^+$  admite una reflexión (es decir, un automorfismo anticonformal de orden dos con puntos fijos)  $\tau : S^+ \rightarrow S^+$  de manera que  $S^+/\langle \tau \rangle = S$ .

**Ejemplo 9.4.4.** — Consideremos un par de enteros  $n \geq 3$  y  $k \geq 2$  fijos, tales que  $1 - 2/n > 1/k$ . Por el ejercicio anterior, es posible construir un polígono hiperbólico regular  $P \subset \mathbb{H}^2$  de  $n$  lados cuyos ángulos interiores son todos iguales de la forma  $\pi/k$ . Si denotamos sus lados (en la dirección opuesta a las manecillas de un reloj) por  $s_1, \dots, s_n$  y denotamos por  $\sigma_j$  la reflexión en el lado  $s_j$ , para  $j = 1, \dots, n$ , entonces tenemos, por el teorema del Polígono de Poincaré tenemos que el grupo  $K$  generado por todas esas reflexiones es discreto con  $P$  como polígono fundamental y  $S = \mathbb{H}^2/K$  es isométrico a  $P$ . Además, tenemos la siguiente presentación de  $K$  :

(1) **Generadores de  $K$  :**

$$\sigma_1, \dots, \sigma_n$$

(2) **Relaciones para  $K$  :**

$$\sigma_1^2 = \dots = \sigma_n^2 = (\sigma_2\sigma_1)^k = \dots = (\sigma_n\sigma_{n-1})^k = (\sigma_1\sigma_n)^k = 1$$

También tenemos que el grupo  $K^+$  es un grupo Fuchsiano con  $P \cup \sigma_n(P)$  como polígono fundamental y  $S^+ = \mathbb{H}^2/K^+$  es la esfera de Riemann con exactamente  $n$  puntos especiales, todos de orden  $k$ . Además, tenemos la siguiente presentación de  $K^+$  :

(1) **Generadores de  $K^+$  :**

$$x_1 = \sigma_n \sigma_1, \dots, x_{n-1} = \sigma_n \sigma_{n-1}$$

(2) **Relaciones para  $K^+$  :**

$$x_1^k = x_{n-1}^k = (x_2^{-1} x_1)^k = \dots = (x_{n-1}^{-1} x_{n-2})^k = 1$$

En  $S^+$  tenemos una reflexión  $\tau : S^+ \rightarrow S^+$ , inducida por la reflexión  $\sigma_n$ , que fija a cada uno de los puntos de orden  $k$ , tal que  $S = S^+ / \langle \tau \rangle$ .

En el caso particular  $k = n \geq 5$ , tenemos que el subgrupo normal  $[K, K]$  de  $K$  generado por los conmutadores de  $K$  (es decir, las transformaciones de la forma  $aba^{-1}b^{-1}$ ,  $a, b \in K$ ) resulta tener las siguientes propiedades :

(i)  $[K, K]$  tiene índice  $2^n$  ya que

$$K/[K, K] \cong \underbrace{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}_n;$$

(ii)  $[K, K] < K^+$  de índice  $2^{n-1}$  y ya que  $[K^+, K^+] < [K, K]$ , tenemos también que

$$K^+/[K, K] \cong \underbrace{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}_{n-1};$$

(iii)  $[K, K]$  no contiene elementos de orden finito, con excepción de la identidad;

(iv) La superficie de Riemann

$$R = \mathbb{H}^2/[K, K]$$

es de género

$$g = 1 - 2^{n-1} + n2^{n-3}$$

y admite un grupo  $H$  de automorfismos conformales isomorfo a  $K^+/[K, K]$  y una reflexión  $\tau : R \rightarrow R$  que conmuta con cada automorfismo de  $H$ . Si denotamos por  $\widehat{H}$  al grupo generado por  $H$  y  $\tau$ , entonces  $\widehat{H} \cong K/[K, K]$  y tenemos que

$$R/H = S^+ \quad \text{y} \quad R/\widehat{H} = S$$

PROBLEMAS. —

- 1.- Determine todos los triángulos hiperbólicos  $P$  que satisfacen las condiciones del teorema del polígono de Poincaré y determine  $K$  y  $K^+$  en cada caso.
- 2.- Por cada par de enteros  $n \geq 3$  y  $k \geq 2$  fijos, tales que  $1 - 2/n > 1/k$ , verifique que es posible construir un polígono hiperbólico regular de  $n$  lados cuyos ángulos interiores son todos iguales de la forma  $\pi/k$ .

3.- Sea  $K$  un grupo de automorfismos del plano hiperbólico con generadores

$$\sigma_1, \dots, \sigma_n$$

y relaciones

$$\sigma_1^2 = \dots = \sigma_n^2 = (\sigma_2\sigma_1)^k = \dots = (\sigma_n\sigma_{n-1})^k = (\sigma_1\sigma_n)^k = 1$$

Si  $P$  es un polígono fundamental para  $K$ , trate de bosquejar un polígono fundamental para  $[K, K]$  en términos del polígono  $P$ .

- 4.- Verifique que toda superficie de Riemann de género  $g \geq 2$  puede obtenerse al identificar los lados opuestos de un polígono hiperbólico de  $4g$  lados.
- 5.- Sea  $P$  un polígono hiperbólico de  $N$  lados. Determine todas las maneras diferentes de pareo de lados. Para cada posibilidad determine si es posible usar el teorema del polígono de Poincaré para algún polígono hiperbólico que es copia topológica de  $P$ .
- 6.- Describa un polígono hiperbólico y un pareo de lados para cada posible orbifold hiperbólico compacto de dimensión dos.

### 9.5. Cubrimientos finitos ramificados

Supongamos que tenemos una función holomorfa  $P : S \rightarrow R$ , donde  $S$  y  $R$  son superficies de Riemann cerradas, es decir, un cubrimiento holomorfo ramificado de grado finito  $d > 0$ . Denotemos por  $B_P \subset R$  al conjunto de valores de ramificación de  $P$ .

Las superficies de Riemann  $S_0 = S - P^{-1}(B_P)$ ,  $R_0 = R - B_P$  son analíticamente finitas, es decir el complemento de un número finito de puntos de alguna superficie de Riemann cerrada. Tenemos inducido un cubrimiento holomorfo inducido entre esas superficies  $P_0 : S_0 \rightarrow R_0$  de grado  $d$ .

Supongamos que  $R_0$  es hiperbólica, es decir, tiene al plano hiperbólico como cobertor universal. Consideremos un cubrimiento holomorfo universal  $\pi : \mathbb{H}^2 \rightarrow R_0$ , donde  $R = \mathbb{H}^2/F$  para cierto grupo Fuchsiano finitamente generado y sin torsión de la primera clase (es decir, su conjunto límite es todo el borde del plano hiperbólico).

Ya que estamos en presencia de un cubrimiento de grado finito  $d$  de la superficie de Riemann  $R_0$ , tenemos el siguiente.

**Lema 9.5.1.** — *Existen :*

- (i) un subgrupo  $H$ , de índice  $d$ , en  $F$  tal que  $\mathbb{H}^2/H = S_0$ , y  
(ii) un cubrimiento holomorfo universal  $\eta : \mathbb{H}^2 \rightarrow S_0$  tal que

$$P_0 \circ \eta = \pi.$$

Observemos que  $H$  es subgrupo normal de  $F$  sí y sólo si el cubrimiento  $P : S_0 \rightarrow R_0$  es cubrimiento regular. Como  $H$  tiene índice finito en  $F$ , también tenemos el siguiente.

**Lema 9.5.2.** — *El grupo Fuchsiano  $H$  es de la primera clase y finitamente generado.*

Ya que  $F$  no tiene torsión, sabemos que vale el siguiente hecho.

**Lema 9.5.3.** — *Los elementos de  $F$ , diferentes de la identidad son parabólicos ó hiperbólicos.*

**Lema 9.5.4.** — *A cada transformación parabólica primitiva le corresponde una única pinchadura en  $R_0$  y dos parabólicos primitivos diferentes  $a, b \in F$  corresponden a la misma pinchadura sí y sólo si existe  $c \in F$  de manera que  $b = c \circ a^{\pm 1} c^{-1}$ .*

Como  $H$  tiene índice finito en  $F$ , tenemos que para cada transformación  $a \in F$  existe un entero positivo minimal  $n_a \in \{1, 2, \dots\}$  tal que  $a^{n_a} \in H$ . En particular, para cada parabólico primitivo  $a \in F$ , podemos considerar el conjunto de enteros

$$N_a = \{n_{t \circ a \circ t^{-1}} : t \in F\}.$$

Observemos que si  $a \in F$  es una transformación parabólica primitiva, entonces para todo  $h \in H$  tenemos que  $n_a = n_{h \circ a \circ h^{-1}}$ .

Ya que  $H$  tiene índice finito en  $F$ , podemos escribir

$$F = H \cup Hx_1 \cup \dots \cup Hx_n.$$

Luego,  $N_a = \{n_{x_i \circ a \circ x_i^{-1}}, n_a; i = 1, \dots, n\}$ , de donde obtenemos el siguiente.

**Lema 9.5.5.** — *El conjunto  $N_a$  es finito.*

Sea  $m_a = MCM(N_a)$  y  $K$  el subgrupo de  $F$  generado por todas las transformaciones de la forma  $a^{m_a}$ , donde  $a \in F$  recorre todos los parabólicos primitivos. De la definición de  $K$  es claro el siguiente.

**Lema 9.5.6.** —  *$K$  es un subgrupo normal de  $F$  contenido en  $H$ . En particular,  $K$  es de la primera clase.*

Observamos que si  $P_0 : S_0 \rightarrow R_0$  es cubrimiento regular, entonces tenemos que si  $a \in F$  es una transformación parabólica primitiva, entonces para todo  $t \in F$  tenemos que  $n_a = n_{t \circ a \circ t^{-1}}$ , de donde obtenemos que  $n_a = m_a$ .

Ya que tenemos un polígono fundamental para  $K$  para el cual los pareos de lados son dados por transformaciones parabólicas queorean lados consecutivos, es claro el siguiente.

**Lema 9.5.7.** — *La superficie de Riemann  $\Omega^0 = \mathbb{H}^2/K$  es planar.*

En particular, podemos pensar que  $\Omega^0$  es un dominio en la esfera de Riemann y que  $F/K$  es un grupo de transformaciones de Möbius. Todo lo anterior nos permite tener cubrimientos holomorfos Galois

$$Q_1 : \mathbb{H}^2 \rightarrow \Omega^0$$

$$Q_2 : \Omega^0 \rightarrow R_0$$

$$Q_3 : \Omega^0 \rightarrow S_0$$

de manera que

$$\eta = Q_3 \circ Q_1$$

$$\pi = Q_2 \circ Q_1$$

$$Q_2 = P_0 \circ Q_3$$

**Lema 9.5.8.** — *Hay una colección maximal de discos pinchados, dos a dos disjuntos, en  $R_0$ , de manera que sus imágenes inversas por  $Q_2$  consiste de discos pinchados, dos a dos disjuntos.*

*Demonstración.* — Esto es consecuencia del hecho que para cada transformación parabólica primitiva  $a \in F$  existe un disco  $D_a \subset \mathbb{H}^2$ , tangente al borde en el punto fijo de  $a$ , que es precisamente invariante por el subgrupo cíclico generado por  $a$  en el grupo  $F$ . Ya que  $R_0$  tiene un número finito de pinchaduras, podemos escoger tales discos dos a dos disjuntos.  $\square$

**Lema 9.5.9.** — *Si llenamos las pinchaduras de  $\Omega^0$ ,  $R_0$  y  $S_0$ , entonces todos los cubrimientos regulares holomorfos  $P_0$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  se pueden extender de manera continua a cubrimientos ramificados regulares holomorfos.*

*Demonstración.* — Esto es consecuencia del hecho que toda función holomorfa  $f : \Delta^* \rightarrow \Delta^*$ , donde  $\Delta^*$  denota el disco unitario  $\Delta$  con el origen eliminado, se extiende de manera única a una función holomorfa  $f : \Delta \rightarrow \Delta$ .  $\square$

Como consecuencia de la propiedad planar de  $\Omega^0$  y los Lemas 9.5.6 y 9.5.9, es el siguiente.

**Lema 9.5.10.** — *La superficie planar  $\Omega$ , obtenida de  $\Omega^0$  al llenar sus pinchaduras, es una superficie de Riemann simplemente conexa de tipo hiperbólico.*

Un **B-grupo** es un par  $(F, \Omega)$  donde  $F$  es un grupo Kleiniano y  $\Omega$  es una componente simplemente conexa de su región de discontinuidad. Todo lo anterior permite obtener el siguiente resultado.

**Proposición 9.5.11.** — *Sea  $P : S \rightarrow R$  un cubrimiento ramificado holomorfo de grado finito de las superficies cerradas de Riemann  $S$  y  $R$ . Si  $R - B_P$  es hiperbólica, es decir, su cubrimiento universal es dado por el plano hiperbólico, entonces existe un B-grupo  $(F, \Omega)$  que uniformiza  $R$ , con valores singulares en los valores de ramificación de  $P$ , conteniendo un subgrupo  $H$  de índice finito (puede tener torsión) que uniformiza  $S$ , con posibles valores singulares (contenidos en los puntos críticos), y que realiza  $P : S \rightarrow R$ . El cubrimiento ramificado  $P : S \rightarrow R$  es regular sí y sólo si  $H \triangleleft F$ .*

En la proposición anterior, podemos tener que ambos  $(H, \Omega)$  y  $(F, \Omega)$  tengan transformaciones elípticas. Ya que  $S$  y  $R$  son superficies de tipo topológico finito, tenemos que  $H$  and  $F$  son ambos finitamente generados. Por el lema de Selberg existe un subgrupo normal de índice finito y sin torsión  $H^0$  en  $H$ . Consideremos el subgrupo

$$\Gamma = \bigcap_{t \in F} tH^0t^{-1} = \bigcap_{j=0, \dots, n} x_j H^0 x_j^{-1},$$

donde  $F = H \cup x_1 H \cup \dots \cup x_n H$ , y  $x_0 = 1$ .

Ya que la intersección finita de subgrupos de índice finito sigue siendo de índice finito, tenemos que  $\Gamma$  es un subgrupo normal de índice finito  $F$ . Como  $\Gamma < H^0$ , tenemos que  $\Gamma$  no tiene torsión. Así, tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 9.5.12.** — *Sea  $P : S \rightarrow R$  un cubrimiento ramificado holomorfo de grado finito de las superficies cerradas de Riemann  $S$  y  $R$ . Si  $R - B_P$  es hiperbólica, es decir, su cubrimiento universal es dado por el plano hiperbólico, entonces existe una superficie cerrada de Riemann  $X$  con un grupo  $G$  de automorfismos conformales tal que  $X/G = R$ , con singularidades en los valores de ramificación de  $P$ , y existe un subgrupo  $L < G$  de manera que  $X/L = S$  realizando el cubrimiento ramificado  $P$ .*

## 9.6. Lema del collar

Una aplicación de la desigualdad de Jørgensen es el siguiente resultado que nos permite controlar longitud de geodésicas cerradas en superficies de Riemann.

**Lema 9.6.1 (Lema del Collar [42]).** — *Consideremos un grupo Fuchsiano sin torsión  $G$  y sea  $S$  la superficie de Riemann uniformizada por  $G$ . Sea  $\alpha \subset S$  una geodésica simple y cerrada cuya longitud hiperbólica es  $l(\alpha)$ . Entonces el*

subconjunto de  $S$  dado por

$$C(\alpha) = \left\{ x \in S : d(x, \alpha) < \arcsin \left( \frac{1}{\sin(l(\alpha)/2)} \right) \right\}$$

es un anillo incrustado en  $S$ , donde  $d$  representa la métrica hiperbólica inducida en  $S$ .

**Observación 9.6.2.** — Observemos que  $f(l) = \arcsin \left( \frac{1}{\sin(l/2)} \right)$  es una función continua para  $l > 0$  que satisface

$$\lim_{l \rightarrow 0} f(l) = \infty$$

En particular, si el área hiperbólica de  $S$  es finita, entonces esta no puede tener geodésicas de longitud demasiado cortas. Otra observación importante de este lema es que si tenemos dos geodésicas cerradas  $\alpha$  y  $\beta$  que se cortan, entonces la longitud de  $\beta$  está acotada inferiormente por el valor  $2f(l(\alpha))$

## 9.7. Producto Fibrado

**Definición 9.7.1.** — Supongamos que tenemos

$$P_j : S_j \rightarrow S, \quad j = 1, 2$$

funciones holomorfas no-constante de grado finito entre superficies de Riemann conexas y cerradas. El **producto fibrado**  $S_1 \times_S S_2$  se define como una superficie de Riemann cerrada (quizás disconexa) tal que valen las siguientes propiedades :

- (i) existen funciones holomorfas  $Q_j : S_1 \times_S S_2 \rightarrow S_j$ , para cada  $j = 1, 2$ , de manera que  $P_1 \circ Q_1 = P_2 \circ Q_2$ , y
- (ii) si existe una superficie de Riemann cerrada  $R$  y existen funciones holomorfas  $T_j : R \rightarrow S_j$ , para cada  $j = 1, 2$  de manera que  $P_1 \circ T_1 = P_2 \circ T_2$ , entonces existe una única función holomorfa  $H : R \rightarrow S_1 \times_S S_2$  con  $T_j = Q_j \circ H$ , para  $j = 1, 2$ .

**Observación 9.7.2.** — La definición de producto fibrado aquí definida difiere de la definición clásica, cuando pensamos cada superficie de Riemann como una curva algebraica proyectiva no-singular irreducible (la cual es un ejemplo de esquemas). La definición aquí dada corresponde a la desingularización de la definición clásica.

**Proposición 9.7.3 ([29]).** — *El fibrado producto (cásico) existe y es único módulo equivalencia conforme.*

**9.7.1. Existencia del producto fibrado.** — Sean  $S_1, S_2, S$  superficies de Riemann cerradas y sean  $P_1 : S_1 \rightarrow S$  y  $P_2 : S_2 \rightarrow S$  funciones holomorfas no-constantes.

Sea  $B_j \subset S$  el conjunto de valores ramificación de  $P_j$ ,  $S^* = S - (B_1 \cup B_2)$  y  $S_j^* = S_j - P_j^{-1}(B_1 \cup B_2)$ , para  $j = 1, 2$ . Sea

$$\mathcal{U}^* = \{(x, y) \in S_1^* \times S_2^* : P_1(x) = P_2(y)\} \subset S_1 \times S_2$$

Ya que las funciones holomorfas  $P_j : S_j^* \rightarrow S^*$  son funciones de cubrimiento de grado  $p_j$ , se puede ver que  $\mathcal{U}^*$  es una colección finita de superficies de Riemann analíticamente finitas.

Las funciones de proyección

$$Q_1 : \mathcal{U}^* \rightarrow S : (x, y) \mapsto x \quad (\text{de grado } p_2)$$

$$Q_2 : \mathcal{U}^* \rightarrow S : (x, y) \mapsto y \quad (\text{de grado } p_1)$$

son funciones holomorfas satisfaciendo

$$P_1 \circ Q_1 = P_2 \circ Q_2.$$

Como cada componente de  $\mathcal{U}^*$  es analíticamente finita, ellas pueden ser compactificadas (obteniendo superficies de Riemann cerradas) llenando las cantidad finita de pinchaduras. Esto nos define una colección finita  $\mathcal{U}$  de superficies de Riemann cerradas. Las funciones holomorfas  $Q_j$  extienden continuamente, luego holomorficamente, a todo  $\mathcal{U}$  como funciones holomorfas no-constantes  $Q_j : \mathcal{U} \rightarrow S_j$  tales que  $P_1 \circ Q_1 = P_2 \circ Q_2$ .

La función  $K : \mathcal{U} \rightarrow S : (x, y) \mapsto P_1(x) = P_2(y)$ , de grado  $p_1 p_2$ , es holomorfa (ramificada) tal que  $P_j \circ Q_j = K$ .

Notemos que  $Q_j : \mathcal{U} \rightarrow S_j$  sólo puede ser ramificada en los puntos en  $\mathcal{U} - \mathcal{U}^*$ . Sea  $p \in \mathcal{U} - \mathcal{U}^*$  y  $b_j \in \{1, 2, \dots\}$  tal que, localmente en  $Q_j(p) \in S_j$ , se tiene que  $P_j(z) = z^{b_j}$ , para  $j = 1, 2$ . Entonces, localmente en  $p$ , se tiene que  $Q_1(z) = z^{b_2}$  y  $Q_2(z) = z^{b_1}$ .

El siguiente resultado asegura la existencia del producto fibrado de superficies de Riemann.

**Teorema 9.7.4.** —  $\mathcal{U}$  es conformemente equivalente a  $S_1 \times_S S_2$  con  $Q_1$  y  $Q_2$  las dos proyecciones anteriores.

*Demonstración.* — Si  $R$  es una superficie de Riemann cerrada y  $T_j : R \rightarrow S_j$  son funciones holomorfas tales que  $P_2 \circ T_2 = P_1 \circ T_1$ , entonces podemos construir la función holomorfa  $H : R \rightarrow \mathcal{U} : z \mapsto (T_1(z), T_2(z))$  la cual satisface que  $T_1 = Q_1 \circ H$  y  $T_2 = Q_2 \circ H$ . □



**Proposición 9.7.5.** — *Supongamos que el menor género de las componentes de  $\mathcal{U}$  es al menos dos. Entonces, dos componentes cualesquiera de  $\mathcal{U}$  de menor género son conformemente equivalente.*

*Demonstración.* — Sea  $R_k$  una componente de  $S_1 \times_S S_2 = \mathcal{U}$  de menor género (el cual sabemos es al menos dos por hipótesis). Sea  $R_k^*$  la componente correspondiente en  $\mathcal{U}^*$ . Tenemos funciones holomorfas no-ramificadas  $Q_j : R_k^* \rightarrow S_j^*$  tales que  $P_1 \circ Q_1 = P_2 \circ Q_2$ . Como  $R_k^*$  y  $S_j^*$  son analíticamente finitas y  $Q_j$  son non-constantes, entonces  $Q_j : R_k^* \rightarrow S_j^*$  es sobreyectiva. Como consecuencia del teorema de Uniformización de Poincaré-Koebe [24], existe una uniformización  $(\Delta, G, \pi : \Delta \rightarrow S^*)$ , donde  $(G, \Delta)$  es un B-grupo ( $\Delta \in \{\mathbb{H}^2, \mathbb{C}, \widehat{\mathbb{C}}\}$ ). También, existen subgrupos  $G_1, G_2$  de  $G$ , donde  $[G : G_j] = p_j$ , tal que existen cubrimientos  $\pi_j : \Delta \rightarrow \Delta/G_j = S_j$  con  $P_j \circ \pi_j = \pi$ . Sea  $G_{12} = G_1 \cap G_2$ . Claramente, existe  $\Gamma < G_{12}$  tal que  $R_k$  es conformemente equivalente a  $\Delta/\Gamma$ . Ahora veremos que  $G_{12} = \Gamma$ . En efecto, si  $\widehat{R}_k = \Delta/G_{12}$ , entonces existen funciones holomorfas  $L : R_k \rightarrow \widehat{R}_k, T_j : \widehat{R}_k \rightarrow S_j^*$  tales que  $Q_j = T_j \circ L$ , para  $j = 1, 2$ . Ahora completamos las pinchaduras y extendemos continuamente todas las funciones anteriores a las correspondientes superficies de Riemann cerradas. La condición (2) de la definición del producto fibrado asegura que  $L$  debe ser un homeomorfismo conformal; de manera contraria podemos reemplazar  $R_k$  con la superficie de Riemann cerrada definida por  $\widehat{R}_k$  de manera de obtener una contradicción.  $\square$

**Observación 9.7.6.** — En el caso que el género minimal es uno, entonces el resultado anterior vale si reemplazamos “equivalencia conformal” por “isogenia”.

**9.7.2. Descripción en términos de grupos Kleinianos.** — Asumimos que el menor género de las componentes del fibrado producto es al menos dos. Como consecuencia de la Proposición 9.7.5, en el caso que ambas  $P_j$  no tienen ramificaciones, se obtiene que cada componente de género minimal de  $S_1 \times_S S_2$  es conformemente equivalente a  $\Delta/G_{12}$ , donde  $(\Delta, G, P : \Delta \rightarrow S)$  es una uniformización universal y  $G_{12} = G_1 \cap G_2$ , donde  $G_j < G$ ,  $\Delta/G_j$  es conformemente equivalente a  $S_j$  y  $G_j$  define el cubrimiento  $P_j$ . Ahora procedemos a ver este fenómeno en el caso que alguna de las funciones  $P_j$  tiene ramificación.

Si  $y \in B_j - B_{3-j}$ , entonces para cada  $x \in P_j^{-1}(y)$  sea  $b(x) \in \{1, 2, 3, \dots\}$  el índice de ramificación de  $P_j$  sobre  $x$  (es decir, en coordenadas locales  $P_j(z) = z^{b(x)}$ ). Como  $y \in B_j$ , para algún  $x \in P_j^{-1}(y)$  se tiene  $b(x) > 1$ . Sea

$$v(y) = MCM\{b(x) : x \in P_1^{-1}(y)\}$$

donde  $MCM$  denota el mínimo común múltiplo. Similarmente, si  $y \in B_1 \cap B_2$ , entonces definimos

$$v(y) = MCM\{b(x) : x \in P_1^{-1}(y) \cup P_2^{-1}(y)\}$$

Consideramos el orbifold  $S_{orb}$  dada por  $S$  y puntos cónicos sobre los puntos  $y \in B_1 \cup B_2$  con  $v(y) > 1$ . Por el teorema de uniformización de Poincaré-Koebe, existe una uniformización  $(\Delta, G, \pi : \Delta \rightarrow S_{orb})$ . El grupo  $G$  tiene torsión si  $B_1 \cup B_2 \neq \emptyset$ .

**Teorema 9.7.7.** — *Existen subgrupos  $G_1$  y  $G_2$  de  $G$  con  $S_j = \Delta/G_j$  (pensadas como orbifolds) y de manera que los cubrimientos ramificados  $P_j : S_j \rightarrow S_{orb}$  están inducidos por  $G_j$ .*

*Demonstración.* — Consideremos los cubrimientos (no-ramificados)  $P_j : S_j^* \rightarrow S^*$ ,  $j = 1, 2$ . Por el teorema de uniformización, existe una uniformización  $(U, \Gamma, P : U \rightarrow S^*)$ , donde  $\Gamma$  no tiene torsión y  $U \in \{\mathbb{H}^2, \mathbb{C}\}$ . Se tiene la existencia de subgrupos  $\Gamma_j < \Gamma$  tales que  $S_j^* = \mathbb{H}^2/\Gamma_j$  y tal que  $\Gamma_j$  realiza el cubrimiento  $P_j : S_j^* \rightarrow S^*$ . Sea  $H \triangleleft \Gamma$  el subgrupo generado por todas las transformaciones parabólicas. El cociente  $U/H$  es  $\Delta$  pero con un número de pinchaduras que es invariante por la acción del grupo Kleiniano  $G = \Gamma/H$ . Consideremos los subgrupos  $G_j = \Gamma_j/(H \cap \Gamma_j)$  (note que cada parabólico  $h \in H$  tiene una potencia finita en  $\Gamma_j$  pues  $\Gamma_j$  tiene índice finito en  $\Gamma$ ). Ahora, llenamos todas las pinchaduras de  $U/H$ ,  $S_j^*$  y  $S^*$  para terminar la demostración.  $\square$

Note que los grupos  $G_1$ ,  $G_2$  y  $G$  (Theorem 9.7.7) son todos finitamente generados, por el teorema de la finitud de Ahlfors. Sea  $G_{12} = G_1 \cap G_2$ , que también tiene índice finito en  $G$ . Sean

$$\begin{aligned} R &= \Delta/G_{12} \\ \pi_0 &: \Delta \rightarrow R \\ Q_j &: R \rightarrow S_j, \quad j = 1, 2 \\ Q_3 &: R \rightarrow S \end{aligned}$$

tales que

$$\begin{aligned} \pi_j &= Q_j \circ \pi_0, \quad j = 1, 2 \\ Q_3 &= P_j \circ Q_j, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Debemos pensar en  $R$  como una orbifold si  $G_{12}$  tiene torsión. Un punto cónico de  $R$  está necesariamente contenido en  $Q_3^{-1}(B_1 \cup B_2)$ . Sea  $z \in B_1 \cup B_2$  y  $\tilde{z} \in \Delta$  tal que  $\pi(\tilde{z}) = z$ . Consideremos los estabilizadores

$$\begin{aligned} G_j(\tilde{z}) &= \{\gamma \in G_j : \gamma(\tilde{z}) = \tilde{z}\}, \quad j = 1, 2 \\ G_{12}(\tilde{z}) &= \{\gamma \in G_{12} : \gamma(\tilde{z}) = \tilde{z}\}, \\ G(\tilde{z}) &= \{\gamma \in G : \gamma(\tilde{z}) = \tilde{z}\} = \langle t \rangle \cong \mathbb{Z}_{v(z)} \end{aligned}$$

Claramente,  $G_j(\tilde{z}) < G(\tilde{z})$  y  $G_1(\tilde{z}) \cap G_2(\tilde{z}) = G_{12}(\tilde{z})$ . De esta manera,  $z \in R$  es un punto cónico sí y sólo si  $Q_j(z) \in S_j$  es punto cónico para  $j = 1, 2$ .

Por otro lado, la función  $Q_j : R \rightarrow S_j$  no es ramificada en el punto  $z \in R$  sí y sólo si  $G(\tilde{z}) = G_j(\tilde{z})$ . En particular,  $Q_1 : R \rightarrow S_1$  no es ramificada sí y sólo

si  $G_2(\tilde{z}) \leq G_1(\tilde{z})$  para todo  $\tilde{z} \in \Delta$ . Usando el hecho que  $P_1 \circ Q_1 = P_2 \circ Q_2$ , obtenemos el siguiente resultado.

**Proposición 9.7.8.** —  $z \in R$  no es punto de ramificación de  $Q_1$  sí y sólo si  $b(Q_1(z))$  divide  $b(Q_2(z))$ .

**Teorema 9.7.9.** —  $R$  es conformemente equivalente a cualquiera de las componentes de menor género de  $S_1 \times_S S_2$ .

*Demonstración.* — Sea  $\Delta^*$  igual a  $\Delta$  menos los puntos fijos de los elementos no triviales de  $G$ ; luego  $G$  deja  $\Delta^*$  invariant y su acción es sin puntos fijos.

Sea  $R^* = R - Q_1^{-1}(P_1^{-1}(B_1 \cup B_2))$  y consideremos las funciones holomorfas

$$\phi : R^* \rightarrow \mathcal{U}^* : x \mapsto (Q_1(x), Q_2(x)).$$

Veamos que  $\phi$  es inyectiva. Supongamos que  $\phi(x) = \phi(y)$ , es decir,  $T_j(x) = T_j(y)$  para cada  $j = 1, 2$ . Sea  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \Delta$  tal que  $\pi_0(\tilde{x}) = x$ ,  $\pi_0(\tilde{y}) = y$ . La igualdad  $T_j(x) = y$  asegura la existencia de  $\gamma_j \in G_j$  tal que  $\gamma_j(\tilde{x}) = \tilde{y}$ . Luego,  $\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 \in G$  satisface que  $\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1(\tilde{x}) = \tilde{x}$ . Como  $G$  actúa sin puntos fijos en  $\Delta^*$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 \in G_1 \cap G_2 = G_{12}$ , de donde  $x = \pi_0(\tilde{x}) = \pi_0(\tilde{y}) = y$ .

Como  $R^*$  es analíticamente finita,  $\phi$  es un homeomorfismo conformal con una de las componentes de  $\mathcal{U}^*$ , luego, extendiendo continuamente  $\phi$  a las pinchaduras,  $R$  es conformemente equivalente a una (luego a cada una de las componentes) de menor género de  $S_1 \times_S S_2$ . □

## 9.8. Superficies de Riemann Hiperelípticas

Una superficie de Riemann  $S$  de género  $g \geq 2$  es llamada una **superficie de Riemann hiperelíptica** si esta admite un automorfismo conformal de orden 2, digamos  $j : S \rightarrow S$  con exactamente  $2(g+1)$  puntos fijos; llamada la **involución hiperelíptica**. Es bien sabido que la involución hiperelíptica es única y que toda superficie de género dos es hiperelíptica [21]. Esto es equivalente a tener un cubrimiento ramificado holomorfo de grado dos de  $S$  sobre la esfera de Riemann.

Supongamos que  $S$  es una superficie de Riemann hiperelíptica de género  $g \geq 2$  con involución hiperelíptica  $j$ . Entonces el cociente  $\mathcal{O} = S/\langle j \rangle$  es una orbifold con signatura  $(0, 2(g+1); 2, \dots, 2)$ . Consideremos un grupo Fuchsiano  $\Gamma_0$  que uniformiza  $\mathcal{O}$ ; luego tenemos que este grupo tiene una presentación de la siguiente forma :

$$\Gamma_0 = \langle x_1, \dots, x_{2(g+1)} : x_1^2 = \dots = x_{2(g+1)}^2 = x_1 x_2 \cdots x_{2(g+1)} = 1 \rangle$$

En  $\Gamma_0$  existe un único subgrupo  $\Gamma_1$  de índice dos que no tiene torsión; tal grupo es generado por todos los elementos de la forma  $a_j = x_1 x_{j+1}$ , donde  $j = 1, \dots, 2g + 1$ . Una presentación para  $\Gamma_1$  es dada por :

$$\Gamma_1 = \langle a_1, \dots, a_{2g+1} : a_1 a_2^{-1} a_3 \cdots a_{2g}^{-1} a_{2g+1} = a_1^{-1} a_2 a_3^{-1} \cdots a_{2g} a_{2g+1}^{-1} = 1 \rangle$$

El grupo  $\Gamma_1$  uniformiza la superficie  $S$  y cada  $x_k$  induce la involución  $j$ .

H. Farkas notó el siguiente resultado.

**Teorema 9.8.1.** — *Sea  $S$  una superficie hiperelíptica de género  $g \geq 2$  con involución hiperelíptica  $j$  y sea  $p : R \rightarrow S$  un cubrimiento no ramificado regular con grupo de cubrimiento Abeliiano de automorfismos conformales de una superficie de Riemann  $R$ . Entonces, la involución  $j$  se levanta a una involución conformal en  $R$ .*

El resultado anterior de H. Farkas es equivalente al siguiente.

**Teorema 9.8.2.** — *Sea  $\Gamma_2 \triangleleft \Gamma_1$  donde  $\Gamma_1$  es el único subgrupo de índice dos sin torsión dos del grupo  $\Gamma_0$  como antes, de manera que  $\Gamma_1/\Gamma_2$  es Abeliiano. Entonces,  $\Gamma_2 \triangleleft \Gamma_0$ .*

*Demonstración.* — Como  $\Gamma_1/\Gamma_2$  es Abeliiano, tenemos que  $[\Gamma_1 : \Gamma_1] \triangleleft \Gamma_2$ . Ahora podemos mirar la acción de  $x_1 \in \Gamma_0$  en el cociente  $\Gamma_1/[\Gamma_1 : \Gamma_1] \cong \mathbb{Z}^{2g}$ . Por la presentación de  $\Gamma_0$  podemos ver que tal acción es dada por el automorfismo  $a \mapsto -a$ . Esto asegura que  $x_1 \Gamma_2 x_1 = \Gamma_2 [\Gamma_1 : \Gamma_1] = \Gamma_2$ . □

PROBLEMAS. —

1.- Considere la superficie de Riemann  $S_{n,k}$  definida como los ceros en el espacio proyectivo  $n$ -dimensional  $\mathbb{C}P_n$  del siguiente sistema :

$$\begin{cases} x_1^k + x_2^k + x_3^k & = & 0 \\ a_1 x_1^k + x_2^k + x_4^k & = & 0 \\ & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} x_1^k + x_2^k + x_{n+1}^k & = & 0 \end{cases}$$

donde  $k \in \{2, 3, \dots\}$ ,  $a_j \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$  y  $a_j \neq a_l$  para  $j \neq l$ . Verificar que  $S_{n,k}$  es un producto fibrado de  $(n - 1)$  superficies  $S_{2,k}$ .

2.- Verificar que  $S$  es hiperelíptica sí y sólo si existe un cubrimiento holomorfo ramificado de grado dos de  $S$  en la esfera de Riemann.

3.- Verificar que una presentación para  $\Gamma_1$  es dada por :

$$\Gamma_1 = \langle a_1, \dots, a_{2g+1} : a_1 a_2^{-1} a_3 \cdots a_{2g}^{-1} a_{2g+1} = a_1^{-1} a_2 a_3^{-1} \cdots a_{2g} a_{2g+1}^{-1} = 1 \rangle$$

4.- Ver que el grupo  $\Gamma_1$  uniformiza la superficie  $S$  y cada  $x_k$  induce la involución  $j$ .

5.- Completar todos los detalles de la demostración del Theorema 9.8.1.



## CAPÍTULO 10

### GRUPOS HIPERBÓLICOS 3-DIMENSIONALES

En este capítulo nos restringiremos a grupos Kleinianos 3-dimensionales que dejan invariante una **bola generalizada**, es decir, una de las bolas determinada por una esfera generalizada en  $\widehat{\mathbb{R}}^3$ . Una buena referencia para este capítulo es el libro [61].

#### 10.1. Grupos Hiperbólicos

**Definición 10.1.1.** — Diremos que un grupo discreto  $G < \mathbb{M}^3$  es un **grupo hiperbólico** si este deja invariante alguna bola generalizada  $B$ . Luego, su conjunto límite está contenido en la esfera generalizada borde  $S$ . En el caso que el conjunto límite coincida con  $S$ , diremos que  $G$  es un **grupo hiperbólico de la primera clase**; en caso contrario, diremos que es un **grupo hiperbólico de la segunda clase**.

Si  $G < \mathbb{M}^3$  es un grupo hiperbólico de la primera clase, entonces  $\Omega(G)$  consiste de dos bolas generalizadas, cada una invariante por cada transformación en  $G$ . Por otro lado, si  $G$  es un grupo hiperbólico de la segunda clase, entonces  $\Omega(G)$  es conexo, simplemente conexo, pero  $\pi_2(\Omega) \neq 0$ . Sea  $B$  una de las bolas generalizadas y denotemos por  $M = B/G$  y por  $\pi : B \rightarrow M$  la proyección natural. Sabemos de los capítulos anteriores que

- (i)  $\pi : B \rightarrow M$  es una función continua y abierta; y que
- (ii)  $M$  es un espacio topológico Hausdorff.

#### 10.2. Grupos hiperbólicos sin torsión

Sea  $G < \mathbb{M}^3$  un grupo hiperbólico actuando en la bola generalizada  $B \subset \widehat{\mathbb{R}}^3$  de manera que  $G_x = \{I\}$  para todo  $x \in D$ . En este caso tenemos que  $M = B/G$  tiene una estructura de variedad 3-dimensional real orientada (coordenadas locales son dadas por inversas locales de  $\pi$ ) que hace de  $\pi : D \rightarrow S$  un cubrimiento universal.

**Definición 10.2.1.** — La variedad  $M = B/G$  así obtenida es llamada una **variedad hiperbólica 3-dimensional**.

Una variedad hiperbólica 3-dimensional  $M = B/G$  tiene las siguientes propiedades.

- (1) **Irreducibilidad.** Si tomamos una incrustación  $j : S^2 \hookrightarrow M$ , donde  $S^2$  denota la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^3$ , entonces  $j$  se extiende continuamente a la bola unitaria acotada por  $S^2$ . En otras palabras, toda esfera en  $M$  acota una bola. Esto es consecuencia a que  $\pi : B \rightarrow M$  es cubrimiento universal y  $B$  es contractible.

Por ejemplo, la variedad  $S^2 \times S^1$  no es irreducible, en particular no es hiperbólica (ver Problema 1.-).

**Observación 10.2.2.** — Observemos que no toda variedad 3-dimensional irreducible es necesariamente hiperbólica. Por ejemplo,  $M = S^1 \times S^1 \times S^1$  es irreducible con grupo fundamental isomorfo a  $L = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Ya que no existe un grupo discreto de isometrías del espacio hiperbólico tres dimensional isomorfo a  $L$  obtenemos que  $M$  no es hiperbólica.

- (2) **Atoroidalidad.** Si tomamos un homomorfismo inyectivo  $\vartheta : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow G$ , entonces existe una porción del borde de  $M$  que es homeomorfa a  $S^1 \times S^1 \times [0, +\infty)$ . La razón de esto es que si  $G$  contiene dos transformaciones  $a$  y  $b$  diferentes de orden infinito que conmutan, entonces, identificando la esfera generalizada  $S$  con la esfera de Riemann,  $a$  y  $b$  deben ser (ya que  $G$  es discreto) dos transformaciones parabólicas con el mismo punto fijo. Módulo conjugación,  $a(z, t) = (z + 1, t)$  y  $b(z, t) = (z + \tau, t)$ , donde hemos identificado  $B$  con  $\mathbb{C} \times (0, +\infty)$ . Ahora nuestra afirmación es consecuencia de 8.1.3.

**Ejemplo 10.2.3.** — (1) Si  $\partial M = \emptyset$ , entonces  $M$  es atoroidal si y sólo si

$\pi_1(M)$  no contiene un subgrupo isomorfo a  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

(2)  $M = S^1 \times S^1 \times S^1$  es irreducible pero no es atoroidal.

(3)  $M = S^2 \times S^1$  es atoroidal, pero no es irreducible.

Resumiendo lo anterior es el siguiente.

**Corolario 10.2.4.** — Si  $M$  es una variedad 3-dimensional compacta cuyo interior tiene una estructura hiperbólica, entonces  $M$  debe ser orientable, atoroidal e irreducible.

**Pregunta.** Sea  $M$  una variedad compacta real de dimensión tres orientable, irreducible y atoroidal. ¿Posee el interior de  $M$  una estructura hiperbólica?.



Respondiendo de manera negativa a la pregunta anterior es el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 10.2.5.** — Consideremos un homeomorfismo que revierte orientación

$$\sigma : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$$

de orden dos tal que  $(S^1 \times S^1)/\sigma$  es la botella de Klein. Ahora construimos el homeomorfismo que preserva orientación de orden dos

$$\tau : (S^1 \times S^1) \times [-1, 1] \rightarrow (S^1 \times S^1) \times [-1, 1],$$

definido por

$$\tau(p, t) = (\sigma(p), -t),$$

donde  $p \in S^1 \times S^1$  y  $t \in [-1, 1]$ . Se tiene que la involución  $\tau$  actúa preservando la orientación y no tiene puntos fijos sobre la variedad compacta, orientable, 3-dimensional con borde  $(S^1 \times S^1) \times [-1, 1]$ . Como consecuencia el cociente

$$M = ((S^1 \times S^1) \times [-1, 1])/\tau$$

es una la variedad 3-dimensional orientable y compacta.

**Proposición 10.2.6.** — *El interior de la variedad  $M$  construida en el ejemplo 10.2.5 no tiene estructura hiperbólica.*

*Demonstración.* — Supongamos que el interior  $N$  de  $M$  posee estructura hiperbólica. Como tenemos un cubrimiento de grado dos

$$P : S^1 \times S^1 \times (-1, 1) \rightarrow N,$$

entonces debemos tener que  $G = \pi_1(M) = \pi_1(N) < \mathbb{M}$  debe contener  $L = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \pi_1(S^1 \times S^1 \times (-1, 1))$  como subgrupo de índice dos en  $G$ . En este caso,

$$\tau : S^1 \times S^1 \times (-1, 1) \rightarrow S^1 \times S^1 \times (-1, 1)$$

tiene un levantamiento  $\hat{\tau} : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$ ,  $\hat{\tau} \in G$  y  $\hat{\tau}^2 \in L$ . Más aún,  $G$  está generado por  $L$  y  $\hat{\tau}$ . Si ocurre que  $\hat{\tau}^2 = I$ , entonces  $\hat{\tau}$  debe tener un punto fijo en  $\mathbb{H}^3$ , con lo cual tendremos que  $N$  no es una variedad, es decir, es un orbifold con valores de ramificación, una contradicción. Luego  $\hat{\tau}^2 \neq I$ . Por otro lado, sabemos que  $L$  está generado por dos transformaciones parabólicas que conmutan y tienen el mismo punto fijo  $q \in \hat{\mathbb{C}}$ . Como  $\hat{\tau}^2 \neq I$  y  $\hat{\tau}^2 \in L$ , tenemos necesariamente que  $\hat{\tau}^2$  es parabólico con punto fijo  $q$ . Luego  $\hat{\tau}$  también es parabólico con punto fijo  $q$ . Esto diría entonces que  $G$  es abeliano, una contradicción (ver Problema 2.-).

□

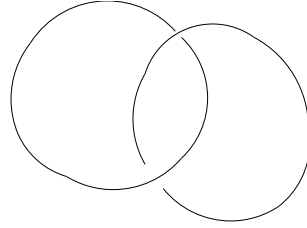


FIGURA 10.1. Dos círculos entrelazados

**Observación 10.2.7.** — En el ejemplo anterior tenemos que  $R = S^1 \times S^1 \times (-1, 1)$  posee una estructura hiperbólica (de volumen infinito), dada por el grupo  $K$  generado por  $A(z, t) = (z + 1, t)$  y  $B(z, t) = (z + i, t)$ . Es importante notar que  $R$  tiene dos bordes naturales, uno es de volumen hiperbólico finito mientras que el otro es de volumen infinito. La variedad  $R$  es topológicamente equivalente a la esfera 3-dimensional  $S^3$  menos dos círculos entrelazados como se muestra en la figura 10.1. La razón de por qué  $N = R/\tau$  no tiene estructura hiperbólica puede verse del hecho que si esto ocurriese, entonces  $\tau$  debería ser una isometría hiperbólica de  $R$  la cual permuta ambos bordes, lo cual contradice la finitud del volumen de uno de los bordes con el hecho que el otro borde es de volumen infinito.

La importancia del ejemplo anterior se ve reflejada en el siguiente resultado de Thurston [74]

**Teorema 10.2.8.** — Si  $M$  es una variedad 3-dimensional compacta, orientable, con  $\partial M \neq \emptyset$  y no homeomorfa al ejemplo anterior, entonces el interior de  $M$  posee una estructura hiperbólica si y sólo si  $M$  es irreducible y atoroidal.

En el caso en que la variedad compacta  $M$  sea cerrada, es decir compacta y sin borde, necesitaremos de la siguiente propiedad debida a Waldhausen [78].

**Definición 10.2.9.** — Diremos que una variedad 3-dimensional compacta  $M$  es **suficientemente grande** si existe una superficie orientable  $S \subset M$  de manera que

- (i) el borde de  $S$  está contenida en el borde de  $M$ ,
- (ii)  $S$  no puede ser homotopada al borde de  $M$ , y
- (iii) la incrustación  $i : S \rightarrow M$  satisface que  $\pi_1(i) : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$  es inyectiva.

**Observación 10.2.10.** — Una variedad 3-dimensional  $M$  compacta, orientable, irreducible y atoroidal con borde es suficientemente grande si contiene una superficie  $S$  de característica de Euler negativa incrustada de manera que su grupo fundamental  $\pi_1(S)$  se inyecta en el grupo fundamental  $\pi_1(M)$ , es decir, valga la condición (iii) de arriba.

**Definición 10.2.11.** — Una variedad compacta es llamada una **variedad prima** si esta no puede descomponerse en suma conexa de variedades homotópicamente no triviales. Una variedad compacta suficientemente grandes y prima es llamada una **variedad de Haken** .

**Teorema 10.2.12** ([74]). — Si  $M$  una variedad 3-dimensional compacta, orientable, cerrada y suficientemente grande, entonces  $M$  tiene una estructura hiperbólica si y sólo si  $M$  es irreducible y atoroidal.

Una buena referencia sobre los teoremas de hiperbolización de Thurston es [64]. En las próximas secciones miraremos algunos ejemplos de construcciones de variedades 3-dimensionales hiperbólicas.

Supongamos que tenemos un grupo hiperbólico sin torsión  $G$  actuando en la bola generalizada  $B \subset \widehat{\mathbb{R}}^3$ . El lema de Margulis 7.14.1 nos asegura que existe  $\epsilon > 0$  de manera que para todo  $x \in B$  y para todo loxodrómico  $t \in G$  vale que  $d_B(x, t(x)) > \epsilon$ . Supongamos que tenemos un elemento parabólico  $p \in G$ . Podemos asumir que  $p$  es primitivo (es decir, no es potencia positiva no trivial de otra transformación en  $G$ ). Sea  $x \in S$  ( $S$  la esfera generalizada borde de  $B$ ) el punto fijo de  $p$ . Sabemos por el Corolario 8.1.3 que existe una bola  $B_x \subset B$ , tangente en  $x$  a  $S$  que satisface la siguiente propiedad :

$$\begin{aligned} t(B_x) \cap B_x &= \emptyset, & \text{para todo } t \in G - G_x \\ t(B_x) &= B_x, & \text{para todo } t \in G_x \end{aligned}$$

Ya que  $G$  no tiene torsión, tenemos que

- (i)  $G_x$  es un grupo cíclico generado por  $p$ , ó bién
- (ii) existe otra transformación parabólica primitiva  $q$  que conmuta con  $p$  y que  $G_x$  es generado por  $p$  y  $q$  (luego,  $G_x \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ).

En el caso (i) tenemos que  $B_x/G_x$  es homeomorfo a  $S^1 \times \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ , y en el caso (ii) tenemos que  $B_x/G_x$  es homeomorfo a  $S^1 \times S^1 \times (0, +\infty)$ .

**Definición 10.2.13.** — Sea  $M = B/G$  una variedad hiperbólica uniformizada por un grupo hiperbólico  $G$ . Para cada  $a > 0$ , denotamos por  $M_{(0,a]} \subset M$  al conjunto de los puntos de  $M$  por donde es posible hacer pasar una curva cerrada y geodésica de longitud a lo más  $a$ , y denotamos por  $M_{[a,\infty)} \subset M$  al conjunto de los puntos de  $M$  por donde no es posible hacer pasar un arco cerrado geodésico de longitud a lo más  $a$ .

**Teorema 10.2.14 (Constante de Margulis).** — Si  $M = B/G$  es una variedad hiperbólica 3-dimensional y  $\epsilon > 0$  es dado por la construcción anterior ( **constante de Margulis**), entonces cada componente de  $M_{(0,\epsilon]}$  es homeomorfo

a una de las siguientes dos posibilidades : (i)  $S^1 \times \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ ; ó bien (ii)  $S^1 \times S^1 \times (0, +\infty)$ .

**Corolario 10.2.15.** — Sea  $M = B/G$  es una variedad hiperbólica 3-dimensional y  $\epsilon > 0$  la constante de Margulis. Si  $M$  tiene volumen finito, entonces  $M_{[\epsilon, \infty)}$  es compacta y  $M_{(0, \epsilon]}$  es unión finita de componentes homeomorfas a  $S^1 \times S^1 \times (0, +\infty)$ .

*Demonstración.* — Es claro que cada componente hiperbólica homeomorfa a  $S^1 \times \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  tiene volumen infinito. Como  $M_{(0, \epsilon]}$  debe tener volumen finito, entonces ocurre que este es una colección finita de componentes homeomorfas a  $S^1 \times S^1 \times (0, +\infty)$ .

Por otro lado, si  $M_{[\epsilon, \infty)}$  no fuese compacto, entonces podríamos construir una sucesión infinita de puntos que están dos a dos a distancia mayor que cierto  $2r > 0$ . Luego tendríamos una colección infinita de bolas hiperbólicas de radio  $r$  dos a dos disjuntas, obligando a  $M$  a tener volumen infinito, una contradicción.  $\square$

PROBLEMAS. —

- 1.- Verificar que la variedad  $S^2 \times S^1$  no es irreducible, en particular no es hiperbólica. Verificar que si  $t \in \mathbb{M}^3$  es una transformación loxodrómica, con puntos fijos  $p$  y  $q$ , entonces  $(\widehat{\mathbb{R}}^3 - \{p, q\})/\langle t \rangle$  es homeomorfa a  $S^2 \times S^1$ .
- 2.- Verificar que si  $M$  es la variedad construida en el ejemplo 10.2.5, entonces :
  - (1)  $\partial M \cong S^1 \times S^1$ ;
  - (2) El interior de  $M$  es homeomorfa a  $\mathbb{R}^3/H$ , donde  $H$  es el grupo generado por

$$A(x, y, z) = (x + 1, y, z)$$

$$B(x, y, z) = (-x, y + 1, -z)$$

es decir,  $M$  posee una estructura de variedad Euclidiana 3-dimensional.

- (3) Deducir de lo anterior que  $\pi_1(M) = \langle A, B : ABA = B \rangle$ .

### 10.3. Grupos hiperbólicos con torsión

Sea  $G$  un grupo hiperbólico actuando en la bola generalizada  $B \subset \widehat{\mathbb{R}}^3$  de manera que existan puntos  $x \in B$  tales que  $G_x \neq \{I\}$  (en cuyo caso es un subgrupo finito no trivial de  $G$ ) se puede verificar que el conjunto  $B^0 = \{x \in B : G_x = \{I\}\}$  es un abierto denso,  $B - B^0$  es una colección discreta de líneas geodésicas y que  $B^0$  es invariante por cada transformación en  $G$ . Recordar que dejamos una tarea en el cual se pedía clasificar todos los grupos finitos de  $\mathbb{M}^2$ . Luego, si identificamos la esfera generalizada  $S$  con la esfera de Riemann, tenemos la clasificación de los grupos finitos  $G_x$ .

Denotemos por  $M^0 = B^0/G \subset M$ . En este caso,  $M$  también tiene una estructura de variedad real 3-dimensional tal que  $\pi : B^0 \rightarrow M^0$  es un cubrimiento regular con  $G$  como grupo de cubrimiento. Alrededor de cada punto  $x \in B - B^0$  existe un abierto  $U_x$  que es invariante por  $G_x$  y que para  $t \in G - G_x$  vale que  $t(U_x) \cap U_x = \emptyset$ . Los cocientes  $U_x/G_x$  son homeomorfos a una bola abierta 3-dimensional donde hay ciertos caminos que parten de un punto interior y llegan al borde. Esos caminos es la proyección de las líneas en  $B - B^0$ . El cociente  $M$  es un **orbifold hiperbólico**.

#### 10.4. Teorema del polihedro de Poincaré

Ahora procederemos a enunciar un resultado importante para la construcción de variedades y orbifolds hiperbólicos a partir de polihedros hiperbólicos.

**10.4.1. Polihedros fundamentales.** — Sea  $G$  un grupo hiperbólico actuando sobre la bola (generalizada)  $B$  y  $d_B$  la métrica hiperbólica donde  $G$  actúa como grupo de isometrías.

**Definición 10.4.1.** — Sea  $P \subset B$  un polihedro hiperbólico. Diremos que  $P$  es un **polihedro fundamental** para  $G$  si :

- (i) Si  $x \neq y$  están en el interior de  $P$ , entonces no existe  $t \in G$  tal que  $t(x) = y$ ;
- (ii) Para cada lado  $s$  de  $P$  existe un lado  $s'$  de  $P$  (no necesariamente diferente) y un elemento  $t_s \in G$  tal que  $t_s(s) = s'$ . La transformación  $t_s$  es llamada un **pareo de lados** del polihedro  $P$ ;
- (iii) Para todo punto  $x \in B$  existe  $t \in G$  tal que  $t(x) \in P$ ;
- (iv) Para todo punto  $x \in B$  y para todo  $r > 0$  se tiene que la bola hiperbólica centrada en  $x$  y radio  $r$  corta sólo un número finito de trasladadas  $t(P)$ , con  $t \in G$ .

**Observación 10.4.2.** —

- (a) Condiciones (i) y (ii) nos dicen que  $t_s \neq I$ ,  $t_s$  es único para cada lado  $s$  de  $P$  y que  $t_{s'} = t_s^{-1}$ . En particular, si  $s = s'$ , entonces  $t_s^2 = I$ .
- (b) Si tenemos un lado  $s$  tal que  $s = s'$ , entonces la involución  $t_s$  debe tener un eje de puntos fijos. Debe ocurrir que un arco de tal eje está contenido en la cara  $s$ .
- (c) La condición (iv) nos dice que los puntos de acumulación de las trasladadas de  $P$  por  $G$  están contenidas en el borde de  $B$ , es decir, en la esfera generalizada  $S$ .
- (d) La condición (iv) asegura que cada punto de  $P$  (incluyendo los puntos en la esfera borde  $S$  de  $B$ ) es equivalente por  $G$  a sólo un número finito de puntos de  $P$ . En efecto, si tenemos una sucesión  $x = x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  de puntos

en el borde de  $P$ , todos ellos equivalentes por  $G$ , entonces existen transformaciones diferentes dos a dos  $t_1, \dots, t_n, \dots$  en  $G$  tales que  $x_n = t_n(x)$ . Por la condición (i) tenemos que  $t_1^{-1}(P), \dots, t_n^{-1}(P), \dots$  es una colección infinita de trasladadas de  $P$  que interceptan cualquier vecindad de  $x$ , una contradicción a la condición (iv).

**Teorema 10.4.3.** — *Todo grupo hiperbólico tiene un polihedro fundamental.*

*Idea de la demostración.* — Consideremos un punto  $x \in B^0$ , tal que  $t(x) \neq x$  para todo  $t \in G - \{I\}$ , y formemos el conjunto

$$P = \bigcap_{t \in G} Q_t(x),$$

donde  $Q_t(x) = \{y \in D : d_D(x, y) \leq d_D(t(x), y)\}$ . Observemos que  $Q_t(x)$  es uno de los dos espacios que determina el plano hiperbólico  $L_t(x) = \{y \in B : d_D(x, y) = d_D(t(x), y)\}$  (aquel que contiene a  $x$ ). Tenemos que  $P$  es un polihedro hiperbólico, llamado **dominio de Dirichlet de  $G$  centrado en  $x$** , que satisface las condiciones (i)-(iv) de la definición de un polihedro hiperbólico. Los detalles pueden ser hallados en [56].

□

Supongamos que tenemos un polihedro fundamental  $P$  para el grupo hiperbólico  $G$ . Tenemos las transformaciones  $t_s \in G$ , por cada lado  $s$  de  $P$ . Un eje de  $P$  es por definición un arco de puntos fijos (contenido en  $s$ ) de una transformación  $t_s$  que es de orden 2 (es decir,  $s = s'$ ) ó bien es un eje  $v \in \overline{B}$  (la clausura de  $B$ ) en el cual terminan dos lados. El eje  $v$  está contenido en  $B$ , con la posible excepción de alguno de sus puntos finales. Por cada eje  $v = v_1$  de  $P$  procedemos a construir una transformación  $r_v \in G$  como sigue. El eje  $v$  es intersección de dos lados de  $P$ , tomamos uno de ellos, digamos  $s_1$  y consideramos  $s'_1 = t_{s_1}(s_1)$ . Entonces tomamos el lado  $s_2 \neq s'_1$  que interseca con  $s'_1$  en el eje  $v_2 = t_{s_1}(v_1)$  y consideramos  $s'_2 = t_{s_2}(s_2)$ . Entonces tomamos el lado  $s_3 \neq s'_2$  que interseca con  $s'_2$  en el eje  $v_3 = t_{s_2}(v_2)$  y consideramos  $s'_3 = t_{s_3}(s_3)$ . La condición (iv) (ver (d) en la observación anterior) de la definición de polígono fundamental asegura que después de un número finito de pasos obtendremos por primera vez que  $v_n = v_1$ . Definimos

$$r_v = t_{s_{n-1}} \circ t_{s_{n-1}} \circ \dots \circ t_{s_2} \circ t_{s_1}$$

Observemos que en el caso que  $v$  es arco de puntos fijos de una involución  $t_s$ , lo anterior nos dá  $t_s^2 = I$ .

**Teorema 10.4.4** ([56]). — *Sea  $G$  un grupo hiperbólico y  $P$  un polihedro fundamental de  $G$ . Sean  $t_s \in G$  los pares de lados determinados por  $P$ . En esta caso, el grupo  $G$  es generado por las transformaciones  $t_s$ , donde  $s$  recorre los lados del polihedro fundamental  $P$ , y tiene como relaciones  $r_v = I$ , por cada eje  $v$  de  $P$ .*

**Observación 10.4.5.** — En el caso de grupos Fuchsianos (la versión bi-dimensional de los grupos hiperbólicos tres-dimensionales) teníamos que las condiciones de ser finitamente generado era equivalente a que todo polígono fundamental de este tuviese un número finito de lados. Desgraciadamente, para el caso de grupos hiperbólicos 3-dimensionales esta equivalencia no es cierta. Por supuesto que la existencia de un polihedro fundamental con un número finito de lados asegura, por el resultado anterior, la condición de ser finitamente generado. Pero existen grupos hiperbólicos finitamente generados que no tienen ningún polihedro fundamental con un número finito de lados, llamados **grupos geoméricamente infinitos**. Los grupos hiperbólicos para los cuales es posible encontrar un polihedro fundamental con un número finito de lados son llamados **grupos geoméricamente finitos**.

**10.4.2. Teorema del polihedro de Poincaré.** — En esta subsección mostraremos como construir grupos Hiperbólicos a partir de polihedros hiperbólicos por medio del **teorema del polihedro de Poincaré**. En [56] se puede hallar la demostración.

**Teorema 10.4.6 (Teorema del Polihedro de Poincaré).** — Sea  $P \subset \mathbb{H}^3$  un polihedro hiperbólico, es decir, sus lados son partes de planos hiperbólicos. Denotemos por  $P^0$  el interior de  $P$  y supongamos las siguientes propiedades :

- (i) Por cada lado  $s$  de  $P$  existe un lado  $s'$  de  $P$ , no necesariamente diferente de  $s$ , y una transformación  $t_s \in \text{Aut}(\mathbb{H}^3)$  tal que  $t_s(s) = s'$ . la transformación  $t_s$  es llamada un pareo de lados de  $P$ ;
- (ii) Para cada lado  $s$  de  $P$  vale que si  $s' = t_s(s)$ , entonces  $t_{s'} = t_s^{-1}$ ;
- (iii) Por cada lado  $s$  de  $P$  tenemos que  $t_s(P^0) \cap P^0 = \emptyset$ ;
- (iv) Por cada eje  $v = v_0$  de  $P$ , existe exactamente un número finito de ejes (diferentes entre ellos y diferentes de  $v$ ) de  $P$ , digamos  $v_1, \dots, v_{n_v}$ , y pareos de lados de  $P$ , digamos  $t_1 = t_{s_1}, \dots, t_{n_v+1} = t_{s_{n_v+1}}$ , tales que  $t_1(v_0) = v_1$ ,  $t_2(v_1) = v_2, \dots, t_{n_v-1}(v_{n_v-2}) = v_{n_v-1}$ ,  $t_{n_v}(v_{n_v-1}) = v_{n_v}$  y  $t_{n_v+1}(v_{n_v}) = v_0$ . Denotemos por :
  - (iv.1)  $r_v = t_1^{-1} \circ t_2^{-1} \circ \dots \circ t_{n_v+1}^{-1}$ ; y por
  - (iv.2)  $\alpha_j$  el ángulo dihedral interior a  $P$  en el vértice  $v_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n_v$ .
- (v) Por cada eje  $v \in D$  de  $P$  valen las siguientes :
  - (v.1)  $\alpha_0 + \dots + \alpha_{n_v} = 2\pi/k_v$ , donde  $k_v \in \{1, 2, 3, \dots\}$ ; y
  - (v.2)  $r_v$  es elíptica de orden  $k_v$ .
- (vi) Definamos la relación de equivalencia en  $P$  dada por la identificación de cada punto  $p \in s$ , donde  $s$  es un lado de  $P$ , con el punto  $t_s(p) \in s'$ . Denotemos por  $[P]$  al conjunto de las clases de equivalencia de los puntos de  $P$  y sea  $\pi : P \rightarrow [P]$  la proyección natural. Si dotamos a  $[P]$  de la topología cociente entonces  $\pi$  es continua. Consideremos la distancia en

$[P]$  definida como sigue :

$$d(u, v) = \text{Infimo} \sum d_D(x_j, x'_j)$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas las elecciones de puntos

$$\{x_1, x'_1, \dots, x_k, x'_k\} \subset P$$

tales que  $\pi(x_1) = u$ ,  $\pi(x'_j) = \pi(x_{j+1})$  y  $\pi(x'_k) = v$ . Entonces exigimos que esta métrica sea completa.

Bajo todas estas condiciones tenemos que el grupo  $G$  generado por los pares de lados de  $P$  es un grupo discreto de isometrías del espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^3$  con  $P$  como polihedro fundamental.

**Corolario 10.4.7.** — Sea  $P \subset \mathbb{H}^3$  un polihedro hiperbólico, es decir, sus lados son caras son polígonos hiperbólicos contenidos en planos hiperbólicos. Supongamos que todo par de lados  $s_1$  y  $s_2$  son disjuntos ó bién se cortan en un ángulo (desde el interior del polígono) de la forma  $\pi/k$ , cierto  $k \in \{2, 3, 4, \dots\}$ . Por cada lado  $s$  de  $P$  tenemos la reflexión  $\sigma_s$  en el plano hiperbólico  $L_s$  que contiene a  $s$ . Entonces el grupo  $K$  generado por todas las reflexiones  $\gamma_s$ , donde  $s$  recorre todos los lados de  $P$  resulta ser un grupo discreto con  $P$  como polígono fundamental. Sea  $s_0$  uno de los lados de  $P$  y  $\sigma_{s_0}$  su reflexión. El subgrupo de índice  $K^+$  de las transformaciones que preservan la orientación en  $K$  resulta ser un grupo hiperbólico generado por las transformaciones  $\sigma_s \sigma_{s_0}$ , donde  $s$  recorre todos los lados de  $P$  diferentes de  $s_0$ . Además, el polihedro  $P \cup \sigma_0(P)$  resulta ser un polihedro fundamental para  $K^+$ .

## 10.5. Teorema de Poincaré : un par de ejemplos

El teorema del polihedro de Poincaré da condiciones para construir grupos discretos de isometrías hiperbólicas, luego variedades y orbifolds hiperbólicos.

**10.5.1. Grupos de Schottky clásicos.** — Consideremos una esfera generalizada  $S$  y  $B$  una de las dos bolas generalizadas acotadas por  $S$ .

Sea  $g \geq 1$  un entero y consideremos una colección de  $2g$  planos geodésicos en  $B$ , digamos  $s_1, \dots, s_g, s'_1, \dots, s'_g$ , cuyas clausuras (el plano unión su círculo generalizado en la esfera generalizada borde  $S$ ) son dos a dos disjuntos, y acotando un polihedro hiperbólico  $P \subset B$  de  $2g$  lados (más un lado al infinito que resulta ser un dominio de conectividad  $2g$  en la esfera  $S$ ). Denotemos por  $P^0$  el interior de  $P$  en  $B$ . Es posible encontrar transformaciones loxodrómicas  $a_1, \dots, a_g \in \text{Aut}(B)$  que satisfacen :

- (i)  $a_j(s_j) = s'_j$ , para  $j = 1, \dots, g$ ;
- (ii)  $a_j(P^0) \cap P^0 = \emptyset$ , para  $j = 1, \dots, g$ .



Las condiciones del teorema del polihedro de Poincaré son satisfechas y tenemos que el grupo

$$G = \langle a_1, \dots, a_g \rangle$$

resulta ser un grupo discreto de isometrías de  $B$  con  $P$  como polihedro fundamental. Además, tenemos que no hay relaciones entre los generadores, es decir,  $G$  es un grupo libre de rango  $g$ . En este caso, tenemos que la variedad hiperbólica  $B/G$  es de volumen infinito y es homeomorfo a

$$\underbrace{(S^1 \times D^2) \# \dots \# (S^1 \times D^2)}_{g\text{-veces}}$$

donde  $S^1$  denota al círculo unitario y  $D^2$  al disco abierto de radio 1 en el plano. Este tipo de variedades son llamadas **Handlebodies** de género  $g$ .

**10.5.2. La variedad de Gieseking.** — Consideremos un tetrahedro regular  $P \subset \mathbb{H}^3$  con todos sus vértices al infinito. Los ángulos dihedrales de tal tetrahedro son todos iguales a  $\pi/3$ . Denotemos los vértices de  $P$  como  $v_1, v_2, v_3, v_4$ . Sean  $a, b \in \text{Aut}(\mathbb{H}^3)$  elementos elípticos de orden 3 obtenidos como sigue :

- (i)  $a$  tiene su eje de rotación en la línea hiperbólica que tiene un final en el vértice  $v_1$  y es ortogonal a la cara opuesta de  $P$ , y rota los vértices restantes como :

$$a(v_4) = v_3, a(v_3) = v_2, \text{ y } a(v_2) = v_4.$$

- (ii)  $b$  tiene su eje de rotación en la línea hiperbólica que tiene un final en el vértice  $v_2$  y es ortogonal a la cara opuesta de  $P$ , y rota los vértices restantes como :

$$b(v_3) = v_1, b(v_1) = v_4, \text{ y } b(v_4) = v_3.$$

Sean  $\sigma_b$  la reflexión en la cara de  $P$  opuesta al vértice  $v_1$  y sea  $\sigma_a$  la reflexión en la cara de  $P$  opuesta al vértice  $v_4$ . Si definimos

$$\begin{aligned} x &= \sigma_b \circ b \\ y &= \sigma_a \circ a, \end{aligned}$$

entonces tenemos un pareo de los cuatro lados de  $P$ . La transformación  $x$  lleva la cara  $s_1 = (v_2, v_1, v_4)$  en la cara  $s'_1 = (v_2, v_4, v_3)$ . La transformación  $y$  lleva la cara  $s_2 = (v_1, v_4, v_3)$  en la cara  $s'_2 = (v_1, v_3, v_2)$ . Observemos que tanto  $x$  como  $y$  son isometrías que revierten orientación de  $\mathbb{H}^3$ . Todos los 6 ejes son equivalentes por esos pareos, y como todos los ángulos dihedrales son iguales a  $\pi/3$ , se puede verificar las condiciones del teorema de Poincaré. De esta manera, el grupo

$$G = \langle x, y \rangle$$

es un grupo discreto de isometrías hiperbólicas con  $P$  como polihedro fundamental. Más aún, tenemos la presentación :

$$G = \langle x, y : x^2 y^2 = yx \rangle$$

La variedad hiperbólica  $\mathbb{H}^3/G$  es no-orientable con un sólo final, llamada la **variedad de Gieseking**.

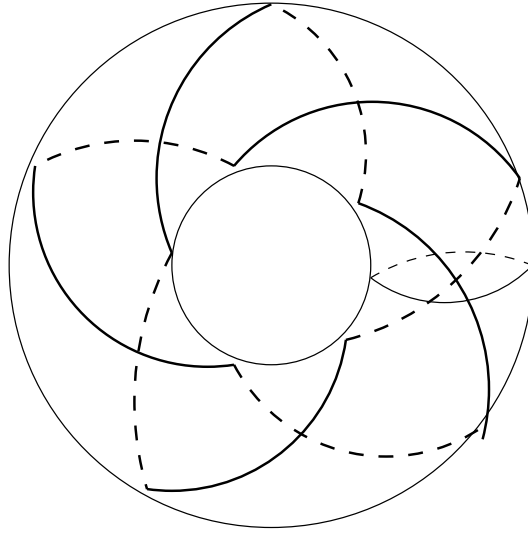


FIGURA 10.2. Un nudo toroidal

## 10.6. Complemento de nudos

**Definición 10.6.1.** — Un **nudo** en la esfera 3-dimensional  $S^3$  es la imagen homeomorfa de un círculo en  $S^3$ . Un nudo  $K \subset S^3$  tal que el grupo fundamental de su complemento sea trivial es llamado un **nudo no anudado**. En caso contrario, decimos que este es un **nudo anudado**.

Dado un nudo  $K \subset S^3$  uno puede considerar la variedad 3-dimensional  $M_K$  obtenida al eliminar una vecindad tubular abierta de  $K$ . Esta es una variedad compacta, irreducible, orientable con borde  $\partial M_K \cong S^1 \times S^1$ . El teorema 10.2.8 asegura que el interior de  $M_K$  admite una estructura hiperbólica si y sólo si  $M_K$  es atoroidal.

### 10.6.1. Nudos toroidales y satelitales. —

**Definición 10.6.2.** — Un nudo  $K \subset S^3$  anudado es llamado un **nudo toroidal** si existe un toro  $T \cong S^1 \times S^1$  incrustado en  $S^3$  el cual no es anudado (es decir,  $S^3 - T$  consiste de dos variedades homeomorfas a  $D^2 \times S^1$ , donde  $D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ) tal que  $K \subset T$  (en la figura 10.2 se muestra un nudo toroidal llamado la figura 8).

**Definición 10.6.3.** — Un nudo  $K \subset S^3$  es llamado un **nudo satelital** si existe un nudo no trivial  $Q \subset S^3$ , es decir  $\pi_1(S^3 - Q)$  no es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ , y existe una vecindad tubular  $V_Q$  para  $Q$  de manera que  $K \subset V_Q$  y no exista una bola tres dimensional  $B^3 \subset V_Q$  conteniendo  $K$  en su interior.

**10.6.2. Nudos no-anudados.** — Si tomamos  $K \subset S^3$  un nudo no anudado, entonces tenemos que  $M_K$  es homeomorfo a  $\overline{D} \times S^1$ , donde  $\overline{D}$  es el disco unitario cerrado y  $S^1$  es el círculo unitario (es decir,  $M_K$  es un handlebody de género 1). En este caso, como el grupo fundamental de  $M_K$  es un grupo cíclico infinito, la única estructura hiperbólica que se le puede dar es ó bien por un grupo de Schottky de género 1, es decir, por el grupo cíclico generado por una transformación loxodrómica ó por un grupo cíclico generado por una transformación parabólica (un grupo de Schottky anudado de género 1).

**10.6.3. Hiperbolización de nudos.** — Lo anterior y el teorema 10.2.8 nos asegura que los únicos nudos para los cuales el interior de  $M_K$  no tiene estructura hiperbólica son los toroidales y satelitales, es decir :

**Corolario 10.6.4.** — *Sea  $K$  un nudo en  $S^3$ . Entonces el interior de  $M_K$  tiene estructura hiperbólica si y sólo si  $K$  no es toroidal ni satelital.*

**Observación 10.6.5.** — (1) Si  $M_K$  tiene interior con estructura hiperbólica y  $K$  es anudado, entonces  $\text{Vol}(\text{Int}(M_K)) < \infty$ . En efecto, el borde de  $M_K$  es homeomorfo a  $S^1 \times S^1$ , luego debe ser uniformizado por un subgrupo discreto isomorfo a  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  ó a  $\mathbb{Z}$  (este último generado por un loxodrómico ó un parabólico). Ya que  $K$  es no anudado, tenemos que  $M_K$  no es un handlebody de género 1, luego el borde de  $M_K$  sólo puede ser uniformizado por  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  (un grupo generado por dos translaciones en direcciones  $\mathbb{R}$ -linealmente independientes).

(2) El programa *Snappea* [71] de J. Weeks permite dibujar nudos y entrelazados (links) en la esfera  $S^3$  y determinar si su complemento admite o no una estructura de variedad hiperbólica. Además este entrega su volumen hiperbólico, su homología, una representación matricial de su grupo fundamental como transformaciones de Möbius, dominios fundamentales, etc..

PROBLEMAS. —

- 1.- Verificar que si  $K$  es un nudo toroidal, entonces  $M_K$  no es atoroidal. En particular, concluir que  $M_K$  no posee una estructura de variedad hiperbólica.
- 2.- Verificar que si  $K$  es un nudo satelital, entonces  $K$  es anudado y  $M_K$  no es atoroidal. Concluir que en este caso  $M_K$  no puede tener la estructura de una variedad hiperbólica.

## 10.7. Fibrados sobre $S^1$

Consideremos una superficie  $S$  compacta, orientable con posible borde  $\partial S$  y sea  $f : S \rightarrow S$  un homeomorfismo de  $S$  que preserva la orientación. Podemos

construir una variedad 3-dimensional compacta orientable

$$M_f(S) = S \times [0, 1] / \sim,$$

donde  $(x, 0) \sim (f(x), 1)$ , la cual es un **fibrado sobre**  $S^1$ .

El grupo fundamental de  $M_f(S)$  es la HNN-extensión del grupo fundamental de  $S \times [0, 1]$  extendido por  $f$ . De manera más precisa; podemos suponer que  $f(p) = p$  algún  $p \in S$ , homotopando  $f$  si es necesario. Supongamos que  $S$  es una superficie compacta de género  $g \geq 1$  con  $k$  bordes. En este caso,

$$\pi_1(S, p) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g, \delta_1, \dots, \delta_k : \prod_{j=1}^g [\alpha_j, \beta_j] \prod_{l=1}^k \delta_l = 1 \rangle,$$

donde  $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ .

Si consideramos un arco simple orientado  $\delta \subset S \times [0, 1]$  partiendo desde  $(p, 0)$  y terminando en  $(p, 1)$ , entonces

$$\begin{aligned} \pi_1(M_f(S), [(p, 0)]) &= \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g, \delta_1, \dots, \delta_k, \delta : \\ &\prod_{j=1}^g [\alpha_j, \beta_j] \prod_{l=1}^k \delta_l = 1, f_*(\alpha_j) = \delta^{-1} \alpha_j \delta, f_*(\beta_j) = \delta^{-1} \beta_j \delta, f_*(\delta_l) = \delta^{-1} \delta_l \delta \rangle \end{aligned}$$

Luego, si el interior de  $M_f(S)$  tiene estructura hiperbólica, entonces existe un grupo Kleiniano  $G$  isomorfo al grupo anterior tal que el interior de  $M_f(S)$  es homeomorfo a  $\mathbb{H}^3/G$

**10.7.1. Característica no-negativa.** — Supongamos que la característica de Euler de  $S$  es mayor o igual a cero. En tal caso, las posibilidades para  $S$  son, módulo homeomorfismos, las siguientes :

- (i)  $S^2$ ;
- (ii)  $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ ;
- (iii)  $A = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1\}$ ;
- (iv)  $S^1 \times S^1$ .

Si  $S = S^2$ , entonces todo homeomorfismo que preserva orientación  $f : S \rightarrow S$  debe ser homotópico a la identidad. Luego tenemos que  $M_f(S) \cong S^2 \times S^1$ . Esta variedad no es irreducible y, en particular, no posee una estructura hiperbólica.

Cuando  $S = \overline{D}$ , todo homeomorfismo  $f : S \rightarrow S$ , que preserva orientación, es homotópico a la identidad. Entonces tenemos que  $M_f(S) \cong \overline{D} \times S^1$ . El interior posee estructura hiperbólica dada por cualquier grupo de Schottky anodado de género uno. Es importante notar que no existe estructura hiperbólica de volumen finito ¿Por qué?

En el caso  $S = A$  tenemos dos posibilidades, dependiendo si  $f$  permuta o no ambos bordes del anillo  $A$  :

- (a) Supongamos que  $f$  preserva cada lado de  $A$ . En tal caso  $M_f(S) \cong S^3 - K$ , donde  $K$  es el entrelazado dado en figura 10.1. El grupo fundamental de esta variedad es isomorfa a  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ . Este caso tiene una estructura hiperbólica de

dimensión infinita, dado por el grupo  $K = \langle A, B \rangle$ , donde  $A$  y  $B$  son parabólicos con el mismo punto fijo  $\infty$  trasladando en direcciones linealmente independientes. Como todo subgrupo discreto de isometrías de  $\mathbb{H}^3$  isomorfo a  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$  es conjugado a uno del tipo antes descrito, tenemos que no es posible encontrar una estructura hiperbólica de volumen finito.

- (b) Supongamos ahora que  $f$  permuta los dos lados de  $A$ . Luego existe una curva simple cerrada  $\gamma$  contenida en el interior de  $A$  que separa ambos lados de  $A$  y que resulta ser invariante por  $f$ . Luego  $\gamma \times [0, 1]$  define en  $M_f(S)$  un toro que no es homotópico al borde de  $M_f(S)$  (que resulta ser un toro). Así, obtenemos una variedad que no es homotópicamente atoroidal, luego, no tiene estructura hiperbólica.

En el último caso, si  $S = S^1 \times S^1$  y  $f : S \rightarrow S$  es un homeomorfismo que preserva orientación, entonces  $M_f(S)$  contendrá incrustada una copia de  $S$ , la cual no es homotópica a un borde de  $M_f(S)$  por la simple razón que esta es cerrada. Luego  $M_f(S)$  resulta no ser homotópicamente atoroidal y, en particular, no posee una estructura hiperbólica.

**Ejercicio 4.** — *Completar los detalles de lo anterior.*

**10.7.2. Característica negativa.** — En el caso que  $S$  tiene característica de Euler negativa se tiene que  $M_f(S)$  resulta ser irreducible. La razón de esto es que el cubrimiento universal de  $M_f(S)$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^3$ , luego contractible. En efecto, supongamos que  $S = \mathbb{H}/F$ , donde  $\mathbb{H}$  es el plano hiperbólico y  $F$  es un grupo Fuchsiano que uniformiza  $S$ . Denotemos por  $\pi : \mathbb{H} \rightarrow S$  el cubrimiento universal inducido por  $F$ . Entonces el homeomorfismo  $f : S \rightarrow S$  se levanta por  $\pi$  a un homeomorfismo  $\hat{f} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ . Ahora, consideremos el espacio  $\mathcal{W} = \mathbb{H} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$  y el grupo  $L$  de homeomorfismos de  $\mathcal{W}$  generado por las transformaciones  $A_\gamma(z, t) = (\gamma(z), t)$ , para  $\gamma \in F$  y  $B(z, t) = (\hat{f}(z), t + 1)$ . El siguiente ejercicio permite verificar que el cobertor universal de  $M_f(S)$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^3$  como queríamos verificar.

**Ejercicio 5.** —

- (i) *Verificar que  $L$  es un grupo de homeomorfismos de  $\mathcal{W}$  que actúa de manera propiamente discontinua y sin puntos fijos en todo  $\mathcal{W}$ . Más aún,  $\mathcal{W}/L$  es homeomorfo a  $M_f(S)$ .*
- (ii) *Ver que  $M_f(S)$  no puede ser homeomorfo a la variedad dada de la Proposición 10.2.6*

Ahora que sabemos que  $M_f(S)$  es irreducible y no homeomorfo al caso excluido en el Teorema 10.2.8 tenemos como consecuencia de los teoremas de hiperbolización de Thurston 10.2.8 y 10.2.12 el siguiente.

**Corolario 10.7.1.** — *Sea  $S$  una superficie de característica de Euler negativa. El interior de  $M_f(S)$  admite estructura hiperbólica si y sólo si  $M_f(S)$  es atoroidal.*

La condición para  $M_f(S)$  de ser o no atoroidal será consecuencia del (tipo de homotopía) del homeomorfismo  $f : S \rightarrow S$  considerado. Primero, enunciaremos la clasificación de los homeomorfismos dada por Thurston.

**Definición 10.7.2.** — Consideremos un homeomorfismo  $f : S \rightarrow S$ .

- (1) Si  $f$  es homotópico a un homeomorfismo de orden finito, entonces decimos que este es un **homeomorfismo periódico**.
- (2) Si  $f$  es homotópica a un homeomorfismo para el cual existe una colección de curvas cerradas simples, dos a dos disjuntas, ninguna de ellas homotópicamente trivial ni homotópica a un borde de  $S$ , que es invariante por la acción de tal homeomorfismo, entonces decimos que  $f$  es un **homeomorfismo reducible**.
- (3) Si  $f$  no es de ninguno de los dos tipos anteriores, entonces decimos que es un **homeomorfismo pseudo-Anosov**.

Supongamos que  $f : S \rightarrow S$  es periódico. Podemos entonces suponer que  $f$  es de orden finito, digamos  $N$ . Consideremos una curva simple cerrada  $\alpha \subset S$  que no sea homotópicamente trivial ni sea homotópica a un borde de  $S$ . Sean  $\alpha_0 = \alpha$ ,  $\alpha_1 = f(\alpha), \dots, \alpha_k = f^k(\alpha)$ , tal que  $f(\alpha_k) = \alpha$ . Consideremos los cilindros  $C_1 = \alpha_0 \times [0, 1], \dots, C_k = \alpha_k \times [0, 1]$  en  $S \times [0, 1]$ . Estos cilindros se proyectan en toros dentro de  $M_f(S)$ , obteniendo en este caso que  $M_f(S)$  no es atoroidal.

Supongamos ahora que  $f : S \rightarrow S$  es reducible. Podemos suponer que  $f$  deja invariante una colección de curvas cerradas simples, dos a dos disjuntas, ninguna de ellas homotópicamente trivial ni homotópica a un borde de  $S$ . En este caso podemos escoger una curva  $\alpha$  dentro de tal colección y podemos proceder como en el caso anterior para ver que  $M_f(S)$  no es atoroidal.

Tenemos el siguiente resultado de Thurston, cuya demostración también puede encontrarse en [66], el cual dice que  $M_f(S)$  es atoroidal si  $f$  es pseudo-Anosov. Así, los teoremas de hiperbolización de Thurston 10.2.8 y 10.2.12 dan el siguiente.

**Corolario 10.7.3.** — *Sea  $S$  una superficie compacta orientable de característica de Euler negativa y sea  $f : S \rightarrow S$  un homeomorfismo que preserva orientación. Entonces el interior de  $M_f(S)$  admite una estructura de variedad hiperbólica si y sólo si  $f$  es pseudo-Anosov.*

Por lo anterior, el problema de hiperbolización del interior de  $M_f(S)$  se puede mirar como el problema de decidir cuando el homeomorfismo  $f : S \rightarrow S$  es o no un homeomorfismo pseudo-Anosov. Como esta propiedad es un invariante homotópico, podemos suponer que existe  $p \in S$  tal que  $f(p) = p$ . De esta manera tenemos el siguiente diagrama conmutativo :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S, p) & \xrightarrow{\pi_1(f)} & \pi_1(S, p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_1(S, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{H_1(f)} & H_1(S, \mathbb{Z}) \end{array}$$

Si nos damos una base de  $H_1(S, \mathbb{Z})$ , entonces  $H_1(f)$  queda representada por una matriz en  $SL(r, \mathbb{Z})$ , donde

$$r = \text{rango de } H_1(S, \mathbb{Z}) = \begin{cases} 2g, & \text{si } S \text{ es superficie compacta} \\ & \text{cerrada de género } g; \\ 2g + k - 1, & \text{si } S \text{ es superficie compacta} \\ & \text{de género } g \text{ y } k > 0 \text{ bordes.} \end{cases}$$

Esta matriz  $H_1(f)$  es llamada la **monodromía de Anosov** del homeomorfismo  $f : S \rightarrow S$  correspondiente a la base escogida de homología. Un cambio de base de homología induce una conjugación de la matriz  $H_1(f)$  por una matriz en  $SL(r, \mathbb{Z})$ , en particular, el polinomio característico  $P_f(t) = \text{Det}[H_1(f) - tI] \in \mathbb{Z}[t]$  se mantiene invariante. Podemos ver las siguientes propiedades :

- (i) Si  $f : S \rightarrow S$  es periódico de período  $N$ , entonces  $Q(t) = t^N - 1$  debe ser divisible por  $P_f(t)$ . En particular,  $P_f(t)$  tiene como ceros algunas de las raíces de la unidad.
- (ii) Si existe una curva  $\alpha$  cerrada simple homológicamente no trivial en  $S$  tal que  $f^k(\alpha) = \alpha$  (igualdad en el sentido de homología) para algún  $k > 0$ , entonces  $P_f(t)$  tiene un cero que es raíz de la unidad.

En resumen, lo anterior permite decir lo siguiente.

**Proposición 10.7.4.** — Sea  $f : S \rightarrow S$  un homeomorfismo de  $S$  que preserva orientación cuyo polinomio característico  $P_f(t)$  no tiene raíces de la unidad como ceros, entonces :

- (a)  $f$  no puede ser periódico ;
- (b) si  $f$  es reducible, entonces cualquier colección de curvas invariante por  $f$  debe consistir sólo de curvas que son homológicamente triviales.

**Observación 10.7.5.** — Es importante notar que mirar sólo la acción del homeomorfismo  $f : S \rightarrow S$  a nivel de la homología, no da información sobre la acción de  $f$  sobre las curvas que son homológicamente triviales. Es por esta razón que en la proposición anterior no podemos desechar la posibilidad que  $f$  sea o no reducible.

PROBLEMAS. —

- 1.- Verificar que  $\partial M_f(S) \neq \emptyset$  si y sólo si  $\partial S \neq \emptyset$ . En tal caso,  $\partial M_f(S)$  es unión de toros.

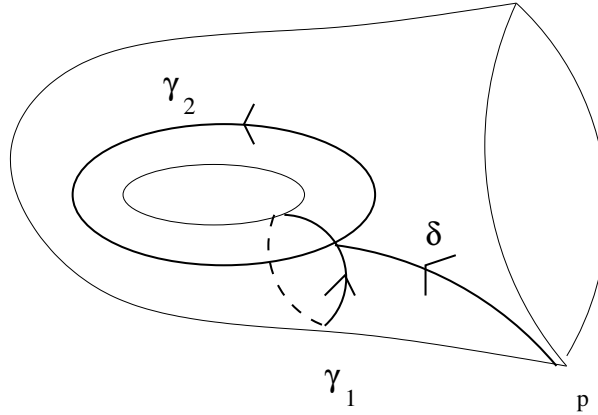


FIGURA 10.3. Un toro con un borde

2.- Sean  $f, g : S \rightarrow S$  homeomorfismos que preservan orientación y que son homotópicos. Probar que  $M_f(S)$  y  $M_g(S)$  son variedades homeomorfas.

### 10.8. Género uno y un borde

Para tener una mejor visión de este ejemplo, recomendamos leer los trabajos de H. Helling, P. Alestalo y C. Menzel [6] [30].

Sea  $S$  una superficie compacta de género uno con un borde y  $f : S \rightarrow S$  un homeomorfismo que preserva orientación. Módulo homotopía, podemos asumir que  $f$  es la identidad cerca del borde. Sea  $p \in \partial S$  y sean las curvas orientadas simples  $\gamma_1, \gamma_2$  y el arco orientado  $\delta$  como se muestran en la figura 10.3.

Si  $\alpha = \delta \cdot \gamma_1 \cdot \delta^{-1}$  y  $\beta = \delta \cdot \gamma_2 \cdot \delta^{-1}$ , entonces

$$\pi_1(S, p) = \langle \alpha, \beta \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

$$H_1(S, \mathbb{Z}) = \langle \hat{\alpha}, \hat{\beta} : [\hat{\alpha}, \hat{\beta}] = 1 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

La curva frontera es dada por  $\lambda = \beta^{-1} \cdot \alpha^{-1} \cdot \beta \cdot \alpha$ .

Usando esta base de homología para  $S$ , obtenemos la monodromía de Anosov de  $f$

$$H_1(f) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$$

En este caso, el polinomio característico de  $f$  es dado por

$$P_f(t) = t^2 - (a + d)t + 1$$

Respecto a los ceros de  $P_f(t)$  tenemos el siguiente :

- (1) Si  $(a + d)^2 > 4$ , entonces los ceros de  $P_f(t)$  viven en  $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$ ;
- (2) Si  $(a + d)^2 = 4$ , entonces los ceros de  $P_f(t)$  viven en  $\{\pm 1\}$ ;
- (3) Si  $(a + d)^2 < 4$ , entonces los ceros de  $P_f(t)$  viven en  $\{\pm i, \frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}\}$ .

Habíamos observado que :



- (a) si  $f$  es periódico, entonces  $P_f(t)$  debe tener como cero alguna raíz de la unidad, es decir,  $-2 \leq a + d \leq 2$ ;
- (b) Si  $f$  es reducible, y usando el hecho que no hay curvas simples cerradas homológicamente triviales que no sean homotópicamente triviales (o homotópicas al borde) en este tipo de superficie  $S$ , entonces de nuevo debemos tener  $-2 \leq a + d \leq 2$ .

Luego, si  $(a + b)^2 > 4$ , es decir la matriz  $H_1(f)$  es hiperbólica, entonces  $f$  es pseudo-Anosov. H. Helling ha observado que el recíproco es válido :

**Teorema 10.8.1.** — *Sea  $f : S \rightarrow S$  un homeomorfismo que preserva orientación de una superficie  $S$  de género uno con un borde. Entonces  $f$  es pseudo-Anosov si y sólo si  $H_1(f)$  es hiperbólica.*

**Corolario 10.8.2.** — *Sea  $S$  una superficie de género 1 con un borde y  $f : S \rightarrow S$  un homeomorfismo que preserva la orientación. Entonces el interior de la variedad  $M_f(S)$  es hiperbólica si y sólo si  $H_1(f)$  es hiperbólica.*

### 10.9. Caso de superficies cerradas

Para esta subsección nos basaremos en [18]. Supongamos que la superficie  $S$  considerada es cerrada de género  $g \geq 2$  y  $f : S \rightarrow S$  un homeomorfismo que preserva la orientación. Sabemos que si el polinomio característico  $P_f(t)$  no tiene raíces de la unidad como ceros, entonces Proposición 10.7.4 asegura que  $f$  puede ser de uno de los siguientes tipos :

- (1) Pseudo-Anosov ;
- (2) Reducible de orden infinito con un sistema invariante de curvas cerradas, simples, homológicamente triviales, homotópicamente no triviales y disjuntas dos a dos.

Supongamos que tenemos el caso (2). En esta situación tenemos la existencia de una colección  $\mathcal{F}$  finita de curvas cerradas, simples, disjuntas dos a dos, homológicamente triviales pero homotópicamente no triviales, que es invariante por  $f$ . Podemos suponer que  $\alpha_1$  es una de esas curvas y que esta divide  $S$  en dos superficies, una de las cuales denotaremos por  $S_1$  con la propiedad que  $S_1$  es disjunta de las otras curvas cerradas en  $\mathcal{F}$ .

Denotemos por  $\alpha_2 = f(\alpha_1)$ ,  $\alpha_3 = f(\alpha_2)$ , ...,  $\alpha_r = f(\alpha_{r-1})$  tal que  $f(\alpha_r) = \alpha_1$ . De esta manera, obtenemos también la sucesión finita de superficies  $S_1, S_2 = f(S_1), \dots, S_r = f(S_{r-1})$  y tal que  $f(S_r) = S_1$ . Sean

$$R = S - \bigcup_{j=1}^r S_j; \text{ y } \bar{R} = R \cup \{\text{discos pegados en cada borde de } R\}$$

Entonces

$$H_1(S, \mathbb{Z}) = H_1(S_1, \mathbb{Z}) \oplus \cdots \oplus H_1(S_r, \mathbb{Z}) \oplus H_1(\bar{R}, \mathbb{Z}).$$

Luego podemos construir una base para  $H_1(S, \mathbb{Z})$  de la manera siguiente. Primero, construimos una base para  $H_1(S_1, \mathbb{Z})$  y la trasladamos por  $f$  para obtener una base para cada  $H_1(S_j, \mathbb{Z})$ ,  $j = 2, \dots, r-1$ . Segundo, construimos una base para  $H_1(\bar{R}, \mathbb{Z})$ . La unión de todas esas bases da una base para  $H_1(S, \mathbb{Z})$ . La monodromía de Anosov para  $f$  en tal base queda de la forma :

$$H_1(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & A & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & C & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & B & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & I & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & E & F & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & G & H & 0 \end{bmatrix}$$

Luego  $P_f(t) = M(t^r)N(t)$ , donde  $N(t)$  es el polinomio característico de  $f$  restringido a  $\bar{R}$ . En particular se obtiene el siguiente :

**Teorema 10.9.1 ([18]).** — *Sea  $S$  una superficie orientable cerrada de género  $g \geq 2$  y  $f : S \rightarrow S$  un homeomorfismo que preserva la orientación. Entonces  $f$  es pseudo-Anosov si :*

- (i)  $P_f(t)$  no tiene raíces de la unidad como ceros ;
- (ii)  $P_f(t)$  es un polinomio irreducible en  $\mathbb{Z}[t]$ ; y
- (iii)  $P_f(t) \notin \mathbb{Z}[t^r]$ , para ningún  $r \in \{2, 3, 4, \dots\}$ .

**Corolario 10.9.2.** — *Sea  $S$  una superficie orientable cerrada de género  $g \geq 2$  y  $f : S \rightarrow S$  un homeomorfismo que preserva la orientación. Entonces el interior de la variedad  $M_f(S)$  es hiperbólica sí y sólo si*

- (i)  $P_f(t)$  no tiene raíces de la unidad como ceros ;
- (ii)  $P_f(t)$  es un polinomio irreducible en  $\mathbb{Z}[t]$ ; y
- (iii)  $P_f(t) \notin \mathbb{Z}[t^r]$ , para ningún  $r \in \{2, 3, 4, \dots\}$ .

El siguiente ejemplo es tomado también del libro [18]. Sea  $S$  una superficie de género dos y considere las curvas  $\gamma_1, \dots, \gamma_5$  como se muestra en la figura 10.4.

Denotemos por  $f_j : S \rightarrow S$  el Dehn twist a lo largo de la curva  $\gamma_j$ ,  $j = 1, \dots, 5$ .

Usando como base para  $H_1(S, \mathbb{Z})$  las curvas  $\alpha_1 = \gamma_1$ ,  $\alpha_2 = \gamma_5$ ,  $\beta_1 = \gamma_2$  y  $\beta_2 = \gamma_4$ , las monodromías de Anosov quedan dadas por las matrices :

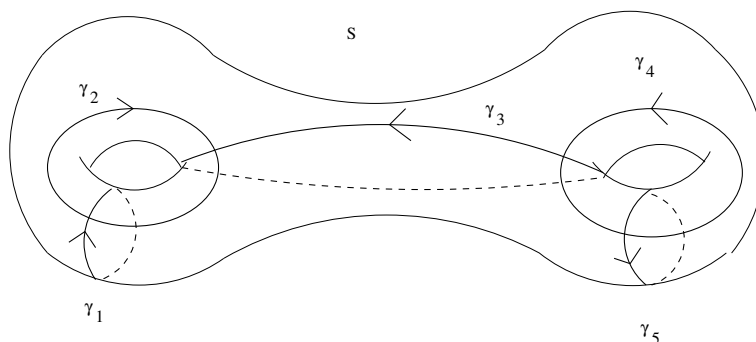


FIGURA 10.4. Una superficie de género dos

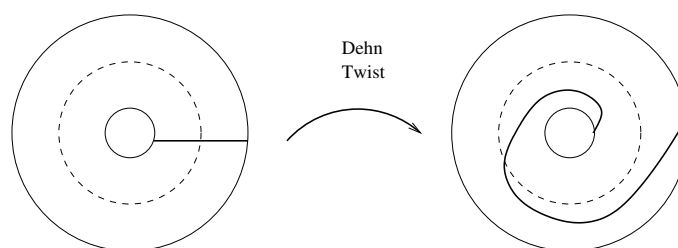


FIGURA 10.5. Dehn twist

$$H_1(f_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad H_1(f_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$H_1(f_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad H_1(f_4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$H_1(f_5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tomando  $f = f_1 f_3 f_5^2 f_2^{-1} f_4^{-1}$ , se obtiene que  $P_f(t) = t^4 - 9t^3 + 21t^2 - 9t + 1$ , el cual es irreducible en  $\mathbb{Z}[t]$ , no tiene ceros que sean raíz de la unidad y  $P_f(t) \notin \mathbb{Z}[t^r]$  para  $r \in \{2, 3, 4, \dots\}$ . Luego, como consecuencia del Corolario 10.9.2 tenemos que  $M_f(S)$  posee una estructura hiperbólica.

**10.10. Picarones pegados := Handlebodies**

Para  $g \geq 1$  consideremos la variedad orientable compacta

$$M_g = \underbrace{\overline{D} \times S^1 \# \cdots \# \overline{D} \times S^1}_{g \text{ veces}}$$

donde  $\overline{D}$  denota el disco unitario cerrado. La variedad  $M_g$  es llamada un **handlebody de género  $g$** .

Si tenemos un handlebody de género  $g$ , digamos  $M_g$ , entonces estructuras hiperbólicas completas en el interior de  $M_g$  son dadas por grupos de Schottky de género  $g$ . Estas estructuras tienen la propiedad que el radio de inyectividad de una tal estructura es acotada inferiormente por una constante positiva.

**Definición 10.10.1.** — Un **grupo de Schottky anodado de género  $g$**  es un grupo discreto geoméricamente finito isomorfo a un grupo libre de rango  $g$ .

Se sabe que todo grupo de Schottky anodado produce estructuras hiperbólicas completas en el interior de  $M_g$  donde el radio de inyectividad ya no es acotado inferiormente por una constante positiva.

Por supuesto podemos mirar otros grupos discretos en la esfera de Riemann que sean isomorfos a un grupo libre de rango  $g$ . Nos podemos preguntar si estos grupos también producen estructuras hiperbólicas en el interior de  $M_g$ .

**Conjetura 10.10.2.** — Sea  $G \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{g \text{ veces}}$  un grupo discreto. Entonces  $\mathbb{H}^3/G$  es homeomorfo al interior del Handlebody  $M_g$ .

PROBLEMAS. —

- 1.- Verificar que  $M_g$  es irreducible y atoroidal y no homeomorfa a la variedad de la Proposición 10.2.6 Concluir que el interior de  $M_g$  posee una estructura hiperbólica.
- 2.- Verificar que si  $G$  es ó bien (i) un grupo de Schottky de género  $g \geq 1$  ó (ii) un grupo de Schottky anodado de género  $g \geq 1$ , entonces  $\mathbb{H}^3/G$  es homeomorfo al interior del Handlebody  $M_g$ .

# CAPÍTULO 11

## CUBRIMIENTOS HOMOLÓGICOS

Cada superficie de Riemann cerrada de género al menos uno tiene asociada ciertos toros complejos que llamaremos Jacobianas. En este capítulo recordaremos algunos aspectos de estos objetos y les relacionaremos con los grupos uniformizantes.

### 11.1. Jacobianas y matrices de Riemann

Consideremos una superficie de Riemann  $S$  de género  $g \geq 1$ . Denotemos por  $H_1(S, \mathbb{Z}) \cong \oplus^{2g} \mathbb{Z}$  al primer grupo de homología de  $S$ . Este grupo codifica (en parte) la parte topológica de la superficie  $S$ .

**Definición 11.1.1.** — Una base de  $H_1(S, \mathbb{Z})$  es llamada una **base simpléctica** si está representada por  $2g$  curvas cerradas orientadas,  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ , tal que

$$\alpha_j \cdot \alpha_k = \beta_j \cdot \beta_k = 0$$

$$\alpha_j \cdot \beta_k = \delta_{jk}$$

También tenemos asociado a  $S$  es el espacio vectorial complejo de dimensión  $g$  de las 1-formas holomorfas [21], denotado por  $H^{1,0}(S)$ ; además, se sabe que existe una base de este espacio, digamos  $w_1, \dots, w_g$ , satisfaciendo que

$$\int_{\alpha_j} w_k = \delta_{jk}$$

llamada una **base dual** a la base simpléctica anterior. En este espacio tenemos una forma Hermitiana positiva definida dada por :

$$(\theta_1, \theta_2) = \frac{i}{2} \int \int_S \theta_1 \wedge \overline{\theta_2} = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^g \left[ \int_{\alpha_j} \theta_1 \overline{\int_{\beta_j} \theta_2} - \int_{\beta_j} \theta_1 \overline{\int_{\alpha_j} \theta_2} \right]$$

para  $\theta_1, \theta_2 \in H^{1,0}(S)$ . Por ejemplo, para la base dual  $w_1, \dots, w_g$  anterior tenemos que

$$(w_j, w_k) = \operatorname{Im} \left( \int_{\beta_j} w_k \right)$$

Luego, esta forma Hermitiana queda representada en esta base dual como

$$((x_1, \dots, x_g), (y_1, \dots, y_g)) = \sum_{j=1}^g \sum_{k=1}^g x_j \overline{y_k} \operatorname{Im} \left( \int_{\beta_j} w_k \right)$$

Si denotamos por  $(H^{1,0}(S))^*$  el espacio dual de  $H^{1,0}(S)$ , entonces la forma Hermitiana anterior nos da un anti-isomorfismo

$$\Psi : H^{1,0}(S) \rightarrow (H^{1,0}(S))^*$$

definido por

$$\Psi(\theta) = (\cdot, \theta)$$

De esta manera, tenemos inducida la forma Hermitiana

$$(\Psi(\theta_1), \Psi(\theta_2)) = \overline{(\theta_1, \theta_2)}$$

Integración de 1-formas sobre curvas (orientadas) en  $S$  da la función

$$\Phi_S : H_1(S, \mathbb{Z}) \rightarrow (H^{1,0}(S))^*$$

definida por

$$\phi([\gamma]) = \int_{\gamma}$$

**Definición 11.1.2.** — El cociente

$$J(S) = (H^{1,0}(S))^* / H_1(S, \mathbb{Z})$$

es llamada la **variedad Jacobiana** de  $S$ , la cual resulta ser una variedad Abelianiana principalmente polarizada con la forma Hermitiana anterior.

Usando la base simpléctica  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$  y su base dual  $w_1, \dots, w_g$  de 1-formas holomorfas en  $S$ , uno puede escribir lo anterior en coordenadas. Esto es, si usamos la base dual  $w_1^*, \dots, w_g^*$  para el espacio  $(H^{1,0}(S))^*$ , entonces podemos identificar  $(H^{1,0}(S))^*$  con  $\widehat{\mathbb{C}}^g$  y el reticulado  $H_1(S, \mathbb{Z})$  se identifica con un reticulado  $L$  en  $\widehat{\mathbb{C}}^g$  generado por los vectores  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $e_g = (0, \dots, 0, 1)$ ,  $z_1 = (z_{1,1}, \dots, z_{g,1})$ , ...,  $z_g = (z_{1,g}, \dots, z_{g,g})$ , donde

$$z_{kj} = \int_{\beta_j} w_k = \int_{\beta_k} w_j$$

**Definición 11.1.3.** — La matriz  $Z = (z_1 z_2 \cdots z_g)$  es llamada una **matriz de Riemann** para  $S$ .

Luego  $J(S)$  es analíticamente equivalente a la variedad abeliana principalmente polarizada obtenida como  $\widehat{\mathbb{C}}^g/L$  con la polarización dada por

$$((x_1, \dots, x_g), (y_1, \dots, y_g)) = \sum_{j=1}^g \sum_{k=1}^g \bar{x}_j y_k \operatorname{Im}(z_{jk})$$

**Observación 11.1.4.** — Denotemos por  $\operatorname{Pic}^0(S)$  el espacio de las clases de divisores de grado cero en  $S$  (un divisor de grado cero es trivial si es el divisor de una función meromorfa en  $S$ ). Tomemos un punto  $p_0 \in S$ . El teorema de Abel [21] dice que la función

$$H : \operatorname{Pic}^0(S) \rightarrow J(S)$$

definida por

$$H(p_1 + \dots + p_g - q_1 - \dots - q_g) = \left[ \int_{p_0}^{p_1} + \dots + \int_{p_0}^{p_g} - \int_{p_0}^{q_1} - \dots - \int_{p_0}^{q_g} \right]$$

resulta ser un isomorfismo.

PROBLEMAS. —

- 1.- Verificar que la función  $\phi([\gamma]) = \int_{\gamma}$  es un homomorfismo inyectivo entre  $\mathbb{Z}$ -módulos. La base dual en  $(H^{1,0}(S))^*$  respecto a la base  $w_1, \dots, w_g$  es exactamente la dada por

$$w_1^* = \int_{\alpha_1}, \dots, w_g^* = \int_{\alpha_g} .$$

- 2.- Verificar que se puede ver  $H_1(S, \mathbb{Z})$  como un reticulado en el espacio  $(H^{1,0}(S))^*$ , donde  $S$  es una superficie de Riemann cerrada.
- 3.- Concluir del Problema 2.- que la forma Hermitiana inducida en  $H^{1,0}(S)^*$  en la base dual queda dada por

$$((x_1, \dots, x_g), (y_1, \dots, y_g)) = \sum_{j=1}^g \sum_{k=1}^g \bar{x}_j y_k \operatorname{Im} \left( \int_{\beta_j} w_k \right)$$

### 11.2. Variedades de Prym

Supongamos que tenemos un cubrimiento ramificado  $\pi : R \rightarrow S$  entre dos superficies de Riemann  $R$  y  $S$ , de géneros  $\gamma$  y  $g$ , respectivamente. Asociado a este cubrimiento tenemos asociado el siguiente diagrama conmutativo :

$$\begin{array}{ccccc} H_1(R, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\Phi_R} & H^{1,0}(R)^* & \xrightarrow{P_R} & J(R) \\ H_1(\pi) \downarrow & & H^{1,0}(\pi)^* \downarrow & & J(\pi) \downarrow \\ H_1(S, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\Phi_S} & H^{1,0}(S)^* & \xrightarrow{P_S} & J(S) \end{array}$$

donde

$$H_1(\pi) : H_1(R, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S, \mathbb{Z})$$

es el homomorfismo inducido por  $\pi : R \rightarrow S$  al nivel del primer grupo de homología;

$$H^{1,0}(\pi)^* : (H^{1,0}(R))^* \rightarrow (H^{1,0}(S))^*$$

es la función lineal sobreyectiva inducida a nivel del dual de las formas holomorfas;

$$J(R) = (H^{1,0}(R))^* / \Phi_R(H_1(R, \mathbb{Z})) \quad J(S) = (H^{1,0}(S))^* / \Phi_S(H_1(S, \mathbb{Z}))$$

son las variedades Jacobianas de  $R$  y  $S$ , respectivamente;

$$J(\pi) : J(R) \rightarrow J(S)$$

es el homomorfismo sobreyectivo inducido sobre las Jacobianas;

$$P_R : (H^{1,0}(R))^* \rightarrow J(R), \quad P_S : (H^{1,0}(S))^* \rightarrow J(S)$$

son las proyecciones naturales sobre las respectivas Jacobianas.

Ahora, si bien puede ocurrir que  $H_1(\pi) : H_1(R, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S, \mathbb{Z})$  no es necesariamente sobreyectiva, tenemos que, al ser  $\pi : R \rightarrow S$  de grado finito, el cociente

$$K = H_1(S, \mathbb{Z}) / H_1(\pi)(H_1(R, \mathbb{Z}))$$

es un grupo Abelianiano finito. Consideremos los reticulados

$$\Lambda_1 = \text{Ker}(H^{1,0}(\pi)^*) \cap \Phi_R(H_1(R, \mathbb{Z}))$$

$$\Lambda_2 = \text{Ker}(H^{1,0}(\pi)^*)^\perp \cap \Phi_R(H_1(R, \mathbb{Z}))$$

y los subespacios

$$V_1 = \text{Ker}(H^{1,0}(\pi)^*)$$

$$V_2 = \text{Ker}(H^{1,0}(\pi)^*)^\perp$$

donde la ortogonalidad es tomada respecto a la forma Hermitiana definida en  $(H^{1,0}(R))^*$ . Denotemos por

$$\widetilde{\text{Prym}}(\pi : R \rightarrow S) = P_R(((H^{1,0}(\pi)^*)^{-1}(\Phi_S(H_1(S, \mathbb{Z}))))$$

al núcleo del homomorfismo sobreyectivo de grupo  $J(\pi)$ . Este puede ser no conexo.

**Definición 11.2.1.** — La componente conexa de este subgrupo que contiene a  $0 \in J(R)$  es denotada por

$$\text{Prym}(\pi : R \rightarrow S)$$

y es llamada la **variedad de Prym** del cubrimiento  $\pi : R \rightarrow S$ .



No es difícil ver de lo anterior que

$$\begin{aligned} \text{Prym}(\pi : R \rightarrow S) &= P_R(V_1) \\ &= V_1/\Lambda_1 \end{aligned}$$

Definamos

$$\begin{aligned} \widehat{J(S)} &:= P_R(V_2) \\ &= V_2/\Lambda_2 \end{aligned}$$

Usando los siguientes hechos :

- (i)  $H^{1,0}(\pi)^* : V_2 \rightarrow (H^{1,0}(S))^*$  es un isomorfismo, y
- (ii)  $H^{1,0}(\pi)^*(\Lambda_2)$  es un submódulo de  $\Phi_S(H_1(S, \mathbb{Z}))$  tal que  $\Phi_S(H_1(S, \mathbb{Z}))/H^{1,0}(\pi)^*(\Lambda_2) = K$ ,

obtenemos que

$$\widehat{J(S)}/K = J(S),$$

es decir, que  $\widehat{J(S)}$  es isógena a  $J(S)$ , con núcleo dado por  $K$ .

Por otro lado,  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  generan en  $\Phi_R(H_1(R, \mathbb{Z}))$  un subreticulado  $\Lambda$  del mismo rango. Tenemos que :

- (1) Si  $\Lambda = \Phi_R(H_1(R, \mathbb{Z}))$ , entonces

$$J(R) = \text{Prym}(\pi : R \rightarrow S) \times \widehat{J(S)}$$

lo cual dice que tenemos un isomorfismo de variedades abelianas, donde las polarizaciones en  $\text{Prym}(\pi : R \rightarrow S)$  y  $\widehat{J(S)}$  son las inducidas por la polarización en  $J(R)$ .

- (2) Si  $\Lambda \neq \Phi_R(H_1(R, \mathbb{Z}))$ , entonces

$$J(R) = (\text{Prym}(\pi : R \rightarrow S) \times \widehat{J(S)})/(\Phi_R(H_1(R, \mathbb{Z}))/\Lambda)$$

lo cual dice que  $J(R)$  es isógena al producto

$$\text{Prym}(\pi : R \rightarrow S) \times \widehat{J(S)}$$

con núcleo dado por el grupo abeliano finito  $\Phi_R(H_1(R, \mathbb{Z}))/\Lambda$ .

En particular, cuando  $K = \{0\}$  y  $\Lambda = \Phi_R(H_1(R, \mathbb{Z}))$ , tenemos que

$$J(R) = \text{Prym}(\pi : R \rightarrow S) \times J(S)$$

Lo anterior puede ser visto del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
& H^{1,0}(R)^* = V_1 + V_2 & \\
\Phi_R(H_1(R, \mathbb{Z})) \swarrow & & \searrow \Lambda \\
J(R) & \xrightarrow{\Phi_R(H_1(R, \mathbb{Z}))/\Lambda} & \text{Prym}(\pi : R \rightarrow S) \times \widehat{J(S)} \\
\downarrow J(\pi) & & \downarrow \pi_2 \\
J(S) & \xrightarrow{K} & \widehat{J(S)}
\end{array}$$

donde  $\pi_2 : \text{Prym}(\pi : R \rightarrow S) \times \widehat{J(S)} \rightarrow \widehat{J(S)}$  es la proyección en la segunda coordenada. Es decir, la función  $J(\pi) : J(R) \rightarrow J(S)$  es isógena a la proyección  $\pi_2$ .

**Ejemplo 11.2.2.** — Consideremos  $R$  un toro, es decir una superficie de Riemann de género uno. Tomemos en  $R$  un automorfismo  $\tau : R \rightarrow R$  de orden dos y sin puntos fijos. Sea  $S = R/\tau$  el toro cociente y denotemos por  $\pi : R \rightarrow S$  al cubrimiento holomorfo no ramificado de grado dos inducido por la acción de  $\tau$ . En este caso, podemos escoger una base simpléctica  $\{\alpha, \beta\}$  para  $R$  tal que  $\tau(\alpha) = \alpha$  y  $\tau(\beta) = \beta$ . Escojamos  $\delta = \pi(\alpha)$  y  $\eta = \pi(\beta)$ . Entonces,  $\{\delta, \eta\}$  da una base simpléctica para  $S$ . En este caso,  $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  y  $H^{1,0}(\pi)^*$  es un isomorfismo. Tomemos  $w$  la base dual de  $H^{1,0}(R)$  y  $\theta$  la base dual de  $H^{1,0}(S)$ , respecto a las bases simplécticas anteriores. Denotando por

$$\tau_R = \int_{\beta} w, \quad \tau_S = \int_{\eta} \theta$$

uno obtiene que

$$2\tau_S = \tau_R$$

De esta manera, usando las bases duales  $w^*$  en  $H^{1,0}(R)^*$  y  $\theta^*$  en  $(H^{1,0}(S))^*$ , tenemos que  $H^{1,0}(\pi)^*(x) = x$ . En particular,

$$(H^{1,0}(\pi)^*)^{-1}(\Phi_S(H_1(S, \mathbb{Z}))) = \{n + m\tau_S; n, m \in \mathbb{Z}\} = \{n + (m/2)\tau_R; n, m \in \mathbb{Z}\}$$

es decir,

$$\widetilde{\text{Prym}}(\pi : R \rightarrow S) = \langle p; 2p = 0 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$\text{Prym}(\pi : R \rightarrow S) = \{0\}$$

$$\widehat{J(S)}/K = J(S) = S$$

$$R = J(R) = \widehat{J(S)}$$

**Ejemplo 11.2.3.** — Consideremos una superficie de Riemann  $R$  de género  $g = 2\gamma$  junto a una involución conformal  $\tau : R \rightarrow R$ , es decir un automorfismo conformal de  $R$  de orden dos, tal que  $\tau$  tiene exactamente dos puntos fijos. En este caso,  $S = R/\tau$  es una superficie de Riemann de género  $\gamma$  con exactamente dos puntos de ramificación de orden dos. Denotemos por  $\pi : R \rightarrow S$  el cubrimiento ramificado de grado dos inducido por la acción de  $\tau$ . Podemos escoger una base symplectica de  $R$ , digamos

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g\}$$

y una base symplectica de  $S$ , digamos

$$\{\delta_1, \dots, \delta_\gamma, \eta_1, \dots, \eta_\gamma\}$$

de manera que valen las siguientes igualdades :

$$(1) \ H_1(\pi)(\alpha_j) = H_1(\pi)(\alpha_{\gamma+j}) = \delta_j, \ j = 1, \dots, \gamma;$$

$$(2) \ H_1(\pi)(\beta_j) = H_1(\pi)(\beta_{\gamma+j}) = \eta_j, \ j = 1, \dots, \gamma;$$

Denotemos por  $\{w_1, \dots, w_g\}$  la base dual de  $H^{1,0}(R)$  respecto a  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_g\}$  y por  $\{\theta_1, \dots, \theta_\gamma\}$  a la base dual de  $H^{1,0}(S)$  respecto a la base  $\{\delta_1, \dots, \delta_\gamma\}$ . Igualdad

(1) arriba asegura que

$$(3) \ H^{1,0}(\theta_j) = w_j + w_{\gamma+j}, \ j = 1, \dots, \gamma.$$

Denotemos por  $\tau_{jk} = \tau_{kj} = \int_{\beta_j} w_k$  y por  $s_{jk} = s_{kj} = \int_{\eta_j} \theta_k$ . Entonces las matrices de Riemann de  $R$  y  $S$ , en las bases symplecticas anteriores, son dadas por

$$Z_R = (\tau_{jk}); \quad Z_S = (s_{jk})$$

respectivamente. Igualdad (2) nos da las siguientes igualdades :

$$(4) \ \tau_{j \ \gamma+k} = \tau_{k \ \gamma+j}, \ 1 \leq j \leq k \leq \gamma;$$

$$(5) \ \tau_{j \ \gamma+k} = s_{jk} - \tau_{jk}, \ 1 \leq j \leq k \leq \gamma;$$

$$(6) \ \tau_{\gamma+j \ \gamma+k} = \tau_{jk}, \ 1 \leq j \leq k \leq \gamma.$$

Igualdades (4)-(6) nos dicen que

$$Z_R = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_S - Z_1 \\ Z_S - Z_1 & Z_1 \end{bmatrix}$$

donde  $Z_1$  es submatriz  $\gamma \times \gamma$  de  $Z_R$ .

Identifiquemos  $(H^{1,0}(R))^*$  con  $\mathbb{C}^g$  y  $(H^{1,0}(S))^*$  con  $\mathbb{C}^\gamma$ , de manera que  $\int_{\alpha_j}$  es identificada con el vector canónico  $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , donde el 1 va en la posición  $j \in \{1, \dots, g\}$ , y de manera que  $\int_{\delta_k}$  es identificada con el vector canónico  $E_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , donde el 1 va en la posición  $k \in \{1, \dots, \gamma\}$ . Nuestra función  $H^{1,0}(\pi)^* : (H^{1,0}(R))^* \rightarrow (H^{1,0}(S))^*$  se puede identificar con la función

$$Q : \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C}^\gamma : (x_1, \dots, x_g) \mapsto (x_1 + x_{\gamma+1}, x_2 + x_{\gamma+2}, \dots, x_\gamma + x_{2\gamma})$$

Luego, el núcleo de  $H^{1,0}(\pi)^*$  es identificado con el núcleo  $V_1$  de  $Q$  el cual es generado por los vectores

$$e_1 - e_{\gamma+1}, e_2 - e_{\gamma+2}, \dots, e_\gamma - e_{2\gamma}$$

y luego la intersección del reticulado definido por  $H_1(R, \mathbb{Z})$  se identifica con el reticulado de  $V_1$  generado por los vectores

$$e_1 - e_{\gamma+1}, \dots, e_\gamma - e_{2\gamma}, \tau_1 - \tau_{\gamma+1}, \dots, \tau_\gamma - \tau_{2\gamma},$$

donde  $\tau_j$  representa la columna  $j$ -ésima de  $Z_R$ . En particular, si identificamos  $V_1$  con  $\mathbb{C}^\gamma$  de manera que  $e_j - e_{\gamma+j}$  es identificado con  $E_j$ ,  $j = 1, \dots, \gamma$ , obtenemos que la matriz de Riemann asociada a la variedad  $\text{Prym}(\pi : R \rightarrow S)$  es dada por

$$Z_{\text{Prym}(\pi:R \rightarrow S)} = 2Z_1 - Z_S$$

No es difícil ver que la polarización de  $\text{Prym}(\pi : R \rightarrow S)$  que es inducida por la de  $J(R)$  es dos veces la principal.

En la construcción hecha en el ejemplo anterior, podemos fijar la superficie de Riemann  $S$  y sólo variar sus puntos de ramificación de manera que ellos tienden a ser el mismo punto  $p \in S$ . En esta degeneración, la superficie  $R$  tiende a una superficie estable con exactamente un nodo que divide esta en dos superficies, cada una de ellas siendo equivalente holomorficamente a la superficie  $S - \{p\}$ . Esta degeneración hace que la matriz  $Z_R$  tienda a una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

es decir,  $Z_1$  tiende a la matriz  $Z_S$  y, en particular,  $Z_{\text{Prym}(\pi:R \rightarrow S)} = 2Z_1 - Z_S$  tiende a  $Z_S$ . Esto dice que  $Z_S$  vive en la clausura de las matrices  $Z_{\text{Prym}(\pi:R \rightarrow S)}$  en el espacio de Siegel  $\mathcal{H}_\gamma$ . Si denotamos por  $Jac$  el sublocus de  $\mathcal{H}_\gamma$  que consiste de las matrices de Riemann de las superficies de Riemann de género  $\gamma$ , entonces usando el hecho que para  $\gamma \in \{2, 3\}$  vale que  $Jac$  es un abierto de  $\mathcal{H}_\gamma$ , obtenemos la siguiente observación :

**Observación 11.2.4.** — Para  $\gamma = 2, 3$  tenemos que infinitas variedades de Prym son en efecto jacobianas de superficies de Riemann.

### 11.3. Automorfismos de superficies de Riemann y Jacobianas

Supongamos ahora que  $f : S \rightarrow S$  es un automorfismo holomorfo/antiholomorfo de la superficie de Riemann  $S$ . Este automorfismo induce un automorfismo

$$J(f) : J(S) \rightarrow J(S)$$

en  $J(S)$  que es holomorfo (respectivamente, antiholomorfo) si  $f$  es holomorfo (respectivamente, antiholomorfo) que es dada tal que

$$Q_f = H^{-1}J(f)H : Pic^0(S) \rightarrow Pic^0(S)$$

es dada por

$$Q_\tau(p_1 + \dots + p_g - q_1 - \dots - q_g) = f(p_1) + \dots + f(p_g) - f(q_1) - \dots - f(q_g)$$

Dada una base simpléctica para  $S$ , digamos  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ , uno puede representar la acción de  $f$  a nivel de la homología  $H_1(S, \mathbb{Z})$  por una matriz simpléctica (extendida)  $A_f \in \widetilde{\text{Sp}}(2g, \mathbb{Z})$ , donde

$$\widetilde{\text{Sp}}(2g, \mathbb{Z}) = \{N \in \text{GL}(2g, \mathbb{Z}) : {}^t N J N = \pm J\},$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}.$$

Más aún, si denotamos por  $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$  el grupo simpléctico, el subgrupo de índice dos de  $\widetilde{\text{Sp}}(2g, \mathbb{Z})$  de matrices  $N$  tales que  ${}^t N J N = J$ , entonces tenemos que  $A_f \in \text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$  si y sólo si  $f$  es holomorfo. Esto es debido al hecho que la forma de intersección se preserva por automorfismos que preservan la orientación y es revertida por automorfismos que revierten la orientación.

Denotemos por  $Z \in \mathcal{H}_g$  la matriz de Riemann de  $S$  en la base simpléctica escogida. Supongamos que la matriz  $A_f$  es dada por

$$A_f = \begin{bmatrix} U & V \\ W & L \end{bmatrix},$$

entonces debemos tener que

(1) Si  $f$  es holomorfo, entonces :

$$(U + ZW)^{-1} (V + ZL) = Z,$$

(2) Si  $f$  es antiholomorfo, entonces :

$$(U + \bar{Z}W)^{-1} (V + \bar{Z}L) = Z.$$

Ahora, supongamos que cambiamos la base simpléctica  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g\}$  por una nueva base simpléctica  $\{\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_g, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_g\}$ . Es decir, escogemos una matriz simpléctica

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix},$$

satisfaciendo

$$(\alpha\beta)Q = (\tilde{\alpha}\tilde{\beta})$$

donde  $\alpha = (\alpha_1 \cdots \alpha_g)$ ,  $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1 \cdots \tilde{\alpha}_g)$ ,  $\beta = (\beta_1 \cdots \beta_g)$  and  $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1 \cdots \tilde{\beta}_g)$ . Entonces la matriz del automorfismo  $f$  en esta nueva base es dada por

$$Q^{-1} A_f Q.$$

Ahora, si  $\{w_1, \dots, w_g\}$  es la base dual a  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_g\}$ , entonces la base dual a la nueva base simpléctica es dada por  $\{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_g\}$ , donde

$$(Q_{11} + ZQ_{21})^{-1} w = \tilde{w}$$

para  $w = {}^t(w_1 \cdots w_g)$  y  $\tilde{w} = {}^t(\tilde{w}_1 \cdots \tilde{w}_g)$ . En particular, la matriz de Riemann de la superficie en la nueva base es dada por

$$\tilde{Z} = Q(Z) = (Q_{11} + ZQ_{21})^{-1} (Q_{12} + ZQ_{22})$$

Como aplicación de esto es que si  $A, Q$  son matrices simplécticas y  $Z$  es matriz de Siegel fija por  $A$ , entonces  $Q(Z)$  es matriz fija por  $Q^{-1}AQ$ .

#### 11.4. Superficies de Klein y Jacobianas

Consideremos una superficie de Klein compacta  $R$ , posiblemente con borde. Tomemos su cubrimiento doble orientable  $P : S \rightarrow R$ , donde  $S$  es ahora una superficie de Riemann compacta sin borde, la cual asumiremos es de género  $g \geq 1$  (este valor es también llamado el género algebraico de  $R$ ). Además, existe una involución antiholomorfo  $\tau : S \rightarrow S$ , actuando con puntos fijos sólo si  $R$  tiene borde, tal que  $\tau$  genera el grupo de cubrimiento de  $P$ .

Cada componente del conjunto de puntos fijos de  $\tau$  es una geodésica simple cerrada, llamada un **óvalo** de  $\tau$ , y la cantidad de esos óvalos es :

- (i)  $\emptyset$  si  $\partial R = \emptyset$ ; ó
- (ii)  $k$  si  $\#\partial R = k$ .

Denotemos por  $Z \in \mathcal{H}_g$  la matriz de Riemann de  $S$  en la base simpléctica escogida. Supongamos que la matriz  $\hat{\tau}$  es dada por

$$\hat{\tau} = \begin{bmatrix} U & V \\ W & L \end{bmatrix},$$

entonces debemos tener que

$$(U + \bar{Z}W)^{-1} (V + \bar{Z}L) = Z.$$

**Caso 1 :** Supongamos que  $\tau : S \rightarrow S$  actúa sin puntos fijos y que  $g$  es par. Entonces es posible escoger la base simpléctica de manera que para  $k = 1, \dots, \frac{g}{2}$  valga

- (a)  $\tau(\alpha_k) = \alpha_{\frac{g}{2}+k}$ ,
- (b)  $\tau(\beta_k) = -\beta_{\frac{g}{2}+k}$ .

En tal base, tenemos que

$$\hat{\tau} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & -I & 0 \end{bmatrix},$$

donde  $I$  y  $0$  representan las matrices identidad y nula de tamaño  $\frac{g}{2} \times \frac{g}{2}$ . Así, la matriz  $Z$  debe ser de la forma  $Z = X + iY$ , donde

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & -x_1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_1 \end{bmatrix},$$

donde valen las siguientes igualdades entre las matrices de tamaño  $\frac{g}{2} \times \frac{g}{2}$  :

$${}^t x_1 = x_1, \quad {}^t x_2 = -x_2, \quad {}^t y_1 = y_1, \quad {}^t y_2 = y_2.$$

**Caso 2 :** Supongamos que  $\tau : S \rightarrow S$  actúa sin puntos fijos y que  $g$  es impar. Entonces es posible escoger la base simpléctica de manera valga

- (a)  $\tau(\alpha_k) = \alpha_{\frac{g-1}{2}+k}$ , para  $k = 1, \dots, \frac{g-1}{2}$
- (b)  $\tau(\beta_k) = -\beta_{\frac{g-1}{2}+k}$ , para  $k = 1, \dots, \frac{g-1}{2}$
- (c)  $\tau(\alpha_g) = \alpha_g$
- (d)  $\tau(\beta_g) = -\beta_g$

En tal base, tenemos que

$$\widehat{\tau} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

donde  $I$  es la matriz identidad de tamaño  $\frac{g-1}{2} \times \frac{g-1}{2}$ . Así, la matriz  $Z$  debe ser de la forma  $Z = X + iY$ , donde

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_2 & -x_1 & -x_3 \\ {}^t x_3 & -{}^t x_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & y_1 & y_3 \\ {}^t y_3 & {}^t y_3 & y_6 \end{bmatrix},$$

donde

$${}^t x_1 = x_1, \quad {}^t x_2 = -x_2, \quad {}^t y_1 = y_1, \quad {}^t y_2 = y_2,$$

son matrices de tamaño  $\frac{g-1}{2} \times \frac{g-1}{2}$ , y además  $y_3 > 0$ .

**Caso 3 :** Supongamos que  $\tau : S \rightarrow S$  actúa con puntos fijos y que estos dividen  $S$ . En este caso, si  $k$  denota la cantidad de componentes conexas de puntos fijos de  $\tau$ , entonces  $g = 2\gamma + k - 1$ . Entonces es posible escoger la base simpléctica de manera valga

- (a)  $\tau(\alpha_t) = \alpha_{\gamma+t}$ , para  $t = 1, \dots, \gamma$
- (b)  $\tau(\beta_t) = -\beta_{\gamma+t}$ , para  $t = 1, \dots, \gamma$
- (c)  $\tau(\alpha_{2\gamma+u}) = \alpha_{2\gamma+u}$ , para  $u = 1, \dots, g - 2\gamma$
- (d)  $\tau(\beta_{2\gamma+u}) = -\beta_{2\gamma+u}$ , para  $u = 1, \dots, g - 2\gamma$

En tal base, tenemos que

$$\widehat{\tau} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_2 \end{bmatrix},$$

donde  $I$  es la matriz identidad de tamaño  $\gamma \times \gamma$  y la matriz  $I_2$  es la matriz de tamaño  $(g - 2\gamma) \times (g - 2\gamma)$ . Así, la matriz  $Z$  debe ser de la forma  $Z = X + iY$ , donde

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_2 & -x_1 & -x_3 \\ {}^t x_3 & -{}^t x_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & y_1 & y_3 \\ {}^t y_3 & {}^t y_3 & y_6 \end{bmatrix},$$

donde

$${}^t x_1 = x_1, {}^t x_2 = -x_2, {}^t y_1 = y_1, {}^t y_2 = y_2,$$

son matrices de tamaño  $\gamma \times \gamma$ , y además  ${}^t y_6 = y_6$  es una matriz tamaño  $(g - 2\gamma) \times (g - 2\gamma)$ .

**Caso 4 :** Supongamos que  $\tau : S \rightarrow S$  actúa con puntos fijos y que estos no dividen  $S$ . En este caso, si  $k$  denota la cantidad de componentes conexas de puntos fijos de  $\tau$ , entonces  $g = 2\gamma + k + l$ , para cierto  $l \geq 2$ . Entonces es posible escoger la base simpléctica de manera valga

- (a)  $\tau(\alpha_t) = \alpha_{\gamma+t}$ , para  $t = 1, \dots, \gamma$
- (b)  $\tau(\beta_t) = -\beta_{\gamma+t}$ , para  $t = 1, \dots, \gamma$
- (c)  $\tau(\alpha_{2\gamma+u}) = \alpha_{2\gamma+u}$ , para  $u = 1, \dots, g - 2\gamma$
- (d)  $\tau(\beta_{2\gamma+u}) = -\beta_{2\gamma+u}$ , para  $u = 1, \dots, g - 2\gamma$

En tal base, tenemos que

$$\widehat{\tau} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_2 \end{bmatrix},$$

donde  $I$  es la matriz identidad de tamaño  $\gamma \times \gamma$  y la matriz  $I_2$  es la matriz de tamaño  $(g - 2\gamma) \times (g - 2\gamma)$ . Así, la matriz  $Z$  debe ser de la forma  $Z = X + iY$ , donde

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_2 & -x_1 & -x_3 \\ {}^t x_3 & -{}^t x_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & y_1 & y_3 \\ {}^t y_3 & {}^t y_3 & y_6 \end{bmatrix},$$

donde

$${}^t x_1 = x_1, {}^t x_2 = -x_2, {}^t y_1 = y_1, {}^t y_2 = y_2,$$

son matrices de tamaño  $\gamma \times \gamma$ , y además  ${}^t y_6 = y_6$  es matriz tamaño  $(g - 2\gamma) \times (g - 2\gamma)$ .

PROBLEMAS. —

- 1.- Sea  $\tau$  una involución anti-holomorfa de la superficie de Riemann  $S$ , de género  $g$ . verifique las siguientes.
  - (i) Cada componente de puntos fijos de  $\tau$  es una curva simple cerrada.
  - (ii) Dos ovals diferentes de  $\tau$  son disjuntos.
  - (iii) Cada óvalo de  $\tau$  es una geodésica de  $S$  (en la métrica esférica si  $g = 0$ , la métrica Euclidiana si  $g = 1$  ó la métrica hiperbólica si  $g \geq 2$ ).
  - (iv) Si  $k_\tau$  denota el número de óvalos de  $\tau$ , entonces  $k_\tau \in \{0, 1, \dots, g-1\}$ .
- 2.- Sea  $\tau$  una involución anti-holomorfa de la superficie de Riemann  $S$ . Verificar que  $J(\tau) : J(S) \rightarrow J(S)$  actúa sin puntos fijos si y sólo si  $\tau : S \rightarrow S$



actúa sin puntos fijos. En caso que  $\tau$  tiene  $k \geq 1$  óvalos, se tiene que el número de componentes de puntos fijos de  $J(\tau)$  es  $2^{k-1}$ , cada componente un toro real  $g$ -dimensional.

### 11.5. Cubrimiento homológico de superficies de Klein

Dado un grupo Kleiniano planar  $G$  y una colección invariante  $\Delta$  de componentes de  $\Omega(G)$ , uno puede construir el espacio cociente  $\Delta/G$  formada por las clases de equivalencia de las órbitas por  $G$  de los puntos de  $\Delta$ . Si  $G$  actúa sin puntos fijos, es decir, para todo  $p \in \Delta$  se tiene que  $G_p = \{I\}$ , entonces  $\Delta/G$  es una superficie de Klein. Si además  $G$  sólo contiene transformaciones de Möbius, entonces esta es una superficie de Riemann. En el caso que  $G$  actúe con puntos fijos, entonces obtendremos superficies reales con posible borde tal que fuera de la proyección de los puntos fijos de elementos no triviales de  $G$  es una superficie de Klein, llamadas **orbifolds de Klein**.

Tomemos una superficie de Klein  $S$ , digamos  $S = \Delta/G$  donde  $G$  es algún grupo Kleiniano planar, donde  $\Delta$  es alguna componente invariante de  $\Omega(G)$  (es decir,  $(G, \Delta)$  es un grupo uniformizante), actuando si puntos fijos sobre  $\Delta$ . Consideremos el subgrupo  $[G, G]$  de  $G$  generado por los conmutadores de  $G$ . Como  $[G, G]$  es un subgrupo normal de  $G$ , entonces  $\Omega([G, G]) = \Omega(G)$  y en particular podemos considerar la superficie de Klein  $S^{ab} = \Delta/[G, G]$ . Como  $[G, G]$  consiste sólo de transformaciones de Möbius,  $S^{ab}$  es una superficie de Riemann.

**Definición 11.5.1.** — Diremos que  $S^{ab}$  es el **cubrimiento homológico** asociado a  $G$  de  $S$ .

**Ejemplo 11.5.2.** — Si escogemos  $S$  una superficie de Riemann de género  $g \geq 2$ , entonces podemos escoger  $G$  como un grupo Fuchsiano dejando invariante el círculo unitario y  $\Delta$  el disco abierto unitario. En este caso,  $G/[G, G]$  es isomorfo al grupo de homología sobre  $\mathbb{Z}$  de  $S$ , es decir,  $\oplus^{2g}\mathbb{Z}$ . El cubrimiento homológico  $S^{ab}$  corresponde a mirar una incrustación holomorfa

$$i_q : S \rightarrow J(S) : p \rightarrow \left[ \int_q^p \right],$$

donde  $q \in S$ , y levantar  $i_q(S)$  al cobertor universal de la variedad jacobiana  $J(S)$  de  $S$ , es decir, al dual de las diferenciales holomorfas de  $S$ .

El teorema de Torelli dice que  $J(S)$  determina, modulo equivalencia holomorfo la superficie  $S$ . Un resultado relacionado probado por B. Maskit [57] es el siguiente :

**Teorema 11.5.3.** — Si  $G$  es un grupo Fuchsiano de la primera clase, sin torsión, entonces  $G$  está únicamente determinado por  $[G, G]$ .

En el caso más general, se ha probado en una serie de trabajos (por ejemplo, [31] [32]) que el anterior es válido para grupos Kleinianos planares más generales, por ejemplo :

**Teorema 11.5.4.** — *Si  $G$  es un grupo uniformizante, sin torsión, con un número infinito de puntos límites, entonces  $G$  está únicamente determinado por  $[G, G]$ .*

Para demostrar este resultado, necesitaremos algunos preliminares.

**Lema 11.5.5.** — [21] *Sea  $S$  una superficie analíticamente finita de signatura  $(g, k)$  y  $H(S)$  el espacio vectorial complejo generado por las 1-formas holomorfas en  $\bar{S}$  y las 1-formas holomorfas en  $S$  con a lo más polos simples en los puntos removidos. Entonces la dimensión de  $H(S)$  es dada por*

$$\dim_{\mathbb{C}} H(S) = \begin{cases} 2g, & \text{si } k = 0 \\ 2g + k - 1, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La función bilineal

$$(w, \alpha) \in H(S) \times H_1(S, \mathbb{C}) \rightarrow \int_{\alpha} w \in \mathbb{C}$$

define una dualidad entre  $H(S)$  y  $H_1(S, \mathbb{C})$ .

Sea  $(G, \Delta)$  un grupo uniformizante finitamente generado sin torsión y non-elemental. Denotemos por  $K$  su subgrupo generado por sus conmutadores. Asuma que tenemos un subgrupo de índice finito  $I < G$  en  $G$ , conteniendo  $K$ . En este caso, tenemos una sucesión finita de cubrimientos holomorfos

$$r : \Delta \rightarrow \Delta/K;$$

$$t : \Delta/K \rightarrow \Delta/I;$$

$$p : \Delta/I \rightarrow \Delta/G.$$

También tenemos los respectivos cubrimientos a nivel de la variedades 3-dimensionales (con borde) :

$$R : \widehat{\Delta} \rightarrow \widehat{\Delta}/K;$$

$$T : \widehat{\Delta}/K \rightarrow \widehat{\Delta}/I;$$

$$P : \widehat{\Delta}/I \rightarrow \widehat{\Delta}/G,$$

donde  $\widehat{\Delta} = \Delta \cup \mathbb{H}^3$ .

Consideremos el homomorfismo inducido a nivel del primer grupo de homología con coeficientes complejos :

$$H_1(P) : H_1(\widehat{\Delta}/I, \mathbb{C}) \rightarrow H_1(\widehat{\Delta}/G, \mathbb{C}).$$

Como el índice de  $I$  en  $G$  es finito, el cubrimiento  $P : \widehat{\Delta}/I \rightarrow \widehat{\Delta}/G$  tiene grado finito y, en particular,  $H_1(P)$  es un homomorfismo sobreyectivo. Más aún,

sabemos que su núcleo está generado por aquellas curvas cerradas en  $\widehat{\Delta}/I$  que se levantan en curvas cerradas en  $\widehat{\Delta}/K$ . Tenemos las siguientes inclusiones :

$$\begin{aligned} i_{\Delta} : \Delta &\hookrightarrow \widehat{\Delta}; \\ i_K : \Delta/K &\hookrightarrow \widehat{\Delta}/K; \\ i_I : \Delta/I &\hookrightarrow \widehat{\Delta}/I; \\ i_G : \Delta/G &\hookrightarrow \widehat{\Delta}/G. \end{aligned}$$

Los homomorfismos inducidos al nivel de homología con coeficientes complejos son sobreyectivos. Denotemos sus respectivos núcleos por  $N_{\Delta} = H_1(\Delta, \mathbb{C})$ ,  $N_K = \ker H_1(i_K) < H_1(\Delta/K, \mathbb{C})$ ,  $N_I = \ker H_1(i_I) < H_1(\Delta/I, \mathbb{C})$  and  $N_G = \ker H_1(i_G) < H_1(\Delta/G, \mathbb{C})$ . We have that  $H_1(r)(N_{\Delta}) < N_K$ ,  $H_1(t)(N_K) < N_I$ ,  $H_1(p)(N_I) < N_G$ . Consideremos el homomorfismo inducido en el cociente  $H_1(p) : H_1(\Delta/I, \mathbb{C})/N_I \rightarrow H_1(\Delta/G, \mathbb{C})/N_G$ . Tenemos por lo anterior que el núcleo de homomorfismo sobreyectivo inducido está generado por aquellas curvas cerradas en  $\Delta/I$  que se levantan en curvas cerradas en  $\Delta/K$ .

Denotemos por  $N_I^t$  (respectivamente,  $N_G^t$ ) el subespacio de  $H(\Delta/I)$  (respectivamente,  $H(\Delta/G)$ ) ortogonal a  $N_I$  (respectivamente,  $N_G$ ). La función  $p^* : N_G^t \rightarrow N_I^t$ , definida por el pull-back de 1-formas, es dual al monomorfismo sobreyectivo anterior y, en particular, este es inyectivo. La imagen  $P^*(N_G^t)$  corresponde a aquellas 1-formas en  $N_I^t$  las cuales son puntos fijos para el pull-back de cada transformación en  $G/I$  (un grupo abeliano). Lo siguiente no es difícil de verificar.

**Lema 11.5.6.** — *La dimensión de  $N_G^t$  es la misma dimensión del espacio cociente  $H_1(\widehat{\Delta}/G, \mathbb{C})$ , es decir, igual a  $\dim_{\mathbb{C}} H(\Delta/G) - l$ , donde  $l$  denota el número máximo de curvas cerradas simples homológicamente independientes en  $\Delta/G$  que se levantan en curvas cerradas en  $\Delta$ . Similarmente para la dimensión de  $N_I^t$ .*

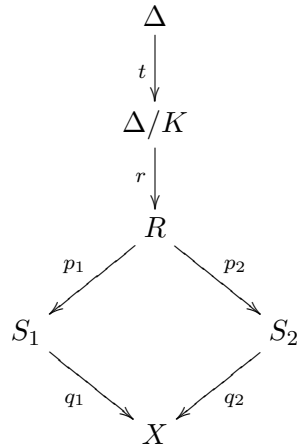
**Demostración del Teorema 11.5.4.** — Consideremos dos grupos uniformizantes no-elementales, finitamente generados y sin torsión  $(G_1, \Delta_1)$  y  $(G_2, \Delta_2)$  tales que  $[G_1, G_1] = [G_2, G_2] = K$ . Queremos probar que  $G_1 = G_2$ . Sean  $I = G_1 \cap G_2$  y  $J = \langle G_1, G_2 \rangle$ . Ya que  $K$  es non-elemental y normal en ambos  $G_1$  y  $G_2$ , tenemos que la región de discontinuidad de los tres es el mismo por la Proposición 7.10.5.

Denotemos a tal región de discontinuidad por  $\Omega$ . Similarmente, ya que  $J$  es un subgrupo del normalizador de  $K$ , tenemos necesariamente que  $J$  es un grupo Kleiniano planar con  $\Omega$  como región de discontinuidad. El teorema de finitud de Ahlfors asegura que  $\Omega/G_1$  y  $\Omega/G_2$  son cada uno una unión finita de superficies de Riemann de área hiperbólica finita. Se sigue que el cubrimiento (posiblemente ramificado)  $\Omega/G_i \rightarrow \Omega/J$  tiene grado finito, esto es, ambos  $G_1$  y  $G_2$  tienen índice finito en  $J$  y, en particular, tenemos que  $I$  tiene índice finito en  $G_1$ ,  $G_2$  y  $J$ . Se sigue de la Proposición 7.10.5, que  $I$  tiene a  $\Omega$  como región de discontinuidad.

**Lema 11.5.7.** — Existe una componente invariante común  $\Delta$  para  $G_1$  y  $G_2$ .

*Demonstración.* — si  $\Delta_1 = \Delta_2$ , entonces estamos listos y  $\Delta = \Delta_1$ . Supongamos que  $\Delta_1 \neq \Delta_2$ . En este caso,  $I$  deja invariante ambas componentes  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$ . Como  $I$  tiene índice finito en  $G_i$ , tenemos que  $I$  es finitamente generado. Se sigue de [58] que  $I$  es entonces un grupo casifuchsiano (es decir, su conjunto límite es una curva de Jordan) y, como consecuencia,  $\Omega = \Delta_1 \cup \Delta_2$ . Así,  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  son invariantes por ambos  $G_1$  y  $G_2$ . En particular, podemos tomar  $\Delta = \Delta_1$ . □

Usemos la siguiente notación :  $\Delta/I = R$ ,  $\Delta/G_1 = S_1$ ,  $\Delta/G_2 = S_2$ ,  $\Delta/J = X$ . Denotemos por  $t : \Delta \rightarrow \Delta/K$ ,  $r : \Delta/K \rightarrow R$  y  $p_i : R \rightarrow S_i$ ,  $i = 1, 2$ , los cubrimientos holomorfos naturales inducidos por los grupos  $K$ ,  $I/K$  y  $G_i/I$ , respectivamente. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo :



Tenemos que los homomorfismos sobreyectivos inducidos  $H_1(p_j) : H_1(R, \mathbb{C})/N_I \rightarrow H_1(S_j, \mathbb{C})/N_{G_j}$ , for  $j = 1, 2$ , tienen el mismo núcleo (el espacio generado por aquellas curvas cerradas en  $R$  que se levantan en curvas cerradas en  $\Delta/K$ ). De aquí obtenemos que las 1-formas en  $N_I^t$  invariantes por  $G_1/I$  son las mismas que son invariantes por  $G_2/I$  y, en particular, las mismas que son invariantes por el grupo generado por  $G_1/I$  y  $G_2/I$ . Esto es, las dimensiones de esos tres espacios es la misma. Ahora, Lema 11.5.6 dice que la dimensión del espacio de formas invariantes por  $G_j$  (respectivamente, el grupo generado por  $G_1/I$  y  $G_2/I$ ) es igual a  $\dim H(S_j) - l_j$  (respectivamente,  $\dim H(X) - l$ ), donde  $l_j$  (respectivamente,  $l$ ) denota el número maximal de curvas cerradas simples homológicamente independientes dos a dos disjuntas en  $S_j$  (respectivamente, en  $X$ ) que se levantan en curvas cerradas en  $\Delta$  (módulo potencias finitas en el caso de  $X$ ). En particular, tenemos las igualdades

$$(*) \quad \dim_{\mathbb{C}} H(S_j) - l_j = \dim_{\mathbb{C}} H(X) - l.$$

Denotemos por  $g_j$  (respectivamente,  $g$ ) el género de  $S_j$  (respectivamente,  $X$ ) y por  $k_j$  (respectivamente,  $k$ ) el número de pinchaduras de  $S_j$  (respectivamente,  $X$ ). Tenemos necesariamente que

- (1)  $g \leq g_i$
- (2)  $k \leq k_i$
- (3)  $g - l \leq g_i - l_i$

Desigualdades (1) y (2) son claras. Para ver (3), uno debe considerar un conjunto maximal  $\Sigma$  de curvas cerradas simples, dos a dos disjuntas y homológicamente independientes en  $X$ , cada una de ellas levantándose en curvas cerradas en  $\Delta$ . Sea  $\tilde{\Sigma}_i$  el levantamiento de  $\Sigma$  a  $S_i$ . Tenemos que  $\tilde{\Sigma}_i$  es una colección de curvas cerradas simples, dos a dos disjuntas, que se levantan en curvas cerradas en  $\Delta$ . Procedamos a cortar ambas  $X$  y  $S_i$  a lo largo de esas curvas cerradas. Ahora pegamos discos cerrados a lo largo de los nuevos bordes. Aún tenemos un cubrimiento (quizás ramificado) sin nuevas ramificaciones (consecuencia del levantamiento de las curvas cerradas de  $\Sigma$ ). El género de la nueva superficie obtenida en esta manera de  $X$  es  $g - l$ . La suma de los géneros de las nuevas superficies obtenidas de  $S_i$  es a lo más  $g_i - l_i$ . Ahora, desigualdad (3) es consecuencia de comparación de áreas. Las desigualdades (1), (2) y (3) juntas con la igualdad (\*) da las igualdades

$$g = g_i, \quad k = k_i \quad \text{and} \quad l = l_i.$$

Obtenemos en esta manera que el índice de  $G_j$  en  $J$  es 1 y, en consecuencia,  $G_1 = G_2$ .

□

PROBLEMAS. —

- 1.- Ver que el Teorema 11.5.4 no es válido en presencia de torsión.
- 2.- Ver que el Teorema 11.5.4 no es válido en mayores dimensiones.



## CAPÍTULO 12

### GRUPOS DE SCHOTTKY PLANARES

En este capítulo nos concentraremos en aquellos grupos Kleinianos que inducen los cubrimientos regulares planares más cercanos a las superficies de Riemann cerradas.

#### 12.1. Cubrimientos regulares planares

**Definición 12.1.1.** — Un cubrimiento regular planar de una superficie de Riemann  $S$  es un triple

$$(\Delta, G, P : \Delta \rightarrow S),$$

donde  $G < \mathbb{M}^2$  es un grupo Kleiniano,  $\Delta \subset \Omega(G)$  es una componente conexa de su región de discontinuidad que además es invariante bajo la acción de  $G$  y  $P : \Delta \rightarrow S$  es un cubrimiento definido por la acción de  $G$  sobre  $\Delta$ , es decir,  $P$  es cubrimiento y vale que  $P(x) = P(y)$  sí y sólo si existe  $\gamma \in G$  tal que  $\gamma(x) = y$ .

Como consecuencia del teorema de uniformización, tenemos que toda superficie de Riemann  $S$  posee cubrimientos regulares planares. Por ejemplo, el cubrimiento universal nos provee de un tal cubrimiento. Sabemos, de topología que todo cubrimiento de una superficie  $S$  es definido, módulo equivalencia de cubrimientos, por un subgrupo del grupo fundamental de  $S$ . Para obtener regularidad tal subgrupo debe ser normal. Luego, no es difícil ver que toda superficie de Riemann posee muchos cubrimientos regulares, algunos de ellos no planares. En [56] puede encontrarse el siguiente teorema de planaridad, el cual permite obtener todos los cubrimientos planares regulares de una superficie de Riemann.

**Teorema 12.1.2 (Teorema de la planaridad).** — Sea  $(\Delta, G, P : \Delta \rightarrow S)$  un cubrimiento regular planar de la superficie de Riemann  $S$ . Supongamos que  $S$  tiene tipo topológico finito, es decir,  $S$  es topológicamente equivalente al interior de una superficie compacta con posible borde. Entonces es posible encontrar un número finito de curvas simples cerradas en  $S$ , digamos  $\{\alpha_j : j \in J\}$ , de manera que ellas son dos a dos disjuntas y homotópicamente independientes (luego,

ninguna de ellas homotópicamente trivial) y existen valores enteros  $a_j \geq 1$ , para cada  $j \in J$ , de manera que el cubrimiento anterior es definido por el subgrupo normal más pequeño del grupo fundamental de  $S$  que contiene (homotópicamente) las potencias  $\{\alpha_j^{a_j} : j \in J\}$ .

Con la ayuda del teorema anterior uno puede hacer una clasificación de los cubrimientos de toda superficie de Riemann cerrada  $S$  ó analíticamente finita.

**Definición 12.1.3.** — Supongamos que tenemos dos cubrimientos regulares planares, digamos

$$(\Delta_1, G_1, P_1 : \Delta_1 \rightarrow S), (\Delta_2, G_2, P_2 : \Delta_2 \rightarrow S).$$

Diremos que el cubrimiento  $(\Delta_1, G_1, P_1 : \Delta_1 \rightarrow S)$  se factoriza a través del cubrimiento  $(\Delta_2, G_2, P_2 : \Delta_2 \rightarrow S)$  si existe una función sobreyectiva  $Q : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$  tal que  $P_1 = P_2 Q$ . En caso que  $Q$  sea un homeomorfismo, diremos que ambos cubrimientos son equivalentes

**Ejercicio 6.** — Verificar que la función  $Q : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$  es de hecho un cubrimiento.

**Definición 12.1.4.** — Un cubrimiento regular planar  $(\Delta, G, P : \Delta \rightarrow S)$  es dicho ser más cercano a  $S$  si no es posible factorizarlo a través de otro de manera no trivial.

Como consecuencia del teorema de la planaridad tenemos el siguiente.

**Corolario 12.1.5.** — Si  $S$  es una superficie de Riemann cerrada de género  $g \geq 1$ , entonces los cubrimientos planares más cercanos a  $S$  son aquellos que se definen por medio de  $g$  curvas simples cerradas, digamos  $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ , que son homotópicamente independientes; es decir, definidos por el subgrupo normal más pequeño del grupo fundamental de  $S$  que contenga  $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ .

PROBLEMAS. —

- 1.- Verificar el Corolario 12.1.5.

## 12.2. Grupos de Schottky (planares)

Una buena referencia para esta sección es [19], [56].



**Definición 12.2.1.** — Consideremos una colección de  $2g$  (donde  $g \geq 1$ ) curvas simples cerradas en la esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$ , digamos  $C_1, \dots, C_g, C'_1, \dots, C'_g$ , de manera que ellas acotan un dominio  $\mathcal{D}$  de conectividad  $2g$ . Supongamos que existen transformaciones de Möbius  $A_1, \dots, A_g$  tales que para cada  $k \in \{1, \dots, g\}$  vale que :

- (1)  $A_k(C_k) = C'_k$ ;
- (2)  $A_k(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D} = \emptyset$ ,

entonces el grupo  $G$  de transformaciones de Möbius generado por  $A_1, \dots, A_g$  es llamado un **grupo de Schottky** de género  $g$ . Las curvas  $C_1, \dots, C'_g$  son llamadas un **sistema fundamental de curvas** asociadas a los **generadores de Schottky**  $A_1, \dots, A_g$ .

Si  $G$  es un grupo de Schottky de género  $g$ , entonces tenemos (ver el ejercicio anterior) que  $\Omega(G)/G$  es una superficie de Riemann de género  $g$ . El siguiente resultado de Koebe [44] dice que el recíproco es verdad.

**Teorema 12.2.2 ( Teorema de Retroseccion de Koebe).** — Sea  $S$  una superficie de Riemann de género  $g \geq 1$ . Entonces existe un grupo de Schottky  $G$  de género  $g$  tal que  $\Omega(G)/G$  es holomórficamente equivalente a  $S$

*Idea de la demostración.* — Una de las demostraciones de este teorema utiliza las herramientas de funciones casiholomorfas [12]. La idea es partir con un grupo de Schottky de género  $g$ , digamos  $K$  y luego considerar conjugadas de  $K$  por homeomorfismos de la esfera de Riemann de manera que sigamos obteniendo grupos de Möbius. Entonces estas conjugadas son otra vez grupos de Schottky de género  $g$ . La manera de escoger el homeomorfismo adecuado es tomar un difeomorfismo  $f : \Omega(K)/K \rightarrow S$  y considerar su diferencial de Beltrami dada por  $\mu = \partial_{\bar{z}}f/\partial_zf$  en coordenadas locales. Luego levantamos la diferencial  $\mu$  a todo  $\Omega(K)$  de manera que sea invariante por la acción de  $K$ . La teoría de aplicaciones casiholomorfas asegura la existencia de un homeomorfismo  $F : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  cuyo diferencial de Beltrami es esta  $\mu$  levantada a  $\Omega(K)$ . Luego  $FKF^{-1}$  es el grupo de Schottky buscado.

Otra demostración, debida a Koebe, es constructiva y es esencialmente como sigue. Uno considera en la superficie  $S$  una colección  $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ , de curvas cerradas simples homológicamente independientes (es decir,  $S - \{\alpha_1, \dots, \alpha_g\}$  es topológicamente una esfera con  $2g$  discos cerrados removidos, dos a dos con disjuntos. Observemos que  $S - \{\alpha_1, \dots, \alpha_g\}$  es parecida a la región  $\mathcal{D}$  en la definición de grupo de Schottky). Ahora uno procede a pegar copias de la clausura de  $S - \{\alpha_1, \dots, \alpha_g\}$  (topológicamente una esfera con  $2g$  discos abiertos removidos, dos a dos con clausuras disjuntas) de manera de obtener una región planar  $\Sigma$  (toda curva simple cerrada en ella divide). Topológicamente hemos construido un grupo de Schottky. Ahora uno tiene un cubrimiento Galois topológico de  $S$  por esta superficie planar  $\Sigma$  con grupo de cubrimiento un grupo libre de rango

*g.* Ahora levantamos la estructura de superficie de Riemann de  $S$  para dotar a  $\Sigma$  de una estructura de superficie de Riemann planar de manera que el grupo libre anterior es un grupo de automorfismos holomorfos de ella. Usando el teorema de planaridad [56] uno obtiene el grupo de Schottky deseado. En el lenguaje moderno, la construcción hecha es considerar el grupo fundamental de  $S$ ,  $\pi_1(S, p) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g : \prod_{j=1}^g [\alpha_j, \beta_j] = 1 \rangle$ , donde  $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ , y escoger el subgrupo normal más pequeño que contenga las palabras  $\beta_1, \dots, \beta_g$ , digamos  $F$ . Entonces  $F$  uniformiza la región de discontinuidad de un grupo de Schottky de género  $g$ , siendo este grupo de Schottky el grupo cociente  $\pi_1(S, p)/F$ , que uniformiza la superficie  $S$ . □

**Ejemplo 12.2.3.** — Consideremos una transformación loxodrómica  $T(z) = \lambda z$ , donde  $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$  y  $|\lambda| \neq 1$ . Entonces el grupo cíclico  $G_\lambda$  generado por  $T$  es un grupo de Schottky de género 1. Podemos escribir  $\lambda = e^{i\tau}$  para algún  $\tau \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ . Más aún,  $G_\lambda$  y  $G_{\lambda^*}$  uniformizan toros equivalentes sí y sólo sí existe una matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$$

tal que  $\lambda = e^{i\tau}$  y  $\lambda^* = e^{i\tau^*}$  para ciertos  $\tau, \tau^* \in \mathbb{H}$  con  $\tau^* = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ .

**12.2.1. Algunas generalidades sobre grupos de Schottky planares.** — Veamos ahora algunas observaciones sobre grupos de Schottky. Consideremos un grupo de Schottky  $G$ , de género  $g \geq 1$ , y el cubrimiento holomorfo natural  $P : \Omega \rightarrow S_G = \Omega/G$ , donde  $\Omega$  es la región de discontinuidad de  $G$ .

*12.2.1.1. Existencia de sistemas de curvas.* — Consideremos un sistema de generadores  $A_1, \dots, A_g$  para  $G$ . Fué verificado en [19] la existencia de un sistema fundamental de curvas asociadas a tales generadores. De esta manera la proyección de tal sistema de curvas por  $P$  nos define sobre  $S_G$  una colección de  $g$  curvas cerradas simples, dos a dos disjuntas, que son homológicamente independientes. La demostración constructiva del teorema de retrosección de Koebe permite ver que este proceso es reversible (ver Problema 7.-).

*12.2.1.2. Tipo de isomorfía.* — Tenemos que el grupo de Schottky  $G$  es un grupo Kleiniano planar isomorfo a un grupo libre de rango  $g$  y cuyos elementos, diferente de la identidad, son loxodrómicos. En [55] se verificó que las propiedades anteriores definen a los grupos de Schottky.

*12.2.1.3. Handlebodies.* — Un handlebody de género  $g$  es obtenido como el cociente  $H_G = \mathbb{H}^3/G$ , donde  $G$  es visto actuando como grupo de isometrías del espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^3$  por medio de la extensión de Poincaré (mirar lo ya dicho en la sección 10.10). El borde de  $H_G$  es dado por  $S_G$ . La estructura de  $H_G$  inducida por  $\mathbb{H}^3$  define una estructura hiperbólica en el handlebody  $\#^g(S^1 \times D)$ , donde  $S^1$  es el círculo unitario y  $D$  es el disco cerrado unitario. La estructura hiperbólica inducida por el grupo de Schottky  $G$  tiene la propiedad que el radio de inyectividad (para la métrica inducida sobre  $H_G$ ) es acotada uniformemente por debajo por una constante positiva. De hecho todas las estructuras hiperbólicas sobre un handlebody de género  $g$  con radio de inyectividad acotada uniformemente por debajo por una constante positiva es definida por un grupo de Schottky de género  $g$ .

*12.2.1.4. Cubrimientos planares más cercanos.* — Si tenemos un cubrimiento planar regular  $p : U \rightarrow S_G$  de manera que existe un cubrimiento  $q : \Omega \rightarrow U$  satisfaciendo que  $P = p \circ q$  es nuestro cubrimiento anterior dado por el grupo de Schottky  $G$ , entonces se sabe que  $q$  debe ser un homeomorfismo, es decir, los grupos de Schottky definen los cubrimientos planares regulares más cercanos a las superficies cerradas uniformizadas (ver Problema 7.-).

*12.2.1.5. Una generalización.* — Ya anteriormente hemos definido grupos de Schottky anodados. Estos grupos son límites algebraicos de grupos de Schottky, es decir, forman algunos de los los puntos frontera del espacio de deformaciones de un grupo de Schottky. Se puede definir una region extendida de discontinuidad de tales grupos al agregar los puntos fijos parabólicos a la región de discontinuidad y definir de manera apropiada la topología para este conjunto. Así, usando estos grupos uno obtiene superficies de Riemann anodadas y de hecho todas ellas. Al nivel de handlebodies, estos grupos producen las estructuras hiperbólicas geoméricamente finitas completas con radio de inyectividad arbitraria. También esos grupos tienen un sentido de cubrimientos más cercanos en un sentido apropiado. Referencias a este tópico es, por ejemplo, [31, 38].

PROBLEMAS. —

- 1.- Verificar que para todo  $g \geq 1$  existen un número infinito de grupos de Schottky de género  $g$ . (Ind. Utilice círculos).
- 2.- Verifique que cada uno de los generadores  $A_1, \dots, A_g$  de un grupo de Schottky es necesariamente loxodrómico. (Ind. Verifique que  $A_k$  tiene dos puntos fijos y que no puede ser una rotación).
- 3.- Verifique que un grupo de Schottky de género  $g$  es un grupo libre de rango  $g$ . (Ind. Tome un punto  $p$  dentro de la región  $\mathcal{D}$  y mire la órbita de  $p$ ). Deducir que todo grupo de Schottky no contiene transformaciones elípticas.

- 4.- Verifique que todo grupo de Schottky de género  $g$  es un grupo Kleiniano planar, es decir, actúa de marea discontinua en algún punto de la esfera de Riemann. (Ind. Vea que cada punto en la clausura de  $\mathcal{D}$  es un punto de discontinuidad de  $G$ ).
- 5.- Sea  $\Omega(G)$  la region de discontinuidad de un grupo de Schottky  $G$  de género  $g$ . Verifique que  $\Omega(G)$  es conexo. [Ind. Vea que todo punto en la órbita por  $G$  de la clausura de  $\mathcal{D}$  es punto de discontinuidad y que la órbita de este conjunto es conexo. Luego vea que todo punto en el borde de la órbita no puede ser un punto de discontinuidad]. Concluir de esto que el conjunto límite de un grupo de Schottky es totalmente desconexo.
- 6.- Si  $G$  es un grupo de Schottky de género  $g$ , entonces  $\Omega(G)/G$  es una superficie de Riemann de género  $g$ . (Ind. Ver que para todo punto en  $\Omega(G)$  existe un punto de su órbita por  $G$  en la clausura de  $\mathcal{D}$ . Más aún, dos puntos diferentes en  $\mathcal{D}$  no pueden ser equivalentes por  $G$  y cada punto en el borde  $C_k$  tiene exactamente otro representante en el borde  $C'_k$  y no en otro borde ni en  $\mathcal{D}$ . Deducir que  $\Omega(G)/G$  es homeomorfo a una superficie orientable cerrada de género  $g$ . Usar la proyección natural  $P : \Omega(G) \rightarrow \Omega(G)/G = S$  para dotar a  $S$  de una estructura de superficie de Riemann).
- 7.- Si  $G$  es un grupo de Schottky de género  $g$  y  $C_1, \dots, C'_g$  es un sistema fundamental de curvas de  $G$ , entonces ver que la proyección de ellos a  $S = \Omega(G)/G$  determina un sistema de  $g$  curvas simples cerradas que son homotópicamente independientes. Verificar que el cubrimiento  $(\Omega(G), G, P : \Omega(G) \rightarrow S)$  es un cubrimiento regular planar más cercano a  $S$ . Usando la teoría de las aplicaciones casiconformales, verificar el recíproco, es decir, todo cubrimiento regular planar más cercano a  $S$  es equivalente a un cubrimiento dado por un grupo de Schottky.

### 12.3. Grupos Schottky-Admisibles

Ahora veremos una manera simple de construir grupos Kleinianos que contienen grupos de Schottky como subgrupos normales de índice finito.

**Definición 12.3.1.** — Consideremos un grupo finito con una presentación de la forma

$$H = \langle x_1, \dots, x_n : x_1^{a_1} = \dots = x_n^{a_n} = 1, w_1 = \dots = w_r = 1 \rangle,$$

donde  $w_1, \dots, w_r$  son palabras reducidas en los generadores  $x_1, \dots, x_n$ .

Diremos que la presentación anterior es **Schottky-admisible** si las siguientes son satisfechas :

- (1)  $x_j$  tiene orden  $a_j$ , para cada  $j = 1, \dots, n$ ;

(2) si consideramos el producto libre de grupos

$$K = \langle X_1, \dots, X_n : x_1^{a_1} = \dots = x_n^{a_n} = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_{a_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{a_n},$$

y consideramos

$$U = \ll W_1, \dots, W_r \gg \triangleleft K,$$

el subgrupo normal de  $K$  más pequeño que contiene las palabras  $W_1, \dots, W_r$ , donde  $W_j$  corresponde a la palabra  $w_j$  cuando reemplazamos  $x_k$  por  $X_k$ , entonces  $U$  no tiene torsión.

**Teorema 12.3.2.** — *Consideremos una presentación Schottky-admisibile*

$$H = \langle x_1, \dots, x_n : x_1^{a_1} = \dots = x_n^{a_n} = 1, w_1 = \dots = w_r = 1 \rangle.$$

Entonces,

$$G = \ll w_1, \dots, w_r \gg \triangleleft H,$$

resulta ser un grupo de Schottky de género

$$g = 1 - |H| + |H| \sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{1}{a_j}\right).$$

*Demonstración.* — Podemos construir, usando los teoremas de combinación, un grupo  $K$  como antes que es geoméricamente finito, cuya region de discontinuidad es conexas, y cuyos elementos no triviales que no son loxodrómicos son conjugados a una potencia de laguno de los generadores  $X_j$ . Más aún, el grupo  $K$  uniformiza un orbifold de signatura  $(0, 2n; a_1, a_1, a_2, a_2, \dots, a_n, a_n)$ .

En particular, nuestro subgrupo  $G$  será, por las condiciones impuestas, un grupo puramente loxodrómico, geoméricamente finito y cuya región de discontinuidad es conexo, luego es necesariamente un grupo de Schottky. El género de  $G$  se obtiene como consecuencia de la fórmula de Riemann-Hurwitz.

□

**Ejemplo 12.3.3.** — Se sabe que una presentación

$$H = \langle x, y : x^n = y^m = 1, yx = x^s y \rangle, \quad s^m \equiv 1 \pmod{n},$$

es Schottky-admisibile. En este caso,  $G$  es un grupo de Schottky de género

$$g = 1 + nm - (n + m).$$

Por ejemplo, si  $m = 2$ , entonces  $H$  es el grupo dihedral de orden  $2n$  y  $g = n - 1$ .

**Observación 12.3.4.** — Para poder construir un algoritmo que permita obtener, a partir de un dominio fundamental para nuestro  $K$ , un dominio fundamental para el correspondiente  $G$ , necesitamos un algoritmo que permita obtener un sistema de generadores para  $G$  a partir de los generadores de  $K$ . Este problema no será analizado aquí.

**Ejemplo 12.3.5.** — Sea

$$H = \langle x^2 = y^2 = (xy)^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2^2.$$

En este caso,

$$K = \langle X, Y : X^2 = Y^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2,$$

$$G = \langle\langle (XY)^2 \rangle\rangle = \langle\langle (XY)^2 \rangle\rangle.$$

El grupo de Schottky  $G$  uniformiza un toro con un grupo de automorfismos isomorfo a  $H$  cuyo cociente es la esfera con 4 valores de ramificación de orden 2.

#### 12.4. Grupos de Schottky y Automorfismos

Supongamos ahora que tenemos una superficie de Riemann  $S$  de género  $g \geq 2$  y un grupo  $H < \text{Aut}(S)$  de automorfismos de  $S$  (holomorfos o antiholomorfos).

**Definición 12.4.1.** — Diremos que  $H$  es un **grupo de tipo Schottky** si es posible encontrar un grupo de Schottky  $G$  y un cubrimiento holomorfo  $P : \Omega(G) \rightarrow S$ , con  $G$  como grupo de cubrimiento, de manera que todo elemento de  $H$  pueda levantarse por  $P$ , es decir, para todo  $h \in H$  exista un automorfismo holomorfo (si  $h$  es holomorfo) o antiholomorfo (si  $h$  es antiholomorfo) de  $\Omega(G)$ , digamos  $k_h : \Omega(G) \rightarrow \Omega(G)$  tal que  $Pk_h = hP$ .

**Observación 12.4.2.** — Supongamos que  $H < \text{Aut}(S)$  es de tipo Schottky y que tenemos un grupo de Schottky  $G$  y un cubrimiento holomorfo  $P : \Omega(G) \rightarrow S$ , con  $G$  como grupo de cubrimiento, de manera que todo elemento de  $H$  pueda levantarse por  $P$ . Como todo automorfismo de la región de discontinuidad de un grupo de Schottky es necesariamente una transformación de Möbius (si holomorfo) o la composición de una transformación de Möbius con la conjugación (si antiholomorfo), tenemos que  $k_h \in \widehat{\mathbb{M}}^2$ . Luego, el grupo  $K$  obtenido al levantar todos los elementos de  $H$  al cubrimiento de Schottky dado por  $G$  resulta ser un grupo Kleiniano que contiene a  $G$  como subgrupo normal. Si  $S$  es de género  $g \geq 2$ , entonces al ser  $\text{Aut}(S)$  finito, tenemos también que  $G$  es subgrupo de índice finito en  $K$ .

El siguiente resultado nos dice que no todo grupo  $H$  es de tipo Schottky.

**Teorema 12.4.3.** — Sea  $S$  una superficie de Riemann de género  $g \geq 1$  y  $H$  un grupo de automorfismos holomorfos de  $S$ . Si  $S/H$  es una esfera con tres valores de ramificación y toda transformación de  $H$  es holomorfo, entonces  $H$  no es de tipo Schottky. En particular, si  $H$  es de tipo Schottky, entonces  $|H| \leq 12(g - 1)$ .

*Demonstración.* — Una manera de ver esto es la siguiente. Si  $H$  fuese tipo Schottky, entonces al levantar  $H$  obtenemos un grupo  $K$  de transformaciones de Möbius conteniendo a un grupo de Schottky  $G$  de índice finito (y también normal). El grupo  $K$  tiene la misma región de discontinuidad que  $G$ , luego conexa. Como  $\Omega(G)/K$  es una esfera con tres puntos especiales,  $K$  es un grupo uniformizante, debe ocurrir por rigidez de los grupos triangulares que  $K$  es Fuchsiano de primera clase, es decir su conjunto límite es un círculo. Una contradicción al hecho que el conjunto límite de un grupo de Schottky es totalmente desconexo. La cota para el orden de  $H$  es consecuencia directa de la fórmula de Riemann-Hurwitz [21]. □

Una condición necesaria y suficiente para que un grupo finito de automorfismos (holomorfos y antiholomorfos) de una superficie de Riemann de género al menos uno sea de tipo Schottky es dada por la siguiente existencia de curvas cerradas especiales.

**Teorema 12.4.4.** — Sea  $S$  una superficie de Riemann de género  $g \geq 2$  y  $H$  un grupo de automorfismos de  $S$  (que puede contener antiholomorfos). Entonces tenemos que  $H$  es de tipo Schottky sí y sólo si existe una colección  $\mathcal{F}$  de curvas cerradas simples, dos a dos disjuntas satisfaciendo las siguientes propiedades :

- (1) las componentes conexas de  $S - \mathcal{F}$  son planares, es decir, son superficies de género cero con bordes ;
- (2) la colección  $\mathcal{F}$  es invariante por la acción del grupo  $H$ .

*Demonstración.* — Supongamos que tenemos un grupo (finito) de automorfismos  $H$  de  $S$  y tenemos una colección de curvas cerradas y simples, dos a dos disjuntas, digamos  $\mathcal{F} = \{L_1, \dots, L_k\} \subset S$ , satisfaciendo (1) y (2) en el teorema. La condición (1) nos asegura que  $k \geq g$  y que podemos extraer una subcolección  $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$  consistiendo de  $g$  curvas homológicamente independientes. La misma condición nos asegura que el normalizador (en homotopía libre) de la colección  $\mathcal{L}$  está generada por  $\mathcal{F}$ . Ahora, la condición (2) asegura que la uniformización de Schottky de  $S$  definida por  $\mathcal{L}$  tiene la propiedad requerida.

Recíprocamente, supongamos que  $H$  es de tipo Schottky y sea  $(\Omega, G, P : \Omega \rightarrow S)$  una uniformización de Schottky para la cual el grupo  $H$  se levanta. Como consecuencia del teorema de uniformización tenemos en  $S$  una métrica hiperbólica en donde  $H$  actúa como grupo de isometrías. Consideremos una geodésica cerrada y simple  $L_1 \subset S$  de longitud más pequeña con la propiedad que ella se

levanta en una curva cerrada en  $\Omega$  por el cubrimiento  $P$ . Tenemos que para cada  $h \in H$  vale una de las siguientes :

- (i)  $h(L_1) = L_1$ , ó
- (ii)  $h(L_1) \cap L_1 = \emptyset$ .

En efecto, supongamos que  $h(L_1) \cap L_1 \neq \emptyset$  y  $h(L_1) \neq L_1$ . Como  $h$  se levanta por  $P$ , tenemos que ambas  $L_1$  y  $h(L_1)$  se levantan en curvas cerradas por  $P$  en  $\Omega$ . Cada curva cerrada obtenida por levantamiento de  $L_1$  ó  $h(L_1)$  tiene la misma longitud hiperbólica que  $L_1$ . Escojamos levantamientos respectivos  $\widehat{L_1}$  y  $\widehat{h(L_1)}$  de manera que ellas intersectan. La planaridad de  $\Omega$  asegura que el número de puntos de intersección de tales curvas es par. Orientemos  $\widehat{L_1} \subset \Omega$  de manera opuesta al movimiento de las manecillas del reloj. Fijemos un punto en la intersección ;  $p \in \widehat{L_1} \cap \widehat{h(L_1)}$ . Partamos desde  $p$  y recorramos  $\widehat{L_1}$ , siguiendo la orientación dada, hasta que lleguemos a un nuevo punto de intersección  $q \neq p$ . Estos dos puntos dividen  $\widehat{L_1}$  (respectivamente,  $\widehat{h(L_1)}$ ) en dos arcos disjuntos  $A_1$  y  $A_2$  (respectivamente,  $B_1$  y  $B_2$ ). Podemos asumir que la longitud hiperbólica de  $A_1$  (respectivamente, de  $B_1$ ) es a lo más la mitad de la longitud de  $L_1$ . Consideremos la curva cerrada simple  $\widehat{L} = A_1 \cup B_1 \cup \{p, q\}$ , cuya longitud es a lo más la longitud de  $L_1$ . Es claro que  $\widehat{L}$  no es una geodésica cerrada, luego su proyección en  $S$  permite encontrar una geodésica cerrada simple de longitud más pequeña que la de  $L_1$  con la propiedad que ella se levanta por  $P$  a una curva cerrada en  $\Omega$ ; una contradicción a la minimalidad de  $L_1$ .

Consideremos la colección de geodésicas que obtenemos al trasladar por  $H$  a la geodésica  $L_1$ , digamos  $L_1, \dots, L_r$ . Tenemos que la colección de componentes conexas de  $S - (L_1 \cup \dots \cup L_r)$  es invariante por la acción de  $H$ . Si alguna de tales componentes, digamos  $X$ , tienen género positivo, entonces podemos encontrar una geodésica cerrada simple  $L_{r+1} \subset X$  de longitud más pequeña posible con la propiedad que ella se levanta una curva cerrada en  $\Omega$ . De manera similar al caso de  $L_1$ , tenemos que para cada  $h \in H$  vale una de las siguientes : (i)  $h(L_{r+1}) = L_{r+1}$ , ó (ii)  $h(L_{r+1}) \cap L_{r+1} = \emptyset$  y  $h(L_{r+1})$  es disjunta de  $L_1, \dots, L_r$ . Podemos ahora considerar las geodésicas obtenidas al traslada por  $H$  la geodésica  $L_{r+1}$ , digamos  $L_{r+1}, \dots, L_{r+s}$ . La colección de componentes conexas de  $S - (L_1 \cup \dots \cup L_{r+s})$  sigue siendo invariante por  $H$ . Como el género de  $S$  es finito, podemos proceder como antes un número finito de veces hasta encontrar una colección disjunta e invariante (por  $H$ ) de geodésicas simples y cerradas que se levantan en curvas cerradas en  $\Omega$  y cuyo complemento en  $S$  consiste de superficies planares. □

Todo grupo de automorfismos holomorfos isomorfo a un grupo dihedral siempre es de tipo Schottky [33]. Para ver más sobre este problema de automorfismos tipo Schottky mirar por ejemplo en [37], [33], [34], [34], [35], [36].



**Corolario 12.4.5.** — Sea  $M$  un handlebody de género  $g \geq 2$  con una estructura hiperbólica completa, geoméricamente finita, con radio de inyectividad acotada por abajo por un número positivo, es decir, dada por la acción de un grupo de Schottky. Entonces, su grupo de isometrías deja invariante una colección de discos topológicos que desconectan  $M$  en bolas.

## 12.5. Grupos de Schottky reales

**Definición 12.5.1.** — Un grupo de Schottky que deja invariante un círculo generalizado es llamado un grupo de Schottky real.

**Teorema 12.5.2.** — Si  $S$  es una superficie de Riemann admitiendo una reflexión  $\tau : S \rightarrow S$ , entonces existe un grupo de Schottky  $G$  que deja un círculo  $\mathcal{C}$  invariante tal que  $S = \Omega(G)/G$  y la reflexión  $\tau$  es inducida por la reflexión en  $\mathcal{C}$ .

*Demonstración.* — Consideremos la superficie de Klein compacta  $S/\tau$  con borde no vacío. Consideremos cualquier grupo Fuchsiano  $\Gamma$ , actuando en el disco unitario  $\Delta$ , tal que  $\Delta/\Gamma$  sea topológicamente equivalente al interior de  $S/\tau$ . Tenemos que  $\Gamma$  es un grupo de Schottky real con el círculo unitario como círculo generalizado invariante. El cociente  $S^* = \Omega(\Gamma)/\Gamma$  es una superficie de Riemann que admite una reflexión  $\tau^* : S^* \rightarrow S^*$ , inducida por la reflexión en el círculo unitario, de manera que existe, por la construcción, un homeomorfismo  $f : S^* \rightarrow S$  tal que  $f\tau^*f^{-1} = \tau$ . Por la compacidad de las superficies, podemos asumir que  $f$  es un homeomorfismo casiconformal. Ahora podemos utilizar la herramientas de aplicaciones casiconformales y proceder de manera similar como en la primera demostración del teorema de retrosección de Koebe. □

El recíproco al resultado anterior es dado por el Problema 3.-. Como consecuencia de esto tenemos la siguiente resultado [45], [59].

**Corolario 12.5.3.** — Si  $S$  es una superficie de Riemann admitiendo una reflexión  $\tau : S \rightarrow S$ , entonces  $K(S, \tau)$  es tipo Schottky.

*Demonstración.* — Sea  $S$  una superficie de Riemann de género  $g$  junto a una reflexión  $\tau : S \rightarrow S$ . Sea  $G$  un grupo de Schottky que deja invariante el círculo  $S^1$  y tal que existe un cubrimiento holomorfo  $P : \Omega(G) \rightarrow S$  con  $G$  como grupo cobertor determinado por el teorema anterior. Denotemos por  $\Delta$  uno de los dos discos acotados por  $S^1$  y por  $\sigma$  la reflexión en  $S^1$ . (1) Supongamos que el conjunto de puntos fijos de  $\tau$  divide  $S$  en dos superficies, digamos  $S_1$  y  $S_2$ . En este caso,  $G$  es un grupo Fuchsiano. Supongamos que  $P(\Delta) = S_1$ . Sea  $K$  el subgrupo de índice dos en  $K(S, \tau)$  que deja invariante  $s_1$ . Tenemos entonces que  $K(S, \tau)$

está generado por  $K$  y  $\tau$ . Como  $P : \Delta \rightarrow S_1$  es cubrimiento universal, entonces podemos levantar el grupo  $K$ . Tal levantamiento es un grupo Fuchsiano  $\widehat{K}$ . Ahora, es claro que  $\widehat{k}$  y  $\sigma$  generan un grupo que resulta ser el levantamiento de  $K(S, \tau)$  por  $P$ . (2) Supongamos ahora que el conjunto de puntos fijos de  $\tau$  no divide  $S$ . Denotemos por  $S^*$  a  $S$  menos los puntos fijos de  $\tau$ . Sea  $\widehat{G}$  el grupo generado por  $G$  y  $\sigma$ . Ya que  $C$  es invariante por  $G$ , tenemos que el grupo  $F$  de orden dos generado por  $\sigma$  es normal en  $\widehat{G}$ . Consideremos el cubrimiento ramificado  $Q : \Omega(G) \rightarrow \overline{D}$  inducido por la acción de  $F$ , donde  $D$  es el disco unitario. El cociente  $H = \widehat{G}/F$  actúa como grupo de automorfismos holomorfos del disco unitario  $\Delta$ . Tenemos que el cubrimiento holomorfo  $Q^* : \Delta \rightarrow (S^*/\tau)$ , inducido por  $H$ , es cubrimiento universal. En particular, podemos levantar  $K(S, \tau)/\tau$  a  $D$  por este cubrimiento universal. Tal levantamiento es dado por transformaciones de Möbius y luego extienden de manera natural al círculo borde. Ahora es fácil levantar este grupo de automorfismos de  $\overline{D}$  por el cubrimiento ramificado  $Q^*$  para obtener de esta manera el levantamiento de  $K(S, \tau)$  como era deseado.  $\square$

PROBLEMAS. —

- 1.- Sea  $G$  un grupo de Schottky real y  $C$  un círculo generalizado invariante por  $G$ . Si  $\sigma$  es la reflexión en  $C$ , entonces verificar las siguientes propiedades :
  - (i)  $\sigma$  conmuta con cada elemento de  $G$ ;
  - (ii) si  $G$  es de género  $g \geq 2$ , entonces  $C$  está únicamente determinado por  $G$  y  $\Lambda(G) \subset C$ .
- 2.- Dar un ejemplo de un grupo de Schottky real que no sea Fuchsiano. Verifique que todo grupo de Schottky real que no es Fuchsiano posee un subgrupo de índice dos que si lo es.
- 3.- Sea  $G$  un grupo de Schottky real,  $C$  un círculo invariante por  $G$  y  $\sigma$  la reflexión inducida por  $C$ . Verifique que  $S = \Omega(G)/G$  es una superficie de Riemann real admitiendo una reflexión  $\tau : S \rightarrow S$  inducida por  $\sigma$ .

## 12.6. Representaciones simplécticas de grupos de tipo Schottky

Ahora, suponiendo que  $H$  es un grupo de automorfismos de tipo Schottky y que  $G, P : \Omega(G) \rightarrow S$  son un grupo de Schottky como se desea y  $P$  el cubrimiento correspondiente, podemos proceder como sigue : Fijemos un sistema fundamental de curvas  $C_1, \dots, C_g, C'_1, \dots, C'_g$  asociada a los generadores de Schottky  $A_1, \dots, A_g$  para  $G$ . Orientemos las curvas  $C_1, \dots, C_g$  digamos en el sentido opuesto a las manecillas de un reloj (no digital pero a cuerda). Damos las orientaciones inducidas por la acción de los generadores a las curvas  $C'_1, \dots, C'_g$ . Consideremos arcos simples orientados dos a dos disjuntos  $M_1, \dots, M_g$ , de manera que  $M_j$  es disjunta de  $C_k$  y  $C'_k$  si  $j \neq k$ ,  $M_j$  interseca  $C_j$  en su punto final e interseca  $C'_j$  en su punto inicial, siendo este punto la imagen del punto final por  $A_j$ .

Las curvas orientadas  $C_1, \dots, C_g$  se proyectan sobre  $S$  en curvas simples orientadas cerradas  $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ , respectivamente. Idénticamente, los arcos orientados  $M_1, \dots, M_g$  se proyectan en curvas orientadas simples y cerradas  $\beta_1, \dots, \beta_g$ , respectivamente. No es difícil observar que  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$  define una **base simpléctica** para la homología de  $S$ .

Usando esta base simpléctica, uno tiene una representación fiel del grupo  $H$  en el **grupo extendido simpléctico**

$$\rho^* : H \rightarrow \widetilde{\mathrm{Sp}}(2g, \mathbb{Z}),$$

definida por

$$\rho^*(h) = \begin{bmatrix} A_h & 0 \\ B_h & {}^t A_h^{-1} \end{bmatrix}, \text{ si } h \text{ es holomorfo y}$$

$$\rho^*(h) = \begin{bmatrix} A_h & 0 \\ B_h & -{}^t A_h^{-1} \end{bmatrix}, \text{ si } h \text{ es antiholomorfo}$$

Observemos que  $\eta : H \rightarrow \mathrm{GL}(g, \mathbb{Z})$  definida por  $\eta(h) = A_h$  es también una representación fiel de  $H$ . Si cambiamos la base

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g\}$$

por la nueva base simpléctica

$$\{\beta_1, \dots, \beta_g, -\alpha_1, \dots, -\alpha_g\},$$

entonces tenemos la representación simpléctica

$$\rho : H \rightarrow \widetilde{\mathrm{Sp}}(2g, \mathbb{Z}),$$

definida por

$$\rho(h) = \begin{bmatrix} {}^t A_h^{-1} & -B_h \\ 0 & A_h \end{bmatrix}, \text{ si } h \text{ es holomorfo y}$$

$$\rho(h) = \begin{bmatrix} -{}^t A_h^{-1} & -B_h \\ 0 & A_h \end{bmatrix}, \text{ si } h \text{ es antiholomorfo}$$

Observemos que si queremos calcular un punto fijo  $Z \in \mathcal{H}_g$  por una matriz simpléctica (extendida) de la forma

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(2g, \mathbb{Z}),$$

entonces sólo tenemos que resolver el sistema lineal

$$\begin{cases} B + ZD = AZ & \text{caso que } M \in \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \\ B + \bar{Z}D = AZ & \text{caso que } M \notin \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Ahora, el grupo  $H$  es el cociente  $K/G$ , donde  $K$  es el levantamiento de  $H$ . Este grupo  $K$ , como se mencionó arriba, contiene al grupo de Schottky  $G$  como

un subgrupo normal de índice finito. En particular, cada elemento  $k \in K$  induce un par de isomorfismos

$$\theta(k) : G \rightarrow G : t \mapsto ktk^{-1},$$

$$\theta(k)^{ab} : G/[G, G] \rightarrow G/[G, G] : t[G, G] \mapsto ktk^{-1}[G, G].$$

Es fácil ver que si  $k \in G$ , entonces  $\theta(k)^{ab}$  es la identidad. Luego, para cada  $h \in H$  tenemos en forma natural un isomorfismo

$$\Theta(h) : G/[G, G] \rightarrow G/[G, G]$$

definido como

$$\Theta(h) = \theta(k_h)^{ab},$$

donde  $k_h \in K$  es cualquier levantamiento de  $h$ .

**Teorema 12.6.1.** — Usando los generadores anteriores  $A_1, \dots, A_g$  del grupo de Schottky  $G$ , tenemos que la representación matricial de  $\Theta(h)$  (escrita también en filas) es dada por :

- (1)  $\Theta(h) = {}^t A_h^{-1}$  si  $h$  es holomorfo;
- (2)  $\Theta(h) = -{}^t A_h^{-1}$  si  $h$  es antiholomorfo.

Para ver lo anterior hay que darse cuenta que la acción del grupo  $H$ , visto como el cociente de  $K$  por  $G$ , es en realidad la acción a nivel de los arcos  $M_1, \dots, M_g$ , luego, la acción a nivel de las curvas  $\beta_1, \dots, \beta_g$ .

Ahora que tenemos calculada una representación fiel  $\rho : H \rightarrow \widetilde{\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})}$ , podemos calcular sus puntos fijos en el espacio de Siegel obteniendo de esta manera variedades abelianas principalmente polarizadas con grupo de automorfismos (holomorfo/antiholomorfo)  $\rho(H)$ .

**Ejemplo 12.6.2.** — Consideremos un círculo  $C_1$  en el plano complejo que no separe 0 de  $\infty$  y tal que los círculos  $C_1, C_2 = T(C_1), C'_1 = T^2(C_1), C'_2 = T^3(C_1)$  son dos a dos disjuntos para  $T(z) = iz$ . Orientemos  $C_1$  y  $C_2$  con la orientación opuesta a las manecillas de un reloj. Los círculos  $C'_1$  y  $C'_2$  son orientados según las manecillas de un reloj. Sea  $A_1$  la composición de la reflexión en  $C_1$  seguida por la reflexión en el eje imaginario. Tomamos  $A_2 = TA_1T^{-1}$ . Entonces el grupo  $G$  generado por  $A_1$  y  $A_2$  es un grupo de Schottky de género 2. Ya que

$$TA_1T^{-1} = A_2; \quad TA_2T^{-1} = A_1^{-1},$$

tenemos que

$$\Theta(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En este caso, la superficie de Riemann  $S = \Omega(G)/G$  admite el grupo de automorfismos  $H = \langle t \rangle \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  inducido por  $K$ , el grupo generado por  $G$  y  $T$ . Se tiene que  $G$  es un subgrupo normal de índice 4 en  $K$ .

Escogiendo  $M_1$  como el arco real que conecta  $C_1$  con  $C'_1$  (que pasa por 0, y  $M_2$  el arco contenido en el eje imaginario (pasando por  $\infty$ ) que conecta  $C_2$  con  $C'_2$ , tenemos en homología que en la base

$$\{\beta_1, \beta_2, -\alpha_1, -\alpha_2\}$$

la representación de  $t$  es dada por :

$$\rho(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Observación 12.6.3.** — En esta sección hemos visto como calcular las formas algebraicas de algunas matrices de Riemann de superficies de Riemann por medio de grupos de Schottky que reflejan algunos automorfismos de ella. En la siguiente sección veremos como obtener explícitamente tales matrices por lo menos para el caso de superficies de Riemann que admiten reflexiones, es decir, automorfismos anticonformales de orden dos con puntos fijos.

PROBLEMAS. —

1.- Verificar que  $Z \in \mathcal{H}_g$  es punto fijo de

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(2g, \mathbb{Z}),$$

sí y sólo si  $-Z^{-1} \in \mathcal{H}_g$  es punto fijo de

$$N = \begin{bmatrix} D & 0 \\ -B & A \end{bmatrix}.$$

2.- Verificar que  $Z \in \mathcal{H}_g$  es punto fijo de

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(2g, \mathbb{Z}),$$

sí y sólo si  $-Z^{-1} \in \mathcal{H}_g$  es punto fijo de

$$N = \begin{bmatrix} {}^tA & {}^tB \\ 0 & {}^tD \end{bmatrix}.$$

(Ind. Observar que  $Z$  es punto fijo de  $M$  sí y sólo si es punto fijo de  $M^{-1}$ . Ahora observe que

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} {}^tD & -{}^tB \\ 0 & {}^tA \end{bmatrix},$$

y utilice Problema 1.- con  $M^{-1}$ ).

### 12.7. Grupos de Schottky reales y representaciones simplécticas

Consideremos un grupo de Schottky real  $G$  de género  $g \geq 2$  que deja invariante algún círculo  $C$ . En este caso, el conjunto límite de  $G$  está contenido en  $C$ . Si denotamos por  $\sigma$  la reflexión en  $C$ , entonces la superficie de Riemann  $S = \Omega(G)/G$  admite un automorfismo antiholomorfo de orden dos  $\tau : S \rightarrow S$  actuando con puntos fijos.

El grupo  $K(S, \tau)$  que consiste de aquellos automorfismos holomorfos y antiholomorfos que conmutan con  $\tau$ , el cual sabemos se levanta al cubrimiento regular planar definido por  $G$ , satisface que :

- (i)  $\tau \in K(S, \tau)$  y
- (ii)  $\langle \tau \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \triangleleft K(S, \tau)$ .

La superficie cociente  $R = S/\tau$  es una superficie de Klein compacta con borde. El grupo  $K(S, \tau)/\tau$  es el grupo de automorfismos de Klein de  $R$ . Por resultados de C.L. May [62] tenemos que  $|K(S, \tau)| \leq 24(g-1)$ . Uno puede usar este grupo para calcular puntos fijos en el espacio de Siegel y así obtener variedades abelianas principalmente polarizadas con automorfismos y que admiten una estructura real que conmuta con tal grupo. Por otro lado, Burnside [17] observó la siguiente propiedad.

**Teorema 12.7.1.** — *Sea  $G$  un grupo de Schottky real tal que  $\infty \in \Omega(G)$ . Entonces la serie*

$$\sum_{\gamma \in G} \gamma'(z)$$

*es uniformemente convergente en compactos de  $\Omega(G)$ .*

*Demonstración.* — Primero supongamos que  $G$  deja invariante una línea  $L$ . Si  $K \subset \Omega(G)$  es algún compacto, entonces exceptuando un número finito de transformaciones en  $G$  existe una constante positiva  $A > 0$  tal que

$$\sum_{\gamma \in G} |\gamma'(z)| \leq A \sum_{\gamma \in G} \frac{1}{|c|^2},$$

donde

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1.$$

Elijamos un punto  $q \in L$  y un número positivo  $R > 1$  tal que  $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - q| > R\} \cup \{\infty\}$  es precisamente invariante por la identidad en  $G$ . En este caso, tenemos que los conjuntos  $\gamma(B)$  son discos ortogonales a  $L$  y, en particular,

$$\sum_{\gamma \in G, \gamma \neq I} \text{diam}(\gamma(B)) \leq 2R,$$

donde  $\text{diam}$  denota el diámetro Euclideano. Si usamos la desigualdad dada en C.7 de [56]

$$\text{diam}(\gamma(B)) \geq \frac{1}{|c|^2} \frac{1}{\text{dist}(g^{-1}(\infty), B)} \geq \frac{1}{|c|^2} \frac{1}{R},$$

for  $\gamma \neq I$ , entonces podemos obtener la convergencia de  $\sum_{\gamma \in G} \frac{1}{|c|^2}$ .

Ahora supongamos que  $G$  deja invariante un círculo  $C$  en el plano complejo. Escojamos un punto  $q \in C \cap \Omega(G)$  (entonces  $q \neq \infty$ ). Sean  $T(z) = \frac{1}{z-q}$ ,  $H = TGT^{-1}$  y  $L = T(S)$ . Entonces  $H$  es un grupo de Schottky que deja invariante la línea  $L$  y para el cual  $\infty \in \Omega(H)$ . En este caso tenemos la convergencia para  $\sum_{h \in H} h'(w)$  en subconjuntos compactos de  $\Omega(H)$ . Sea  $K$  un subconjunto compacto de  $\Omega(G)$  tal que  $q \notin K$ . Entonces para  $z \in K$  tenemos

$$\sum_{h \in H, h \neq I} |h'(T(z))| = \sum_{\gamma \in G, \gamma \neq I} |\gamma'(z)| \frac{1}{|\gamma(z) - q|^2 |T(z)|^2}.$$

El hecho que  $q \notin K$  asegura que

$$\inf \left\{ \frac{1}{|T(z)|^2}; z \in K \right\} = M > 0.$$

También, excepto por un número finito de elementos de  $G$ , digamos  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ , tenemos que

$$\inf \left\{ \frac{1}{|\gamma(z) - q|^2}; z \in K, \gamma \in G - \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \right\} = N > 0.$$

Ahora, se sigue que

$$\sum_{\gamma \in G, \gamma \neq I} |\gamma'(z)| \frac{1}{|\gamma(z) - q|^2 |T(z)|^2} \geq NM \sum_{\gamma \in G, \gamma \neq I} |\gamma'(z)|,$$

obteniendo de esta forma la convergencia deseada. □

El resultado de Burnside nos permite calcular explícitamente la matriz de Riemann de  $S = \Omega(g)/G$  de la siguiente manera. Procedemos como en la sección anterior para obtener una base simpléctica para  $S$ , es decir, escoger las curvas  $\alpha_1, \dots, \alpha_g$  como proyecciones de las curvas (orientadas)  $C_1, \dots, C_g$ , y las curvas  $\beta_1, \dots, \beta_g$  como las proyecciones de los arcos  $M_1, \dots, M_g$ . En este caso

$$\hat{w}_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{g \in G} \frac{g'(z)}{g(z) - A_j^{-1}(\infty)} dz,$$

para  $j = 1, \dots, g$ , son los levantamientos a  $\Omega(G)$  de las formas holomorfas duales a las curvas  $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ . Supongamos que  $p_j$  es el punto inicial de  $M_j$  (entonces,  $A_j^{-1}(p_j)$  es su punto final). En este caso la matriz de Riemann de  $S$  en esa base es dada por una matriz  $Z = (z_{kj}) \in \mathcal{H}_g$ , donde

$$y_{kj} = \text{Im}(z_{kj}) = \frac{1}{2\pi} \text{Log} \left( \prod_{\gamma \in G} \frac{|\gamma(p_k) - A_j^{-1}(\infty)|}{|\gamma(A_j^{-1}(p_k)) - A_j^{-1}(\infty)|} \right),$$

de donde obtenemos  $Y = \text{Im}(Z)$ .

La representación (extendida) simpléctica de la reflexión  $\tau$  en esta base simpléctica es dada por la matriz

$$\begin{bmatrix} -I & 0 \\ B & I \end{bmatrix}.$$

Usando la base simpléctica

$$\{\beta_1, \dots, \beta_g, -\alpha_1, \dots, -\alpha_g\},$$

tenemos que la matriz de Riemann para  $S$  es dada por  $W = -Z^{-1}$  y la representación simpléctica de  $\tau$  es

$$\begin{bmatrix} I & -B \\ 0 & -I \end{bmatrix}.$$

Al ser  $W$  punto fijo de  $\tau$ , debemos tener

$$Re(W) = \frac{-1}{2}B.$$

De todo lo anterior sabemos que

$$\begin{cases} Im(Z) & = Y; \\ Re(-Z^{-1}) & = \frac{-1}{2}B. \end{cases}$$

Ya que  $Z(-Z^{-1}) = -I$ , obtenemos el siguiente sistema :

$$\begin{cases} -YIm(Z^{-1}) + \frac{1}{2}Re(Z)B & = I \\ Re(Z)Im(Z^{-1}) + \frac{1}{2}YB & = 0. \end{cases}$$

**Observación 12.7.2.** — Observemos que si tenemos  $B = 0$ , entonces la ecuación anterior asegura que  $Re(Z) = 0$ . De esta manera

$$Z = iY.$$



## CAPÍTULO 13

### SUPERFICIES DE RIEMANN MAXIMAL SIMÉTRICAS

En este capítulo ejemplificaremos los resultados del capítulo anterior para cierto tipo de superficies de Riemann llamadas maximal simétricas [39].

#### 13.1. Superficies maximales simétricas

**Definición 13.1.1.** — Una superficie de Riemann  $S$ , de género  $g \geq 2$ , es llamada una **superficie maximal simétrica** si existe una reflexión  $\tau : S \rightarrow S$ , es decir, una involución antiholomorfo con puntos fijos, de manera que  $|K(S, \tau)| = 24(g - 1)$ . La reflexión  $\tau$  será llamada una **reflexión maximal** de  $S$ .

La primera observación que debemos hacer notar es que  $S/K(S, \tau)$  es un disco cerrado con cuatro valores de ramificación en su borde, de ordenes 2, 2, 2 y 3 [62]. Si denotamos por  $K^+(S, \tau)$  el subgrupo de índice dos de  $K(S, \tau)$  consistente de los automorfismos holomorfos de  $S$  que conmutan con  $\tau$ , entonces  $|K(S, \tau)| = 12(g - 1)$  y  $S/K^+(S, \tau)$  es la esfera de Riemann con una reflexión  $\eta$ , inducida por  $\tau$ , con exactamente cuatro valores de ramificación de ordenes 2, 2, 2 y 3, todos ellos ubicados en el círculo de puntos fijos de la reflexión  $\eta$ .

Segundo, la superficie de Klein  $R = S/\tau$  es una superficie compacta de Klein con borde. Esta superficie puede ser orientable como no serlo. El grupo  $K(S, \tau)/\tau$  corresponde al grupo total de automorfismos de  $R$ , un grupo de orden  $12(g - 1)$ .

**Definición 13.1.2.** — Una superficie de Riemann es llamada hiperelíptica si esta tiene una involución holomorfa con (exactamente)  $2(g + 1)$  puntos fijos.

El siguiente resultado nos dice que superficies maximales simétricas no pueden ser hiperelípticas si el género es mayor que dos.

**Teorema 13.1.3.** — *Una superficie maximal simétrica de género al menos tres no puede ser hiperelíptica.*

*Demonstración.* — Supongamos que  $S$  es maximal simétrica hiperéptica de género mayor o igual a tres con reflexión maximal  $\tau : S \rightarrow S$ . Denotemos por  $j : S \rightarrow S$  la involución hiperéptica. Como  $j$  es única, tenemos que  $j \in K(S, \tau)$ . Denotemos por  $Q : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  el cubrimiento ramificado inducido por la acción de  $j$ . La reflexión  $\tau$  desciende a una reflexión  $\eta : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  el cual conmuta con cada automorfismo en  $N = K^+(S, \tau)/j$ , un grupo de transformaciones de Möbius de orden  $6(g-1)$ . Denotemos por  $\mathcal{C}$  el círculo de puntos fijos de la reflexión  $\eta$ . Luego el grupo  $N$  es Fuchsiano o posee un subgrupo  $N_0$  de índice dos que es Fuchsiano. Como todo grupo Fuchsiano finito es cíclico, obtenemos que  $N$  posee un grupo cíclico Fuchsiano de orden  $3(g-1)$  y, en particular, el cociente  $S/K(S, \tau)$  debería tener un valor de ramificación de orden  $3(g-1) > 5$ , una contradicción.  $\square$

Como el cociente  $S/K(S, \tau)$  es un disco cerrado con cuatro valores de ramificación en su borde, cuyos ordenes son 2, 2, 2 y 3, primero buscaremos ciertos grupos Kleinianos planares que uniformizan todas estas.

PROBLEMAS. —

- 1.- Sea  $S$  una superficie real de género  $g \geq 2$  y  $\tau : S \rightarrow S$  una involución antiholomorfa con puntos fijos. Verificar que  $S/K(S, \tau)$  es un disco cerrado con cuatro valores de ramificación en su borde, cuyos ordenes son 2, 2, 2 y 3.

### 13.2. Uniformizaciones de $S/K(S, \tau)$

Consideremos una superficie de Riemann maximal  $S$  con una reflexión maximal  $\tau : S \rightarrow S$ . Como ya habíamos observado,  $S/K(S, \tau)$  es un disco cerrado con cuatro valores de ramificación en su borde cuyos ordenes son 2, 2, 2 y 3.

Por cada  $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$ , consideremos el grupo  $\widehat{K}_p$  generado por las siguientes reflexiones (ver figura 13.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1(z) = \bar{z}, \\ \sigma_2(z) = e^{\frac{2\pi i}{3}} \bar{z}, \\ \sigma_p(z) = \frac{(1+p^2)\bar{z}-2p}{2p\bar{z}-(1+p^2)}, \\ \sigma(z) = \frac{1}{\bar{z}} \end{array} \right.$$

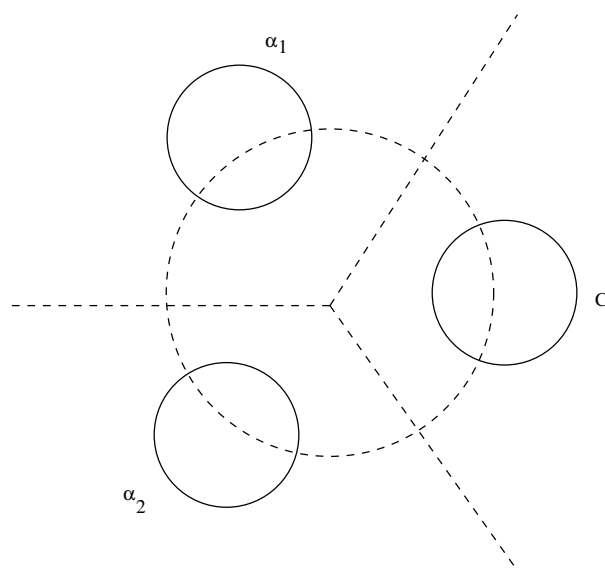


FIGURA 13.1. Dominio fundamental para  $K_p$

y consideremos las siguientes transformaciones de Möbius

$$\begin{cases} W(z) &= \sigma_2 \sigma_1(z) = e^{\frac{2\pi i}{3}} z, \\ T(z) &= \sigma \sigma_1(z) = \frac{1}{z}, \\ J(z) &= \sigma_p \sigma_1(z) = \frac{(p + \frac{1}{p})z - 2}{2z - (p + \frac{1}{p})}. \end{cases}$$

El grupo  $\widehat{K}_p$  es también generado por las transformaciones  $T, W, J$  y  $\sigma$ . Como consecuencia de los teoremas de combinación de Klein-Maskit [56], tenemos que

$$\widehat{K}_p = \langle T, W, J, \sigma : T^2 = W^3 = (WT)^2 = J^2 = (TJ)^2 = \sigma^2 = (\sigma T)^2 = \sigma W \sigma W^{-1} = (\sigma J)^2 = 1 \rangle.$$

El grupo Kleiniano planar  $\widehat{K}_p$  tiene un dominio de discontinuidad conexo  $\Omega$  y un dominio fundamental determinado por la región acotada por los círculos unitario, los rayos de argumentos  $\frac{\pi i}{3}$  y  $\frac{-\pi i}{3}$ , respectivamente, y el círculo  $C$ , ortogonal al círculo unitario, conteniendo los puntos  $p$  y  $\frac{1}{p}$  (ver figura 13.1). La superficie de Klein uniformizada por  $\widehat{K}$  es un disco cerrado con exactamente cuatro valores de ramificación en su borde, cuyos ordenes son 2, 2, 2 y 3.

**Teorema 13.2.1.** — Sea  $X$  una superficie de Klein la cual es topológicamente un disco cerrado con exactamente cuatro valores de ramificación sobre su borde, cuyos valores de ramificación son 2, 2, 2 and 3. Entonces existe un valor de  $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$  tal que  $\Omega(K_p)/K_p$  es dianalíticamente equivalente a  $X$ .

*Demonstración.* — Esto es consecuencia de la teoría de funciones casiholomorfas y el hecho que los puntos fijos de reflexiones son círculos Euclidianos.  $\square$

El subgrupo de índice dos  $K_p$  de  $\widehat{K}_p$  consistiendo de las transformaciones holomorfas está generado por  $T$ ,  $W$  y  $J$ . Una presentación para  $K_p$  es

$$K_p = \langle T, W, J : T^2 = W^3 = (WT)^2 = J^2 = (TJ)^2 = 1 \rangle,$$

es decir, isomorfo al producto libre amalgamado del grupo dihedral  $D_3 = \langle T, W \rangle$  con el grupo de Klein  $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2 = \langle T, J \rangle$  sobre el grupo cíclico de orden dos generado por  $T$ . La superficie de Riemann  $\Omega/K_p$  es la esfera de Riemann con cuatro valores de ramificación de ordenes 2, 2, 2 and 3, todos ellos contenidos en el círculo de puntos fijos de la reflexión inducida por  $\sigma$ . Un dominio fundamental para  $K_p$  puede ser tomado como la unión del dominio fundamental para  $\widehat{K}_p$  con su trasladado por  $\sigma$  y los puntos del círculo unitario localizados entre  $e^{\frac{\pi i}{3}}$  y  $e^{-\frac{\pi i}{3}}$ .

**Observación 13.2.2.** — (1) En el caso frontera  $p = 2 - \sqrt{3}$ ,  $\widehat{K}_p$  uniformiza un triángulo hiperbólico con un vértice al infinito, un vértice con ángulo  $\frac{\pi}{3}$  y el otro con ángulo  $\frac{\pi}{2}$ . El grupo  $K_p$  uniformiza en este caso el plano complejo con dos valores de ramificación de ordenes 2 y 3, respectivamente.  
 (2) Para  $p = 1$ ,  $\widehat{K}_p$  es sólo generado por las reflexiones  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma$ , pero actuando en la esfera pinchada en tres puntos (los puntos de contacto de los círculos de puntos fijos). En este caso, el grupo  $\widehat{K}_p$  uniformiza el disco cerrado con tres valores de ramificación sobre su borde, cuyos ordenes son 2, 3 y  $\infty$ , respectively.

PROBLEMAS. —

1.- Determinar varios subgrupos de índice finito y normales del grupo  $\widehat{K}_p$ .

### 13.3. Superficies maximales simétricas de género 2

**13.3.1. Tipos diferentes de acciones topológicas.** — Tenemos exactamente dos posibles acciones topológicas de  $K(S, \tau)$  para  $S$  maximal simétrica y  $\tau$  una reflexión maximal de  $S$ , en el caso que  $S$  tenga género dos. En ambos casos,  $S/\tau$  es orientable; un toro con un borde ó una esfera con tres bordes.

**Ejercicio.** Verificar lo anterior.

Estas superficies corresponden a las siguientes dos familias de curvas algebraicas :

$$y^2 = (x^3 - \lambda^3)(x^3 - 1/\lambda^3)$$

donde una familia corresponde a  $\lambda > 1$  y la otra a  $\lambda = e^{i\theta}$ ,  $\theta \in (0, \pi/3)$ . En este caso,  $K(S, \tau) = \langle \tau, j, \alpha, \beta \rangle$ , donde

$$\tau = \begin{pmatrix} x \mapsto 1/\bar{x} \\ y \mapsto \bar{y}/\bar{x}^3 \end{pmatrix}; j = \begin{pmatrix} x \mapsto x \\ y \mapsto -y \end{pmatrix};$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} x \mapsto e^{2\pi i/3}x \\ y \mapsto y \end{pmatrix}; \beta = \begin{pmatrix} x \mapsto 1/x \\ y \mapsto y/x^3 \end{pmatrix}$$

**Observación 13.3.1.** — La superficie correspondiente a  $\theta = \pi/6$ , isomorfa a

$$y^2 = x^6 - 1,$$

tiene el automorfismo extra

$$\alpha^{1/2} = \begin{pmatrix} x \mapsto e^{\pi i/3}x \\ y \mapsto y \end{pmatrix}$$

y, en particular,

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} x \mapsto \bar{x} \\ y \mapsto \bar{y} \end{pmatrix}; j^{1/2} = \begin{pmatrix} x \mapsto 1/x \\ y \mapsto iy/x^3 \end{pmatrix}$$

Procederemos a uniformizar tales superficies usando grupo de Schottky y además calcularemos sus matrices de Riemann.

**13.3.2. Uniformizaciones de Schottky y matrices de Riemann.** — Tomemos el grupo  $\widehat{K} = \widehat{K}_p$ , para  $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$ . Consideremos las transformaciones de Möbius :  $A_1 = JW JW^{-1}$ ,  $A_2 = JW^{-1} JW$ ,  $B_1 = (\sigma_3 \sigma_2)^2$  y  $B_2 = \sigma_1 B_1 \sigma_1$ . Los grupos  $G_2 = \langle A_1, A_2 \rangle$  y  $F_2 = \langle B_1, B_2 \rangle$  resultan ser grupos de Schottky clásicos de género dos con un dominio fundamental estándar la región acotada por los círculos  $W(C)$ ,  $J(W(C))$ ,  $W^{-1}(C)$  y  $J(W^{-1}(C))$ .

Ya que  $WA_1W^{-1} = A_1^{-1}A_2$ ,  $WA_2W^{-1} = A_1^{-1}$ ,  $JA_1J = A_1^{-1}$ ,  $JA_2J = A_2^{-1}$ ,  $TA_1T^{-1} = A_2$ ,  $TA_2T = A_1$ ,  $\sigma A_1\sigma = A_1$ ,  $\sigma A_2\sigma = A_2$ ,  $WB_1W^{-1} = B_1^{-1}B_2$ ,  $WB_2W^{-1} = B_1^{-1}$ ,  $JB_1J = B_2^{-1}$ ,  $JB_2J = B_1^{-1}$ ,  $TB_1T = B_2$ ,  $TB_2T = B_1$ ,  $\sigma B_1\sigma = B_1$  y  $\sigma B_2\sigma = B_2$ , tenemos que ambos grupos  $G_2$  y  $F_2$  son subgrupos normales de  $\widehat{K}$ . Más aún, para  $Q \in \{G_2, F_2\}$ ,  $\widehat{K}/Q \cong D_3 + \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$  y  $K/Q \cong D_3 + \mathbb{Z}_2$ . En particular, la superficie de Riemann de género dos  $S_2 = \Omega/G_2$  (respectivamente,  $R_2 = \Omega/F_2$ ) admite el grupo  $\widehat{K}/G_2$  (respectivamente,  $\widehat{K}/F_2$ ) como grupo de automorfismos, con  $K/G_2$  (respectivamente,  $K/F_2$ ) como su subgrupo de índice dos consistiendo de los automorfismos holomorfos. El cociente  $S_2/(\widehat{K}/G_2)$  (respectivamente,  $R_2/(\widehat{K}/F_2)$ ) es un disco cerrado con cuatro valores de ramificación sobre su borde, cuyos ordenes son 2, 2, 2 y 3.

**Teorema 13.3.2.** — Sea  $S$  una superficie de Riemann maximal simétrica de género dos con una reflexión maximal  $\tau : S \rightarrow S$  tal que  $S/\tau$  es orientable. Entonces  $S$  puede ser uniformizada por  $G_2$  ó  $F_2$  para un valor de  $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$ .

*Demonstración.* — Fijemos un valor de  $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$  y sea  $K = K_p$  el grupo correspondiente. Sea  $S$  una superficie de Riemann maximal simétrica de género dos y una reflexión maximal  $\tau : S \rightarrow S$  como en la hipótesis. La acción topológica de  $K(S, \tau)$  está reflejada por  $G_2$  o por  $F_2$  (esto porque sólo hay dos posibles acciones). Supongamos que esta acción está reflejada por  $G_2$  (el argumento será similar para la otra situación). Tomemos  $S_2 = \Omega/G_2$  y sea  $f : S_2 \rightarrow S$  un difeomorfismo que preserva orientación tal que  $f\widehat{K}/G_2f^{-1} = K(S, \tau)$ . En este caso, tenemos por la compacidad de  $S$  que  $f$  es un difeomorfismo casiholomorfo, con diferencial de Beltrami  $\mu$ . Procedamos a levantar  $\mu$  a  $\Omega$  y extendámosla a toda la esfera como cero en el conjunto límite de  $\widehat{K}$ . Sea  $W : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  un homeomorfismo casiholomorfo con coeficiente de Beltrami  $\mu$ . Entonces  $W\widehat{K}W^{-1}$  es de nuevo un grupo generado por reflexiones. Podemos asumir que  $W$  fija  $0, 1$  y  $\infty$ . Ya que los puntos fijos de una reflexión es un círculo Euclideano, tenemos que el grupo  $W\widehat{K}W^{-1}$  es uno de los grupos  $\widehat{K}$  para cierto valor de  $q \in (2 - \sqrt{3}, 1)$ . Si denotamos por  $\pi : \Omega \rightarrow \Omega/G_2$  el cubrimiento holomorfo inducido por  $G_2$ , entonces tenemos que  $f\pi W^{-1} : \Omega(W\widehat{K}W^{-1}) \rightarrow S$  es una uniformización de  $S$  por el correspondiente grupo de Schottky  $G_2$ . Además, el levantamiento del grupo  $K(S, \tau)$  es exactamente  $W\widehat{K}W^{-1}$ . □

**Teorema 13.3.3.** — *Sea  $S$  una superficie de Riemann maximal simétrica de género dos con una reflexión maximal  $\tau : S \rightarrow S$  tal que  $S/\tau$  es un toro con un borde. Sea  $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$  tal que  $S = \Omega/G_2$ . Sean  $q_1 = e^{(\frac{2\pi}{3}-\theta)i}$ ,  $q_2 = J(q_1)$  y  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  tal que  $\cos \theta = \frac{2p}{1+p^2}$ . Entonces, una Riemann matrix de  $S$  es*

$$Z = R(w) \begin{bmatrix} 8w^2 + 4w(1 + 3w^2)i & -2(1 + 5w^2) - 2w(3w^2 - 1)i \\ -2(1 + 5w^2) - 2w(3w^2 - 1)i & 8w^2 + 4w(1 + 3w^2)i \end{bmatrix},$$

donde  $R(w) = (1 + 10w^2 + 9w^4)^{-1}$  y  $w > 0$  es tal que

$$\begin{cases} \frac{4w(1 + 3w^2)}{1 + 10w^2 + 9w^4} = \frac{1}{2\pi} \text{Log} \left( \prod_{\gamma \in G_\theta} \frac{|\gamma(q_2) - A_1^{-1}(\infty)|}{|\gamma(q_1) - A_1^{-1}(\infty)|} \right); \\ \frac{-2w(3w^2 - 1)}{1 + 10w^2 + 9w^4} = \frac{1}{2\pi} \text{Log} \left( \prod_{\gamma \in G_\theta} \frac{|\gamma(q_2) - A_2^{-1}(\infty)|}{|\gamma(q_1) - A_2^{-1}(\infty)|} \right). \end{cases}$$

*Demonstración.* — Sean  $\alpha_1 = W(C)$ ,  $\alpha'_1 = J(\alpha_1)$ ,  $\alpha_2 = W^{-1}(C)$  y  $\alpha'_2 = J(\alpha_2)$ . Orientemos los círculos  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha'_1$  y  $\alpha'_2$  como se muestra en la figura 13.2. También consideremos los arcos simples orientados  $\beta_1$  y  $\beta_2$ , también mostrados en la figura 13.2. La proyección de esas curvas cerradas y arcos orientables se proyectan en una base simpléctica para la superficie de Riemann  $S_2$ .

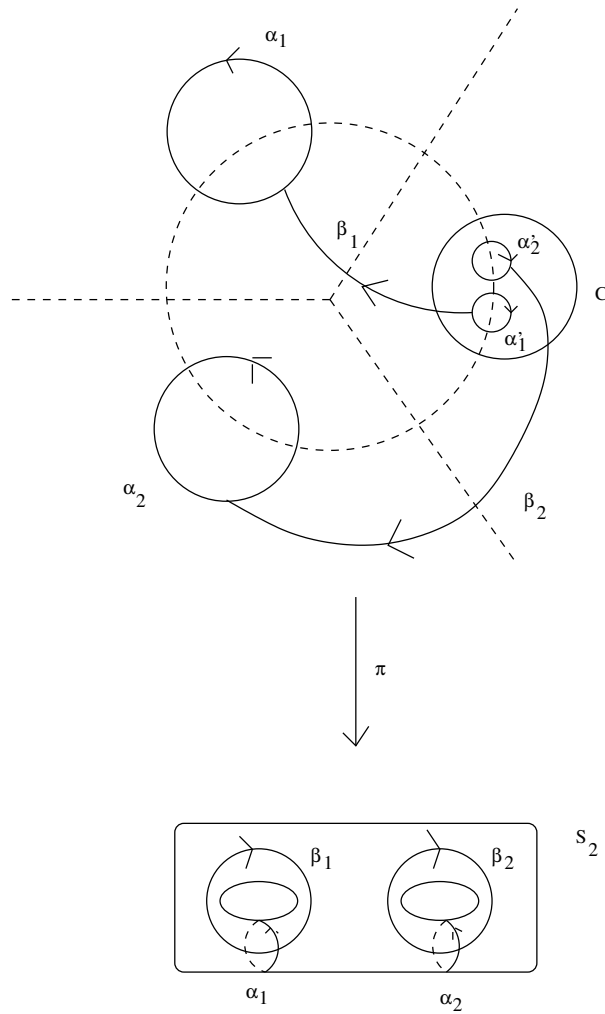


FIGURA 13.2. Arcos para  $G_2$

De esta manera, obtenemos una representación simpléctica inyectiva (fiel)

$$\rho : \widehat{K}/G_2 \rightarrow \widetilde{\text{Sp}}(4; \mathbb{Z})$$

definida por

$$\rho(\sigma) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho(J) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \rho(W) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ a & b & -1 & -1 \\ c & d & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de Riemann  $Z = X + iY \in \mathcal{H}_2$  de  $S_2$  definida por la base simpléctica anterior es un puntos fijo del grupo simpléctico  $\rho(\widehat{K}/G_2)$ . De aquí se sigue que :  $a = -1, b = 0, c = 0, d = 1$ , and

$$-Z^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + i\frac{\tau}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

donde  $\tau > 0$ .

De esta manera, la matriz  $Z$  tiene la forma deseada y los resultados de Burnside [17] descritos anteriormente en la sección 8.3 pueden ser usados en este caso para el grupo  $G_2$  para calcular el valor de  $w$  en función de  $p$  como está descrito en el teorema. □

**Observación 13.3.4.** — En el caso  $p = 2 - \sqrt{3}$ , el grupo  $G_2$  resulta ser un grupo de Schottky anodado de género dos uniformizando una superficie stable de género dos con exactamente un nodo que divide. En el caso  $p = 1$ , podemos pensar que el grupo  $G_2$  como el grupo trivial actuando en la esfera pinchada en tres puntos, esto es, uniformizando la esfera pinchada en tres puntos.

**Teorema 13.3.5.** — Sea  $S$  una superficie de Riemann maximal simétrica de género dos con una reflexión maximal  $\tau : S \rightarrow S$  tal que  $S/\tau$  es una esfera con tres bordes. Sea  $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$  tal que  $S = \Omega/F_2$ . Sean  $q_1 = e^{(\frac{2\pi}{3} - \theta)i}$ ,  $p_2 = \sigma_3(q_1)$  y  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  tal que  $\cos \theta = \frac{2p}{1+p^2}$ . Entonces, una matriz de Riemann para  $S$  es dada por

$$Z = \frac{i\mu}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

donde

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \text{Log} \left( \prod_{\gamma \in F_\theta} \frac{|\gamma(p_2) - B_1^{-1}(\infty)|}{|\gamma(q_1) - B_1^{-1}(\infty)|} \right).$$

*Demonstración.* — Sean  $\alpha_1 = W(C)$ ,  $\alpha'_1 = \sigma_3(\alpha_1)$ ,  $\alpha_2 = W^{-1}(C)$  y  $\alpha'_2 = \sigma_3(\alpha_2)$ . Si orientamos los círculos  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha'_1, \alpha'_2$ , y consideramos los arcos orientados  $\beta_1$  y  $\beta_2$  como se muestra en la figura 13.3, entonces la proyección de esas curvas cerradas y arcos orientados determina una base simpléctica en la superficie de Riemann  $R_2$ . Obtenemos de esta manera una representación fiel

$$\rho : \widehat{K}/F_2 \rightarrow \widetilde{\text{Sp}}(4; \mathbb{Z})$$



definida por

$$\rho(\sigma) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho(J) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \rho(W) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ a & b & -1 & -1 \\ c & d & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de Riemann  $Z = X + iY \in \mathcal{H}_2$  de  $R_2$ , definida por la base simpléctica anteriormente construida, es un punto fijo para el grupo simpléctico  $\rho(\widehat{K}/F_2)$ . Se sigue que  $a = b = c = d = 0$ , y

$$-Z^{-1} = \frac{i\tau}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

donde  $\tau = 3\mu/4 > 0$ .

De nuevo los resultados de la sección 8.3 determina el valor de  $\mu$  como se desea. □

- Observación 13.3.6.** — (1) En el caso  $p = 2 - \sqrt{3}$ , el grupo  $F_2$  es un grupo de Schottky anodado de género dos uniformizando una superficie de Riemann estable de género dos con exactamente tres nodos (cada uno de ellos no dividiendo). En el caso  $p = 1$ , podemos pensar que el grupo  $F_2$  actúa trivialmente en la esfera pinchada entre tres puntos, luego uniformizando esta.
- (2) Notemos en este punto que los resultados en [21] (ver también el trabajo de González-Díez [25]) nos permite describir la curva algebraica (usando funciones theta) de las superficies  $S_2$  y  $R_2$  en función de  $w$  y, en particular, de  $p$ . De esta manera, podemos obtener una relación explícita entre los grupos de Schottky  $G_2$ ,  $F_2$  y las respectivas curvas algebraicas.
- (3) Es importante notar a este punto que usando Theta características [21] podemos describir la curva algebraica en función de  $w$  y luego en función de  $p$ . De esta manera podemos obtener relaciones explícitas entre la uniformización de Schottky dada por los grupos de Schottky  $G_2$ ,  $F_2$  y las respectivas curvas algebraicas. La función holomorfa

$$F : \Omega \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} : z \mapsto \frac{\widehat{w}_1(z)}{\widehat{w}_2(z)}$$

nos da un cubrimiento holomorfo ramificado para el grupo  $\langle j, WjW^{-1}, W^{-1}jW \rangle$ , donde  $j(z) = \sigma_3\sigma_1(z)$ . El cubrimiento holomorfo ramificado  $F$  es un levantamiento del cubrimiento holomorfo ramificado de grado dos  $S = \Omega/J \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$

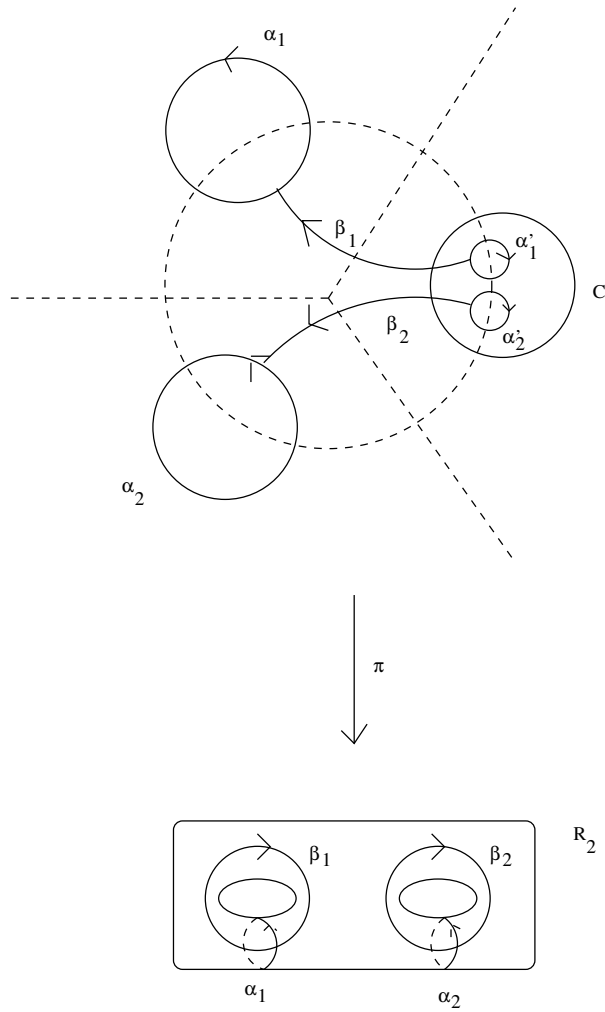


FIGURA 13.3. Arcos para  $F_2$

inducido por la involución hiperelíptica. De aquí obtenemos que una curva algebraica que define  $S$  es dada por

$$y^2 = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)(x - e)(x - f)$$

$$\text{donde } \begin{cases} a = F(p) \\ b = F(W(p)) \\ c = F(W^2(p)) \\ d = F(\frac{1}{p}) \\ e = F(W(\frac{1}{p})) \\ f = F(W^2(\frac{1}{p})) \end{cases}$$

### 13.4. Superficies maximales simétricas de género 3

**13.4.1. Tipos diferentes de acciones topológicas.** — Consideremos una superficie de Riemann maximal simétrica  $S$  de género 3 con una reflexión maximal  $\tau : S \rightarrow S$ . Tenemos que  $K^+(S, \tau)$  es un grupo de automorfismos holomorfos de orden 24 tal que  $S/K^+(S, \tau)$  es la esfera de Riemann con exactamente cuatro valores de ramificación de ordenes 2, 2, 2 y 3. Más aún, existe una reflexión  $\eta : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , inducida por  $\tau$ , tal que esos valores de ramificación están contenidos en el círculo de puntos fijos de  $\eta$ . Ya que  $S$  no puede ser hiperelíptica, el grupo holomorfo  $K^+(S, \tau)$  es isomorfo al grupo de permutaciones de cuatro letras  $\mathcal{S}_4$  [76] y además esta acción es topológicamente rígida. Sean  $R = S\tau$  y  $H_{24} = K(S, \tau)/\tau$  el grupo de automorfismos inducidos en la superficie de Klein  $R$ . Entonces tenemos que, módulo homeomorfismos,  $R$  puede ser uno de los siguientes :

- (i) Un toro con dos bordes ;
- (ii) Una esfera con cuatro bordes ;
- (iii) La suma conexa de toro con un plano proyectivo y con un borde ;
- (iv) La suma conexa de dos planos proyectivos y con un borde ; y
- (v) un plano proyectivo con tres bordes.

**Teorema 13.4.1.** — *Las únicas posibilidades para  $R$  son dadas por los casos (ii) y (v), esto es, sólo existen dos acciones topológicamente diferentes de  $K(S, \tau)$ . Más aún, si denotamos por  $\tau_1$  y  $\tau_2$  las dos posibles acciones topológicas de  $\tau$ , entonces  $K(S, \tau_1)$  y  $K(S, \tau_2)$  no son isomorfos como grupos abstractos.*

*Demonstración.* — Primero procederemos a ver que los casos (i), (iii) y (iv) no son posibles.

(1) Caso(i) : En esta situación, tendríamos la existencia de una superficie de género uno con dos puntos distinguidos  $p \neq q$  y un grupo de automorfismos holomorfo/antiholomorfo  $H_{24}$  de orden 24 actuando transitivamente en  $\{p, q\}$ . Dentro de  $H_{24}$  tenemos un subgrupo de índice dos  $H_{12}$  consistiendo de automorfismos holomorfos. Las posibilidades para el estabilizador de  $p$  en este subgrupo son : (1) un grupo cíclico de orden 12, el cual no es posible ; o (2) un grupo cíclico de orden 6. En este caso, un tal grupo cíclico debe también estabilizar el punto  $q$ . Pero en género uno no todo grupo cíclico de orden 6 de automorfismos holomorfos tiene a lo más un punto fijo.

(2) Caso (iii) : Consideremos el cubrimiento doble orientable  $X$  de  $R$ . Tenemos entonces que  $X$  es una superficie de Riemann de género dos con exactamente dos bordes admitiendo un automorfismo antiholomorfo de orden dos  $\eta : X \rightarrow X$ , actuando sin puntos fijos, tal que  $R = X/\eta$ . Podemos levantar  $H_{24}$  a un grupo de automorfismos holomorfos/antiholomorfos de  $X$ , de orden 48, denotado por  $K_{48}$ . Es claro que  $K_{48}$  debe contener  $\eta$  (levantamiento de la identidad). Dentro

$K_{48}$  tenemos un subgrupo de índice dos de  $K_{24}$  consistiendo de automorfismos holomorfos de  $X$ . Esto nos daría la existencia de una superficie de Riemann de género 2 con dos puntos distinguidos  $p \neq q$  tal que  $\{p, q\}$  es invariante por la acción del grupo  $K_{24}$ . Se sigue que el estabilizador de  $p$  sólo podría ser un grupo cíclico de orden 24 ó 12. Ambas situaciones contradicen el hecho que en género dos todo automorfismo tiene orden menor o igual a 10.

(3) Caso (iv) : Similar al caso (2) con  $X$  una superficie de Riemann de género uno con cuatro bordes. En este caso, tendríamos la existencia de una superficie de Riemann de género uno con cuatro puntos distinguidos  $p_1, p_2, p_3$  y  $p_4, p_i \neq p_j$ , y un grupo de orden 24 de automorfismos holomorfos de esta, dejando invariante  $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ . De nuevo, el estabilizador en este grupo de  $p_j$  no puede ser un grupo cíclico de orden 24 ó 12. En particular, el estabilizador de  $p_j$  es un grupo cíclico de orden 6. Pero en este caso el estabilizador  $T_6 = \langle t : t^6 = 1 \rangle$  de  $p_1$  permuta los otros tres puntos. Se sigue que o bien  $T_6$  estabiliza uno de esos otros tres puntos, lo cual es imposible, ó  $h = t^2$  fija cuatro puntos diferentes, lo cual también se sabe que es imposible en una superficie de Riemann de género uno.

La segunda parte es mostrar que los casos (ii) y (v) son posibles. Esto será hecho en la siguiente subsección. También se deducirla última parte del teorema directamente de tal construcción. □

**Observación 13.4.2.** — Las superficies de Riemann maximales simétricas de género 3 son algebraicamente descritas por las siguientes curvas en el plano proyectivo complejo  $\mathbb{P}_2$  [69] :

$$S : x^4 + y^4 + z^4 + \lambda(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = 0,$$

donde  $\lambda \in (-\infty, -2)$  para el caso (v) y  $\lambda \in (-2, -1)$  para el caso (ii). La reflexión  $\tau$  es dada por  $\tau[x : y : z] = [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}]$ , y  $K^+(S, \tau)$  es el grupo simétrico en cuatro letras  $S_4$  generado por las siguientes transformaciones proyectivas

$$a = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**13.4.2. Uniformizaciones de Schottky y matrices de Riemann.** — Consideremos el grupo  $\widehat{K} = \widehat{K}_p$ , para  $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$ . Sea  $G_3$  el grupo generado por las transformaciones  $A_1 = (\sigma_p \sigma_2)^3$ ,  $A_2 = WA_1W^{-1}$  and  $A_3 = W^{-1}A_1W$ , y  $F_3$  el grupo generado por las transformaciones  $B_1 = \sigma \sigma_p \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_p \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2$ ,  $B_2 = WB_1W^{-1}$  and  $B_3 = W^{-1}B_1W$ .

**Teorema 13.4.3.** — *Los grupos  $G_3$  y  $F_3$  son subgrupos normales de  $\widehat{K}$ , ambos de índice 48. Más aún, cada uno de ellos es un grupo de Schottky clásico de género 3.*

*Demonstración.* — Es fácil ver que esos grupos son de Schottky clásicos y género 3, con dominio fundamental acotado por los círculos  $C_1 = \sigma_p(\sigma_2(C))$ ,  $C_6 = \sigma_1(C_1)$ ,  $C_2 = W(C_6)$ ,  $C_3 = W(C_1)$ ,  $C_5 = W^{-1}(C_1)$  y  $C_4 = W^{-1}(C_6)$ , donde  $C = \text{Fix}(\sigma_p)$ .

Si mostramos que ellos son subgrupos normales, entonces un cálculo directo muestra que  $\widehat{K}/G_3$  y  $\widehat{K}/F_3$  son grupos de orden 48 no-isomorfos.

Es fácil verificar que :

$$\begin{aligned}
 (1) \sigma_1 A_1 \sigma_1 &= A_3^{-1}, & (2) \sigma_1 A_2 \sigma_1 &= A_2^{-1}, \\
 (3) \sigma_2 A_1 \sigma_2 &= A_1^{-1}, & (4) \sigma_2 A_2 \sigma_2 &= A_3^{-1}, \\
 (5) \sigma_p A_1 \sigma_p &= A_1^{-1}, & (6) \sigma_p A_2 \sigma_p &= A_1 A_2 A_3, \\
 (7) \sigma_p A_3 \sigma_p &= A_3^{-1}, & (8) \sigma A_1 \sigma &= A_1, \\
 (9) \sigma A_2 \sigma &= A_2, & (10) \sigma A_3 \sigma &= A_3, \\
 (11) \sigma_1 B_1 \sigma_1 &= B_3^{-1}, & (12) \sigma_1 B_2 \sigma_1 &= B_2^{-1}, \\
 (13) \sigma_2 B_1 \sigma_2 &= B_1^{-1}, & (14) \sigma_2 B_2 \sigma_2 &= B_3^{-1}, \\
 (15) \sigma_p B_1 \sigma_p &= B_3, & (16) \sigma_p B_2 \sigma_p &= B_3^{-1} B_2^{-1} B_1^{-1}, \\
 (17) \sigma B_1 \sigma &= B_1, & (18) \sigma B_2 \sigma &= B_2, \\
 (19) \sigma B_3 \sigma &= B_3,
 \end{aligned}$$

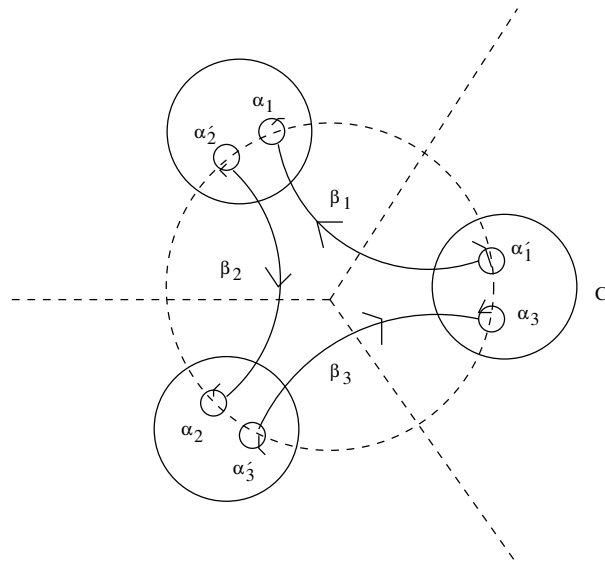
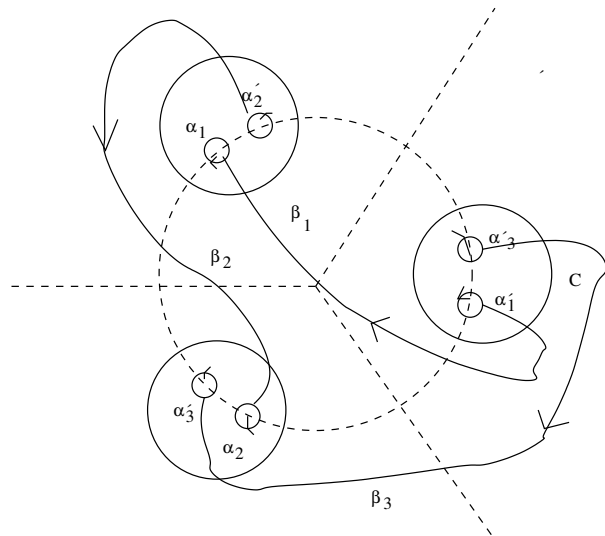
mostrando la normalidad de esos grupos. □

**Teorema 13.4.4.** — *Sea  $S$  una superficie de Riemann maximal simétrica de género 3 admitiendo una reflexión maximal  $\tau : S \rightarrow S$ . (i) Si  $S/\tau$  es orientable, entonces  $S$  puede ser uniformizada por  $G_3$  para un cierto valor de  $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$ ; (ii) Si  $S/\tau$  es no-orientable, entonces  $S$  puede ser uniformizada por  $F_3$  para cierto valor de  $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$ .*

*Demonstración.* — la demostración es exactamente la misma como en el caso de género dos. □

Procedemos a calcular la matrices de Riemann de cada superficie de Riemann maximal simétrica de género 3 con la ayuda de las uniformizaciones de Schottky obtenidas.

Para el grupo  $G_3$  escogamos  $\alpha_1 = C_2$  orientada en el sentido opuesto a las manecillas de un reloj,  $\alpha'_1 = C_1$  con la orientación de  $\alpha_1$  inducida por  $A_1$ . Tomemos  $\alpha_2 = W(\alpha_1)$ ,  $\alpha_3 = W^{-1}(\alpha_1)$ ,  $\alpha'_2 = W(\alpha'_1)$ ,  $\alpha'_3 = W^{-1}(\alpha'_1)$ . Consideremos también arcos simples orientados  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  y  $\beta_3$  como es mostrado en figura 13.4.

FIGURA 13.4. Arcos para  $G_3$ FIGURA 13.5. Arcos para  $F_3$ 

Para el grupo  $F_3$  escogamos  $\alpha_1 = C_3$  orientada en el sentido opuesto a las manecillas de un reloj,  $\alpha'_1 = C_6$  con la orientación inducida por  $B_1$  de la dada a  $\alpha_1$ . Tomemos  $\alpha_2 = W(\alpha_1)$ ,  $\alpha_3 = W^{-1}(\alpha_1)$ ,  $\alpha'_2 = W(\alpha'_1)$ ,  $\alpha'_3 = W^{-1}(\alpha'_1)$ . Consideremos arcos simples orientados  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  y  $\beta_3$  como se muestra en la figura 13.5.

En cada uno de los dos casos mencionados, las curvas cerradas orientadas  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ , y los arcos simples orientados  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  y  $\beta_3$  se proyectan a una base simpléctica en la superficie de Riemann uniformizada  $S$ . Obtenemos entonces representaciones simplécticas

$$\begin{aligned}\theta_1 : \widehat{K}/G_3 &\rightarrow \widetilde{\mathrm{Sp}_6(\mathbb{Z})} \\ \theta_2 : \widehat{K}/F_3 &\rightarrow \widetilde{\mathrm{Sp}_6(\mathbb{Z})}\end{aligned}$$

dadas por :

$$\begin{aligned}\theta_1(\sigma) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \theta_1(T) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ {}^t\theta_1(J) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ {}^t\theta_1(W) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ {}^t\theta_2(\sigma) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \theta_2(T) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$${}^t\theta_2(J) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$${}^t\theta_2(W) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si siguiendo los mismos argumentos hechos para el caso de género dos, uno obtiene :

**Teorema 13.4.5.** — Sea  $S$  una superficie de Riemann maximal simétrica de género 3 con una reflexión maximal  $\tau : S \rightarrow S$  tal que  $S/\tau$  es orientable. Sea  $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$  de manera que  $S = \Omega/G_3$ . Entonces una matriz de Riemann para  $S$  es dada por

$$Z = \frac{it}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

donde

$$t = \frac{1}{\pi} \text{Log} \left( \prod_{\gamma \in G_3} \frac{|\gamma(r_p) - A_1^{-1}(\infty)|}{|\gamma(s_p) - A_1^{-1}(\infty)|} \right),$$

$$r_p = \sigma_p(e^{(\frac{2\pi}{3}-\theta)i}), \quad s_p = \sigma_2(r_p)$$

y  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  satisface  $\cos \theta = \frac{2p}{1+p^2}$ .

**Teorema 13.4.6.** — Sea  $S$  una superficie de Riemann maximal simétrica de género 3 con una reflexión maximal  $\tau : S \rightarrow S$  tal que  $S/\tau$  es no-orientable. Sea  $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$  de manera que  $S = \Omega/F_3$ . Entonces una matriz de Riemann para  $S$  es dada por

$$Z = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} + ti \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

La matriz de Riemann  $-Z^{-1}$  es la matriz de Riemann que corresponde para usar el método de Burnside y obtener el valor de  $t$  en términos de  $p$ .



- Observación 13.4.7.** — (1) En el caso  $p = 2 - \sqrt{3}$ , el grupo  $G_3$  es un grupo de Schottky anodado de género tres uniformizando una superficie de Riemann stable de género tres con exactamente cuatro nodos (cada uno de ellos no dividiendo) y two componentes, cada una de ellas una esfera con cuatro pinchaduras. En el caso  $p = 1$ , podemos pensar que el grupo  $G_3$  actúa de manera trivial en la esfera de Riemann con tres pinchaduras, esto es, uniformizándola. Para  $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$ , el grupo  $G_3$  uniformiza las curvas algebraicas correspondientes a  $\lambda \in (-2, -1)$ ; para  $p = 2 - \sqrt{3}$  este uniformiza la curva algebraica correspondiente a  $\lambda = -1$ ; y para  $p = 1$  este uniformiza la curva algebraica para  $\lambda = -2$ .
- (2) En el caso  $p = 2 - \sqrt{3}$ , el grupo  $F_3$  es un grupo de Schottky anodado de género tres uniformizando una superficie de Riemann stable de género tres con exactamente tres nodos (cada uno de ellos no dividiendo) y una componente (una esfera con seis pinchaduras). En el caso  $p = 1$ , podemos pensar que el grupo  $F_3$  actúa trivialmente en la esfera de Riemann pinchada en tres puntos, esto es, uniformizándola. Para  $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$ , el grupo  $F_3$  uniformiza las curvas algebraicas correspondientes a  $\lambda \in (-\infty, -2)$ ; para  $p = 2 - \sqrt{3}$  este grupo uniformiza la curva algebraica correspondiente a  $\lambda = -\infty$ ; y para  $p = 1$  este uniformiza la curva algebraica para  $\lambda = -2$ .

### 13.5. Superficies de Riemann maximal simétricas de género 5

**13.5.1. Tipos diferentes de acciones topológicas.** — Consideraremos superficies de Riemann maximales simétrica  $S$  de género 5 con una reflexión maximal  $\tau : S \rightarrow S$  tal que  $S/\tau$  es orientable. El caso en que  $S/\tau$  es no-orientable es dejado como un ejercicio.

**Teorema 13.5.1.** — (1) En género 5 hay exactamente dos reflexiones maximales topológicamente diferentes con la condición que el cociente es orientable.

- (2) Sean  $(S_1, \tau_1)$  y  $(S_2, \tau_2)$  dos pares, donde  $S_j$  es una superficie de Riemann maximal simétrica de género 5 y  $\tau_j$  una reflexión maximal de  $S_j$ . Supongamos que  $\tau_1$  y  $\tau_2$  no son topológicamente equivalentes. Entonces los respectivos grupos  $K(S_1, \tau_1)$  y  $K(S_2, \tau_2)$  son no isomorfos como grupos abstractos. Más aún, las acciones respectivas de  $K(S_j, \tau_j)$  son topológicamente rígidas.
- (3) Sea  $S$  una superficie de Riemann maximal simétrica de género 5 con una reflexión maximal  $\tau : S \rightarrow S$ . Entonces existe un subgrupo normal  $L$  de  $K(S, \tau)$ , isomorfo a  $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$ , de automorfismos holomorfos actuando sin puntos fijos tal que  $S/L$  es una superficie de Riemann de género dos.

**Observación 13.5.2.** — En particular, el resultado anterior dice que en el espacio de Módulos de superficies de género 5 hay exactamente dos subvariedades algebraicas reales, cada una de dimensión real uno, determinando las superficies de Riemann maximales simétricas con cociente orientable.

*Demonstración.* — Ya que  $S/\tau$  es orientable, tenemos exactamente tres posibilidades :

- (1)  $S/\tau$  es un toro con cuatro bordes ;
- (2)  $S/\tau$  es una esfera con seis bordes ; y
- (3)  $S/\tau$  es una superficie de género dos con dos bordes.

Como  $\tau$  pertenece al centro de  $K(S, \tau)$ , tenemos que  $K(S, \tau)$  descende a un grupo de automorfismos  $H_{48}$ , de orden 48, del cociente  $S/\tau$ .

- (1)  **$S/\tau$  es un toro con cuatro bordes.** Denotemos por  $H_{48}$  el grupo de orden 48 de automorfismos de  $S/\tau$  inducido por  $H_{96}$ . Si  $H_{48}$  sólo tiene automorfismos holomorfos, entonces esto implicaría la existencia de un grupo de automorfismos holomorfos de orden 48 actuando en una superficie de Riemann de género uno dejando transitivamente invariante un conjunto formado por 4 puntos. Esto diría que el estabilizador de cualquiera de esos cuatro puntos, en tal grupo, es un grupo cíclico de orden 12, lo cual es imposible. Luego,  $H_{48}$  debe contener automorfismos antiholomorfos. Sea  $H_{24}$  el subgrupo de índice dos de  $H_{48}$  consistiendo de automorfismos holomorfos. La acción de tal grupo corresponde (topológicamente) a la acción de un grupo de automorfismos holomorfos de orden 24 en una superficie de Riemann de género uno con cuatro pinchaduras. Esta acción es la única acción del grupo generado por el grupo alternante  $\mathcal{A}_4 = \langle W, T \rangle$  y una involución  $J$ , donde cada pinchadura es fijada por  $J$ . En este caso, la superficie de género uno corresponde a la curva  $y^2 = x^3 - 1$  y el grupo  $H_{48}$  es generado por las transformaciones  $J : (x, y) \rightarrow (x, -y)$ ,  $S : (x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$ ,  $T : (x, y) \rightarrow (\frac{x+2}{x-1}, \frac{3y}{(x-1)^2})$  y  $W : (x, y) \rightarrow (\rho x, y)$ , donde  $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ . El grupo  $H_{24}$  es el grupo alternante generado por  $W$  y  $T$ . En particular, la acción topológica de  $K(S, \tau)$  es única en esta situación y tiene la presentación :  $K(S, \tau) = \langle T, W, J, \tau : T^2 = W^3 = J^2 = \tau^2 = (TW)^2 = (TJ)^2 = (T\tau)^2 = \tau W \tau W^{-1} = (\tau J)^2 = (JWJW^{-1})^2 = (\tau W)^6 = 1 \rangle$ .

Es importante observar que  $K(S, \tau)$  tiene dos involuciones holomorfas (las correspondientes a  $J$  y  $\tau ST$ ), las cuales generan el grupo de Klein  $L = \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$ .  $L$  actúa sin puntos fijos y es un subgrupo normal. La superficie cociente  $S/L$  es una superficie de Riemann de género dos con grupo de automorfismos  $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2 + D_3$ , donde  $D_3$  denota al grupo dihedral de orden 6. Uno de los factores  $\mathbb{Z}$  es generado por la reflexión inducida por  $\tau$ , la cual tiene exactamente una componente de puntos fijos que es una geodésica simple cerrada  $\gamma$ . Tal geodésica  $\gamma$  divide  $S/L$  en dos toros con un borde,  $T_1$  y  $T_2$ . La otra componente  $\mathbb{Z}_2$  es generada por la involución hiperelíptica, y por último,  $D_3$  es el grupo dihedral generado por un automorfismo de orden

3 que deja invariante cada  $T_i$  y una involución holomorfa que permuta  $T_1$  con  $T_2$ .

- (2)  $S/\tau$  es una esfera con seis bordes. Sea  $H_{48}$  el grupo de automorfismos inducido por  $H_{96}$  en este cociente. Si  $H_{48}$  sólo contiene automorfismos holomorfos, entonces esto implicará la existencia de un grupo de transformaciones de Möbius de orden 48, el cual deja transitivamente invariante un conjunto de 6 puntos, lo cual no es posible. Luego,  $H_{48}$  contiene automorfismos antiholomorfos. Denotemos por  $H_{24}$  el subgrupo de índice dos de  $H_{48}$  consistiendo de automorfismos holomorfos. Topológicamente este grupo corresponde a la acción del grupo simétrico  $S_4 = \langle a, b : a^4 = b^2 = (ab)^3 = 1 \rangle$ , donde los seis puntos especiales son exactamente los seis puntos fijos de los elementos de orden 4. Un automorfismo antiholomorfo extra puede ser escogido como una reflexión la cual fija cuatro de esos puntos e intercambia los otros dos. En particular, la acción topológica de  $K(S, \tau)$  es única y tiene presentación :  $K(S, \tau) = \langle a, b, \mu, \tau : a^4 = b^2 = \mu^2 = \tau^2 = (ab)^3 = \tau a \tau a^{-1} = (\tau b)^2 = (\mu \tau)^2 = \mu a \mu a^{-1} = \mu b \mu a^2 b a^2 = 1 \rangle$ .

El grupo  $L = \langle a^2, b a^2 b \rangle \cong \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$  es un subgrupo normal de  $K(S, \tau)$ , el cual actúa sin puntos fijos. El cociente  $S/L$  es una superficie de Riemann de género dos admitiendo el grupo de automorfismos  $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2 + D_3$ . En este caso, uno de los factores  $\mathbb{Z}_2$  está generado por una reflexión (la inducida por  $\tau$ ) la cual tiene exactamente tres componentes de puntos fijos (una M-simetría). Esas tres componentes dividen  $S/L$  en dos esferas con tres bordes,  $S_1$  y  $S_2$ . La otra componente  $\mathbb{Z}_2$  está generado por la involución hiperelíptica, y el factor  $D_3$  está generado por un automorfismo de orden tres que deja invariante cada  $S_i$  y una involución holomorfa que también deja invariante cada  $S_i$ .

- (3)  $S/\tau$  es una superficie de género dos con dos bordes. Sea de nuevo  $H_{48}$  el grupo inducido por  $H_{96}$ . Tenemos que este consiste de automorfismos holomorfos o tiene un subgrupo de índice dos consistiendo de automorfismos holomorfos. En cualquiera de esos dos situaciones, tendremos un grupo de automorfismos holomorfos de orden 48 ó 24 sobre una superficie de Riemann de género dos dejando invariante dos puntos especiales. El estabilizador de cualquiera de esos dos puntos tendría que ser un grupo cíclico de orden 24 ó 12, lo cual no es posible.

En ambos casos (1) y (2), la familia de superficies depende en un parámetro real. Esto es consecuencia del hecho que el espacio de Teichmüller del disco cerrado con cuatro valores de ramificación sobre su borde tiene dimensión real uno.

□

**13.5.2. Uniformizaciones de Schottky y matrices de Riemann.** — Consideremos el grupo  $\hat{K} = \hat{K}_p$  con  $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$ . Sea  $G_5$  (respectivamente,  $F_5$ ) el subgrupo de  $G_2$  (respectivamente,  $F_2$ ), construido en sección 8.2., generado por

los cuadrados de todos los elementos de  $G_2$  (respectivamente,  $F_2$ ), es decir :

$$G_5 = \langle x^2 : x \in G_2 \rangle$$

$$F_5 = \langle x^2 : x \in F_2 \rangle.$$

Ya que  $G_2$  (respectivamente,  $F_2$ ) es un subgrupo normal de índice 24 en  $\widehat{K}$  y  $G_5$  (respectivamente,  $F_5$ ) es normal de índice 4 en  $G_2$  (respectivamente,  $F_2$ ), tenemos que  $G_5$  (respectivamente,  $F_5$ ) es un subgrupo normal de  $\widehat{K}$  de índice 96. El grupo  $G_5$  (respectivamente,  $F_5$ ) es un grupo libre de índice cuatro en el grupo de Schottky  $G_2$  (respectivamente,  $F_2$ ), luego un grupo de Schottky de género 5. Generadores de Schottky para  $G_5$  (respectivamente,  $F_5$ ) son  $D_1 = A_1^2$ ,  $D_2 = A_2^2$ ,  $D_3 = A_1^{-1}A_2^2A_1$ ,  $D_4 = A_1^{-1}A_2^{-1}A_1A_2$  y  $D_5 = A_2^{-1}A_1A_2A_1$  (respectivamente,  $E_1 = B_1^2$ ,  $E_2 = B_2^2$ ,  $E_3 = B_1^{-1}B_2^2B_1$ ,  $E_4 = B_1^{-1}B_2^{-1}B_1B_2$  y  $E_5 = B_2^{-1}B_1B_2B_1$ ).

**Teorema 13.5.3.** — Si  $S$  es una superficie de Riemann maximal simétrica de género cinco con una reflexión maximal  $\tau : S \rightarrow S$  tal que  $S/\tau$  es orientable, entonces esta puede ser uniformizada por  $G_5$  ó  $F_5$  para algún  $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$ .

*Demonstración.* — La demostración es la misma que la hecha para el caso de género dos. □

**Observación 13.5.4.** — En el caso  $p = 2 - \sqrt{3}$ , el grupo  $G_5$  es un grupo de Schottky anodado que uniformiza una superficie estable de género cinco con exactamente cuatro nodos (cada uno de ellos no dividiendo) y dos componentes, cada una de ellas una superficie de género uno. De manera similar, el grupo  $F_5$  es un grupo de Schottky anodado que uniformiza una superficie estable de género cinco con exactamente seis nodos (cada uno de ellos no dividiendo) y dos componentes, cada una de ellas una esfera.

Un dominio fundamental estándar para  $G_5$  (respectivamente,  $F_5$ ) respecto a los generadores de Schottky dados anteriormente es determinado por la región acotada por los círculos  $\theta_1 = A_1^{-1}(\alpha_1)$ ,  $\theta'_1 = \alpha'_1$ ,  $\theta_2 = A_2^{-1}(\alpha_2)$ ,  $\theta'_2 = \alpha'_2$ ,  $\theta_3 = A_1^{-1}A_2^{-1}(\alpha_2)$ ,  $\theta'_3 = A_1^{-1}(\alpha'_2)$ ,  $\theta_4 = A_2^{-1}(\alpha_1)$ ,  $\theta'_4 = A_1^{-1}A_2^{-1}(\alpha'_1)$ ,  $\theta_5 = A_1^{-1}A_2^{-1}(\alpha_1)$  y  $\theta'_5 = A_2^{-1}(\alpha'_1)$  (respectivamente,  $\theta_1 = B_1^{-1}(\alpha_1)$ ,  $\theta'_1 = \alpha'_1$ ,  $\theta_2 = B_2^{-1}(\alpha_2)$ ,  $\theta'_2 = \alpha'_2$ ,  $\theta_3 = B_1^{-1}B_2^{-1}(\alpha_2)$ ,  $\theta'_3 = B_1^{-1}(\alpha'_2)$ ,  $\theta_4 = B_2^{-1}(\alpha_1)$ ,  $\theta'_4 = B_1^{-1}B_2^{-1}(\alpha'_1)$ ,  $\theta_5 = B_1^{-1}B_2^{-1}(\alpha_1)$  y  $\theta'_5 = B_2^{-1}(\alpha'_1)$ ).

Podemos dotar a las curvas  $\theta_k$  de las orientaciones determinadas por las orientaciones dadas en 8.2., a las curvas  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha'_1$  y  $\alpha'_2$ . Escojamos los siguientes arcos simples :  $\delta_1 = \beta_1 \cup A_1^{-1}(\beta_1)$ ,  $\delta_2 = \beta_2 \cup A_2^{-1}(\beta_2)$ ,  $\delta_3 = A_1^{-1}(\delta_2)$  (respectivamente,  $\delta_1 = \beta_1 \cup B_1^{-1}(\beta_1)$ ,  $\delta_2 = \beta_2 \cup B_2^{-1}(\beta_2)$ ,  $\delta_3 = B_1^{-1}(\delta_2)$ ), con las orientaciones determinadas por las dadas en 8.2., a los arcos  $\beta_1$  y  $\beta_2$ . Para  $j = 4, 5$ , escogemos arcos simples orientados y disjuntos  $\delta_j$  contenidos dentro





$${}^t\rho(W)^t = {}^t\eta(W) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} & w_{15} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} & w_{25} \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} & w_{35} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & w_{41} & w_{42} & w_{43} & w_{44} & w_{45} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & w_{51} & w_{52} & w_{53} & w_{54} & w_{55} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

**Teorema 13.5.5.** — Sea  $S$  una superficie de Riemann maximal simétrica de género 5 con reflexión maximal  $\tau : S \rightarrow S$  tal que  $S/\tau$  es una superficie de género uno con cuatro bordes. Sea  $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$  de manera que  $S = \Omega/G_5$ . Entonces una matriz de Riemann para  $S$  es dada por

$$Z = X + iY,$$

donde

$$X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 2u+v & u+v & u+v & v & 2(u+v) \\ u+v & 2u+v & 2u+3v & -v & u+2v \\ u+v & 2u+3v & 2u+v & v & u \\ v & -v & v & -3v & 2v \\ 2(u+v) & u+2v & u & 2v & 2u \end{bmatrix}.$$

**Teorema 13.5.6.** — Sea  $S$  una superficie de Riemann maximal simétrica de género 5 con una reflexión maximal  $\tau : S \rightarrow S$  tal que  $S/\tau$  es de género cero con seis bordes. Sea  $p \in (2 - \sqrt{3}, 1)$  de manera que  $S = \Omega/F_5$ . Entonces una matriz de Riemann para  $S$  es dada por :

$$Z = i \begin{bmatrix} 2u+v & u+v & u+v & v & 2(u+v) \\ u+v & 2u+v & 2u+3v & -v & u+2v \\ u+v & 2u+3v & 2u+v & v & u \\ v & -v & v & -3v & 2v \\ 2(u+v) & u+2v & u & 2v & 2u \end{bmatrix}.$$

*Demostración de los Teoremas 13.5.5 y 13.5.6.* — (1) Verifiquemos el Teorema 13.5.5. La matriz de Riemann  $Z = X + iY \in \mathcal{H}_5$  para  $S_5$  definida por la base simpléctica antes considerada es un punto fijo del grupo simpléctico  $\rho(\widehat{K}/G_5)$ . Los cálculos muestran que :  $t_{nm} = j_{nm} = 0$ ,  $w_{11} = w_{15} = -w_{21} = -w_{22} =$

$-w_{31} = -w_{32} = w_{41} = w_{45} = -1$ ,  $w_{22} = w_{23} = w_{24} = w_{31} = w_{24} = w_{25} = w_{31} = w_{34} = w_{35} = w_{41} = w_{42} = w_{43} = w_{44} = w_{45} = w_{52} = w_{53} = w_{54} = 0$ , y  $Z$  como se desea con  $0 < -v < u$ .

(2) Ahora verifiquemos el Teorema 13.5.6. La matriz de Riemann  $Z = X + iY \in \mathcal{H}_5$  para  $R_5$  definida por la base simpléctica antes considerada es un punto fijo del grupo simpléctico  $\eta(\widehat{K}/F_5)$ . Obtenemos entonces que  $t_{nm} = j_{nm} = w_{nm} = 0$ , y  $Z$  como se desea con  $0 < -v < u$ . □

**Observación 13.5.7.** — En ambos Teoremas, la matriz de Riemann a usar para el método de Burnside es  $-Z^{-1}$  para obtener los valores  $u$  y  $v$  en términos explícitos de  $p$ . Como ya tenemos relaciones para los casos de género 2, procederemos a usar tal información. Consideremos el cubrimiento regular  $P : S_5 \rightarrow S_2$  (respectivamente,  $P : R_5 \rightarrow R_2$ ), cuyo grupo de cubrimiento es el grupo de Klein  $\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$  generado por los automorfismos de  $S_5$  (respectivamente,  $R_5$ ) inducidos por  $A_1$  and  $A_2$  (respectivamente,  $B_1$  and  $B_2$ ). Tenemos que la transformación  $H_1(P) : H_1(S_5, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S_2, \mathbb{Z})$  (respectively,  $H_1(P) : H_1(R_5, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(R_2, \mathbb{Z})$ ) es dada por :

- (1)  $H_1(P)(\theta_1) = H_1(P)(\theta_4) = H_1(P)(\theta_5) = \alpha_1$ ,
- (2)  $H_1(P)(\theta_2) = H_1(P)(\theta_3) = \alpha_2$ ,
- (3)  $H_1(P)(\delta_1) = H_1(P)(\delta_5) = 2\beta_1$ ,
- (4)  $H_1(P)(\delta_2) = H_1(P)(\delta_3) = 2\beta_2$  y
- (5)  $H_1(P)(\delta_4) = 0$ .

Denotemos por  $w_1$  y  $w_2$  las 1-formas holomorfas duales de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , respectivamente, para la superficie de Riemann  $S_2$  (respectivamente,  $R_2$ ). Similarmente, denotemos por  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$  y  $\eta_5$  las 1-formas holomorfas duales de  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_3$  y  $\theta_5$ , respectivamente, para la superficie de Riemann  $S_5$  (respectivamente,  $R_5$ ). El "pull-back" de las 1-formas holomorfas  $P^* : H^{1,0}(S_2) \rightarrow H^{1,0}(S_5)$  (respectivamente,  $P^* : H^{1,0}(R_2) \rightarrow H^{1,0}(R_5)$ ) está definida en este caso por  $P^*(w_1) = \eta_1 + \eta_4 + \eta_5$  y  $P^*(w_2) = \eta_2 + \eta_3$ . Usando la igualdad

$$4(u+v)i = \int_{\delta_1} \eta_1 + \eta_4 + \eta_5 = \int_{\delta_1} P^*w_1 = 2 \int_{\beta_1} w_1,$$

permite obtener la relación entre los coeficientes de las matrices de Riemann anteriores con los coeficientes de las matrices de Riemann de las superficies de género dos. De esta manera, ya que conocemos los coeficientes de las respectivas superficies de género dos en términos de  $p$  de la sección 13.3.2, tenemos de manera explícita relaciones, en términos de  $p$ , de los coeficientes  $u$  y  $v$ .

PROBLEMAS. —

- 1.- Encontrar fórmulas similares para todas las superficies de Riemann maximales simétricas.



- 2.- Analizar otros casos de simetrías.
- 3.- Implementar un programa computacional para los resultados obtenidos en este capítulo.
- 4.- Estudiar la rapidez de convergencia del método de Burnside.



## REFERENCIAS

- [1] L. Ahlfors. Finitely generated Kleinian groups. *Amer. J. Math.* **86** (1964), 413-429.
- [2] L. Ahlfors. *Lectures on Quasiconformal mappings*. Van Nostrand, Princeton, 1966.
- [3] L. Ahlfors. Fundamental polyhedrons and limit point sets of Kleinian groups. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **55** (1966), 251-254.
- [4] L. Ahlfors. Finitely generated Kleinian groups. *Amer. J. Math.* **86** (1964), 413-429 ; **87** (1965), 759.
- [5] L. Ahlfors and L. sario. *Riemann surfaces*. Princeton Math. Ser. no. 26, Princeton University Press, Princeton, 1960.
- [6] P. Alestalo and H. Helling. On torus fibrations over the circle. SFB-Preprint Ergänzungsreihe 97-005, Bielefeld, 1997.
- [7] J.W. Anderson. *Hyperbolic Geometry*. Springer Undergraduate Mathematics Series, 1999
- [8] B. Apanasov. *Discrete Groups in Space and Uniformization Problems*. Mathematics and Its Applications. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht-Boston-London 1991.
- [9] B. Apanasov. *Conformal Geometry of Discrete Groups and Manifolds*. De Gruyter Expositions in Mathematics, **32** 2000.
- [10] M.A. Armstrong. The fundamental group of the orbit space of a discontinuous group. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **64** (1968), 299-301.
- [11] A.F. Beardon. *The geometry of discrete groups*. Graduate Texts in Mathematics **91**. Berlin-Heidelberg-New York. Springer-Verlag 1983.
- [12] L. Bers. Automorphic forms for Schottky groups. *Adv. in Math.* **16** (1975), 332-361.

- [13] L. Bers. Simultaneous uniformization. *Bull. Amer. Math. Soc.* **66** (1960), 94-97.
- [14] L. Bers. On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups. I. *Ann. of math. (2)* **91** (1970), 570-600.
- [15] L. Bers. Uniformization, Moduli and Kleinian groups. *Bull. London Math. Soc.* **4** (1972), 257-300.
- [16] R. Brooks and J.P. Matelski. Collars in Kleinian groups. *Duke Math. J.* **49** (1982), 163-182.
- [17] W. Burnside. On a class of automorphic functions. *Acta Mathematica* Vol XXIII **433** (1981), 49-88.
- [18] A.J. Casson and S.A. Bleiler. *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*. Cambridge University Press, 1988.
- [19] V. Chuckrow. On Schottky groups with applications to Kleinian groups. *Annals of Math.* **88** (1968), 47-61.
- [20] G. De Rham. Sur les polygones générateurs de groupes fuchsienes. *Enseignement Math.* **17** (1971), 49-61.
- [21] H. Farkas and I. Kra. *Riemann Surfaces*. Berlin-New York, Springer-Verlag 1980.
- [22] M.H. Freedman and R. Scora. Strange action of groups on spheres. *J. Diff. Geom.* **25** (1987), 75-98.
- [23] M.H. Freedman and R. Scora. Strange action of groups on spheres. II. *Holomorphic functions and moduli-II. Publ. Math. Sci. Res. Inst.* **11** (1988), 41-57.
- [24] R. Fricke and F. Klein. *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*, Vol. I, R.G. Teubner, Stuttgart, Johnson Reprint Corp., 1965.
- [25] G. González-Díez. Loci of curves which are prime Galois coverings of  $\mathbb{P}_1$ . *Proc. London Math. Soc.* **62** (1991), 469-489.
- [26] L. Greenberg. Fundamental polyhedra for Kleinian groups. *Ann. of Math. (2)* **84** (1966), 433-441.
- [27] N. Gusevskii. Nonclassical Schottky groups in four dimensional space. *Siberian Math. J.* **37** (1996), 923-928.
- [28] N. Gusevskii. Topological characterization of Schottky groups. *Siberian Math. J.* **20** (1979), 454-457.
- [29] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer-Verlag, 1977.

- [30] H. Helling and C. Menzel. Towards an algorithmic construction of the hyperbolic structure on surface bundles. SFB-Preprint Ergaenzungsreihe 99-074, Bielefeld, 1999.
- [31] R.A. Hidalgo. Noded function groups. *Contemporary Mathematics*. **240** (1999), 209-222.
- [32] R.A. Hidalgo. A note on the homology covering of analytically finite Klein surfaces. *Complex variables* **42** (2000), 183-192.
- [33] R.A. Hidalgo. On Schottky groups with automorphisms. *Ann. Acad. Scie. Fenn. Ser. AI Mathematica* **19** (1994), 259-289.
- [34] R.A. Hidalgo. Schottky uniformizations of closed Riemann surfaces with Abelian groups of conformal automorphisms. *Glasgow Math. J.* **36** (1994), 17-32.
- [35] R.A. Hidalgo. Dihedral groups are of Schottky type. *Revista Proyecciones*. **18** (1999), 23-48.
- [36] R.A. Hidalgo.  $\mathcal{A}_4$ ,  $\mathcal{A}_5$  and  $\mathcal{S}_4$  of Schottky type. *Revista Matemática Complutense* **15** (2002), 11-29.
- [37] R.A. Hidalgo and A.F. Costa, A.F. Anticonformal automorphisms and Schottky coverings. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **26** (2001), 489-508.
- [38] R.A. Hidalgo and B. Maskit. On Neoclasical noded Schottky groups. To appear in *Trans. Amer. Math. Soc.*
- [39] R.A. Hidalgo and J. Figueroa. Numerical Schottky uniformizations. *Geometriae Dedicata* **111** (2005), 125-157.
- [40] T. Jørgensen. On discrete groups of Möbius transformations. *Amer. J. Math.* **98** (1976), 739-749.
- [41] L. Keen. On infinitely generated Fuchsian groups. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)* **35** (1971), 67-85 (1972).
- [42] L. Keen. Collars on Riemann surfaces. Discontinuous groups and Riemann surfaces (L. Greenberg, ed.) *ann. of Math. Stud.* **79**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (1974), 263-268.
- [43] F. Klein. Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie. *Math. Ann.* **21** (1883), 141-218.
- [44] P. Koebe. Über die Uniformisierung der Algebraischen Kurven II. *Math. Ann.* **69** (1910), 1-81.
- [45] P. Koebe. Über die Uniformisierung reeller algebraischer Kurven. *Nachr. Akad. Wiss. Goettingen* (1907), 177-190.

- [46] I. Kra. Deformation of Fuchsian groups. *Duke Math. J.* **36** (1969), 537-546.
- [47] I. Kra. *Automorphic forms and Kleinian groups*. W.A. Benjamin, Reading, MA, 1972.
- [48] I. Kra and B. Maskit. Involutions on Kleinian groups. *Bull. Amer. Math. Soc.* **78** (1972), 801-805.
- [49] S.L. Krushkal', B.N. Apanasov, N.A. Gusevskii. *Kleinian Groups and Uniformization in Examples and Problems*. Translations of Math. Monographs, AMS, **62** 1986.
- [50] R. Kulkarni. Some topological aspect of Kleinian groups. *Amer. J. of Math.* **100** (1978), 897-911.
- [51] R. Lyndon, P. Schupp. *Combinatorial Group Theory*. Springer-Verlag 1977.
- [52] A. Marden. Schottky groups and circles. *Contribution to Analysis, a collection of papers dedicated to Lipman Bers* (L.V. Ahlfors a.o., Eds.), Academic Press, New York 1974, 273-278.
- [53] A. Marden. The geometry of finitely generated Kleinian groups. *Ann. of Math.* **99** (1974), 383-462.
- [54] G.A. Margulis. Discrete groups of motions of manifolds of non-positive curvature. *Proc. Int. Congr. Math. Vancouver* (1974), **2**, 21-34.
- [55] B. Maskit. A characterization of Schottky groups. *J. d'Analyse Math.*, **19** :227-230, 1967.
- [56] B. Maskit. *Kleinian Groups*. Berlin-New York, Springer-Verlag 1987.
- [57] B. Maskit. The homology covering of a Riemann surface. *Tôhoku Math. J.* **38** (1986), 561-562.
- [58] B. Maskit. On boundaries of Teichmüller spaces and on kleinian groups II. *Ann. of Math.* **91** (1970), 607-639.
- [59] B. Maskit. Remarks on m-symmetric Riemann surfaces. *Contemporary Math.* **211** (1997), 433-445.
- [60] B. Maskit. Construction of Kleinian groups. *Proc. of the conf. on Complex Anal.* Minniapolis, 1964, Springer-Verlag, 1965.
- [61] K. Matsuzaki and M. Taniguchi. *Hyperbolic Manifolds and Kleinian Groups*. Oxford Science Publications 1998.
- [62] C.L. May. A bound for the number of automorphisms of a compact Klein surface with boundary. *Proc. Amer. Math. Soc.* **63** (1977), 273-280.

- [63] J. Milnor. Hyperbolic geometry : The first 150 years. *Bull. Amer. math. Soc.* **6** (N.S.) (1982), 9-24.
- [64] J.W. Morgan. *On Thurston's uniformization theorem for three-dimensional manifolds*. The Smith conjecture, edited by H. Bass and J.W. Morgan, Academic Press (1984), 37-125.
- [65] J. Nielsen. Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen. *Acta Math.* **50** (1927), 189-358.
- [66] J.P. Otal. Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3. *Astérisque* **235**, 1996.
- [67] H. Poincaré. *Papers on Fuchsian Functions*. Translated by J. Stiwell. Springer-Verlag, 1985.
- [68] J.G. Ractliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag 1994.
- [69] R.E. Rodríguez, V. González-Aguilera. Fermat's quartic curve, Klein's curve and the Tetrahedron. *Contemp. Math.* **201** (1997), 43-62.
- [70] L. Siegel. *Topics in Complex Function Theory I,II,III*. New York, Wiley-Interscience 1969, 1971, 1973.
- [71] J. Weeks. Snappea. <http://www.geometrygames.org/SnapPea/>
- [72] A.V. Tetenov. Infinitely generated Kleinian groups in space. *Siberian Math. J.* **21** (1980), 709-717.
- [73] W.P. Thurston. *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*. Lecture Notes, Princeton Univ., 1979.
- [74] W.P. Thurston. Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc.* **6** (1982), 357-381.
- [75] P. Tukia. On discrete groups of the unit disc and their isomorphisms. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I.* **504** (1972), 45 pp.
- [76] L. Vermeulen. Non-hyperelliptic curves of genus three with Weierstrass points of weight two. Report 81-01, Department of Math. University of Amsterdam, 1981.
- [77] E.B. Vinberg. Discrete groups generated by reflections on Lobacshesky spaces. *Math. Syberian* **72** (1967), 471-488.
- [78] F. Waldhausen. On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large. *Ann. of Math.* **87** (1968), 56-88.
- [79] N.J. Wielenberg. Discrete Möbius groups, fundamental polyhedron and convergence. *Amer. J. Math. Soc.* **99** (1977), 861-877.

- [80] H. Zieschang, E. Vogt, H.D. Coldeway. *Surfaces and planar discontinuous groups*. Lecture Notes in Math. **835**. Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag 1980.
- [81] H. Yamamoto. An example of a nonclassical Schottky group. *Duke Math. J.* **63** (1991), 193-197.



## INDICE

- Acción Discontinua, 59
- Acción Propiamente Discontinua, 58
- analíticamente finita, 3, 5
- Anti-biholomorfismo, 5
- Atoroidal, 146
- B-grupo, 136
- base simpléctica, 167, 197
- Beardon, 129
- Biholomorfismo, 5
- Bola Generalizada, 145
- Círculo Generalizado, 15, 49
- Círculo hiperbólico, 34
- Círculo isométrico, 22
- Conjugación, 8
- Conjunto Límite, 71
- Conjunto precisamente invariante, 118
- Conjuntos convexos, 32
- Convergencia Algebraica, 116
- Costante de Margulis, 149
- cubrimiento homológico, 179
- Dilatación, 8
- Disco hiperbólico, 34
- Distancia Hiperbólica, 25, 49
- Dominio de Dirichlet, 125, 152
- Dominio fundamental, 79
- Dominios de Dirichlet, 124
- Esfera Generalizada, 40, 49
- Esfera isométrica, 45
- Esferas Topológicas, 41
- Espacio métrico finitamente compacto, 63
- Estabilizador, 58
- Extensión de Poincaré, 44
- Fórmula de Gauss-Bonnet, 32
- Fibrado sobre  $S^1$ , 158
- Función de Lobachevskii, 55
- Funciones Anti-Holomorfas, 5
- Funciones Di-analíticas, 5
- Funciones Holomorfas, 5
- Generadores Clásicos, 74
- generadores de Schottky, 187
- Grupo Casi-Fuchsiano, 73
- grupo de Schottky, 187
- Grupo de Schottky Clásico, 74
- Grupo de Schottky clásico de género 2, 119
- Grupo de Schottky de género 2, 119
- grupo de tipo Schottky, 192
- Grupo Degenerado, 74
- Grupo discreto, 57
- grupo elemental, 89
- grupo extendido simpléctico, 197
- Grupo finitamente generado, 121
- Grupo Fuchsiano, 72, 123
- Grupo Fuchsiano de la primera clase, 73, 123
- Grupo Fuchsiano de la segunda clase, 73, 123
- Grupo Hiperbólico, 145
- Grupo Hiperbólico de la primera clase, 145
- Grupo Hiperbólico de la segunda clase, 145
- Grupo infinitamente generado, 121
- Grupo Kleiniano, 71
- Grupo Kleiniano de la primera clase, 84
- Grupo Kleiniano de la segunda clase, 84
- grupo no-elemental, 89
- Grupo QuasiFuchsiano de la primera clase, 118
- Grupo topológico, 57
- Grupo Web, 74
- Grupos de Schottky, 73
- Grupos de Schottky anodados, 166
- Grupos de Schottky clásicos, 72
- Grupos de tipo convergente, 62
- Grupos Geométricamente Finitos, 153
- Grupos Geométricamente Infinitos, 153
- Grupos Schottky-admisibles, 190
- Handlebody, 155, 166
- Homeomorfismo periódico, 160

- Homeomorfismo pseudo-Anosov, 160  
 Homeomorfismo reducible, 160  
 Horodisco, 108  
 Inversión, 8  
 Involución Hiperelíptica, 141  
 Irreducibilidad, 146  
 Isometrías Hiperbólicas, 28, 51  
 $k$ -Esfera Generalizada, 49  
 Límite Algebraico, 116  
 Líneas Hiperbólicas, 25, 49  
 Lema de Selberg, 102  
 Lema del collar, 136  
 Ley de Cosenos I, 37  
 Ley de Cosenos II, 37  
 Ley de Senos, 37  
 Métrica Cordal, 24  
 Métrica Riemanniana, 30  
 Matriz de Riemann, 168  
 Modelo del Plano Hiperbólico, 28  
 Modelo del semiplano superior del plano hiperbólico, 29  
 Monodromía de Anosov, 161  
 Norma de una transformación de Möbius, 54  
 nudo, 156  
 Nudo anudado, 156  
 Nudo no anudado, 156  
 Nudo satelital, 156  
 Nudo toroidal, 156  
 Orbifold, 69  
 Orbifold de Riemann, 12, 78  
 orbifolds de Klein, 179  
 Orbits, 58  
 Ovalos, 176  
 Pareo de lados, 124, 151  
 Plano Hiperbólico  $k$ -dimensional, 49  
 Poincaré del plano hiperbólico, 29  
 Polígono Fundamental, 124  
 Polígono Hiperbólico, 32  
 Polihedro Fundamental, 151  
 Producto fibrado, 137  
 producto fibrado, 137  
 Proyección Estereográfica, 23  
 Punto fijo, 15  
 razón Cruzada, 13  
 Razón Cruzada en  $\widehat{\mathbb{R}}^n$ , 47  
 Reflexión, 18  
 reflexión maximal, 203  
 Región de discontinuidad, 59, 71  
 Región fundamental de Ford, 79  
 Rotación, 8  
 Semi-espacio superior, 51  
 Semiespacio hiperbólico planar, 32  
 Semiplano superior, 29  
 signatura, 3, 5  
 sistema fundamental de curvas, 187  
 Snappea, 157  
 Superficie de Klein, 3  
 Superficie de Klein no orientable de género  $g$ , 4  
 Superficie de Riemann, 1  
 Superficie de Riemann de género  $g$ , 2  
 Superficie hiperelíptica, 203  
 superficie maximal simétrica, 203  
 Superficie Topológicamente finita, 126  
 Superficies de Klein di-analíticamente equivalentes, 6  
 Superficies de Riemann Anti-biholomorfas, 5  
 Superficies de Riemann Bi-holomorfas, 5  
 superficies de Riemann hiperbólicas, 7  
 Superficies de Riemann Hiperelíptica, 141  
 Teorema de Liouville, 41  
 Teorema de Retrosección de Koebe, 187  
 Teorema de Uniformización, 7  
 Teorema del Polígono de Poincaré, 129  
 Teorema del Polihedro de Poincaré, 153  
 Teoremas de Combinación, 117  
 Toros, 2  
 Transformación de Möbius, 8  
 Transformación Elíptica, 17, 43  
 Transformación extendida de Möbius, 8  
 Transformación Hiperbólica, 17  
 Transformación Loxodrómica, 17, 43  
 Transformación Parabólica, 17, 42  
 Transformación Pseudo-Elíptica, 18, 43  
 Transformación Pseudo-Hiperbólica, 18, 43  
 Transformación Pseudo-Parabólica, 18, 42  
 Transformaciones de Möbius en dimensión  $n$ , 40  
 Transformaciones extendidas de Möbius en dimensión  $n$ , 40  
 Traslación, 8  
 Triángulo Hiperbólico, 32  
 Vértice al infinito, 32  
 Vértice de un polígono fundamental, 125  
 Variedad (real)  $n$ -dimensional, 67  
 Variedad de Gieseking, 155  
 Variedad de Prym, 170  
 Variedad Hiperbólica 3-dimensional, 146  
 Variedad Jacobiana, 168  
 Variedad suficientemente grande, 148  
 Variedades de Haken, 149  
 Variedades Kleinianas, 78  
 Variedades primas, 149





Rubén A. Hidalgo es profesor e investigador del Departamento de Matemática de la Universidad Técnica Federico Santa María. Es miembro del *Grupo de Geometría Compleja de Chile*, y su principal interés es el estudio de superficies de Riemann y grupos Kleinianos. Obtuvo su Ph.D. en Matemáticas en la State University of New York (SUNY) at Stony Brook, NY, USA, bajo la tutela de Bernard Maskit, y luego su Habilitación en la Universitaet Bielefeld, Bielefeld, Alemania. Ha sido miembro del grupo de estudio del área de Matemáticas de Fondecyt y es un fan de OS-X. Mayor información en la página web [www.mat.utfsm.cl](http://www.mat.utfsm.cl)

ISBN XXXXXXXXXX